Вариант № 1

1. Фермер первоначально разместил свою продукцию в ящики вместимостью по 8 кг, но один ящик оказался загруженным не полностью. Тогда всю продукцию фермер переложил в ящики вместимостью по 6 кг, однако понадобилось на 8 ящиков больше, но и в этом случае один ящик оказался загруженным не полностью. Когда же всю продукцию разместили в ящики по 5 кг, то все ящики оказались загруженными полностью, но при этом понадобилось дополнительно еще 5 ящиков. Сколько килограммов весила продукция фермера? Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

2. Решите уравнение $8\sin^4(\pi x)-\sin^2 x=\cos^2 x-\cos(4\pi x)$. В ответе укажите сумму корней, принадлежащих отрезку $[-1;2]$. (5 баллов)

3. Найдите наименьшее расстояние от точки с координатами (10; 5; 10) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют неравенству $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9\sqrt{1-(2x+y)^2}$. В ответ запишите квадрат найденного расстояния. (6 баллов)

4. В стране Ландия, разводящей элитную породу лошадей, ежегодно проводится фестиваль по проверке их резвости, в котором могут участвовать только однолетние, двухлетние, трехлетние и четырехлетние скакуны. За каждую лошадь, выполнившую норматив резвости, организаторы фестиваля выплачивают конезаводу, на котором выращена лошадь, фиксированную сумму денег: за однолетку – 1 ландрик, за двухлетку – 2 ландрика, за трехлетку – 3 ландрика и за четырехлетку – 4 ландрика. Каждый конезавод, участвующий в фестивале, выставляет на испытание ежегодно четырех новых лошадей (любого сочетания возрастов по своему желанию), ранее не участвовавшие в испытаниях, а также персонально всех лошадей (не старше четырех лет), которые ранее в более молодом возрасте участвовали в испытаниях и выполняли норматив. Какую максимальную сумму денег может заработать конезавод за первые шесть лет своего участия в фестивале? (12 баллов)

5. Число N записано в виде произведения последовательных натуральных чисел от 2019 до 4036: $N=2019\cdot 2020\cdot 2021\cdot\ldots\cdot 4034\cdot 4035\cdot 4036$. Определите, в какой степени будет стоять двойка в разложении числа N на простые множители. (12 баллов)

6. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, гипотенуза которого лежит на касательной к графику функции $y=\sqrt{x-3}$, катет – на оси y, а одна из вершин совпадает с точкой касания? (12 баллов)

7. В треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Длина стороны AC равна $1+\sqrt{3}$. Расстояния от центра вписанной в треугольник DEF окружности до точек A и C равны $\sqrt{2}$ и 2, соответственно. Найдите длину стороны AB. (16 баллов)

8. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y=\dfrac{|x|-1}{|x+1|}-2, \\ 4|x-1{,}5-a|+|y-1-2a|=1. \end{cases}$$

имеет единственное решение. В ответе укажите наименьшее среди всех полученных значение параметра a. (16 баллов)

9. Дана правильная четырехугольная пирамида $TABCD$ с основанием $ABCD$, причем $AB = 9/2$. На ее высоте TO выбрана точка T_1 так, что $TT_1 = TO/3$. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 делят отрезки OA, OB, OC и OD, соответственно, в отношении $1:2$, считая от точки O. Найдите площадь сечения пирамиды $T_1A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной медиане AK боковой грани TAB, проходящей через середину ребра TC и точку F отрезка TA такую, что $AF:FT=1:2$, если известно, что расстояние от точки C до этой плоскости сечения равно $4\sqrt{2/13}$. Результат округлите до сотых по правилам округления. (16 баллов)

Решения заданий варианта № 1

1. Фермер первоначально разместил свою продукцию в ящики вместимостью по 8 кг, но один ящик оказался загруженным не полностью. Тогда всю продукцию фермер переложил в ящики вместимостью по 6 кг, однако понадобилось на 8 ящиков больше, но и в этом случае один ящик оказался загруженным не полностью. Когда же всю продукцию разместили в ящики по 5 кг, то все ящики оказались загруженными полностью, но при этом понадобилось дополнительно еще 5 ящиков. Сколько килограммов весила продукция фермера? Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

Решение. Пусть x *кг* весила продукция фермера. Тогда $8(n-1)<x<8n$, $6(n+7)<x<6(n+8)$, $5(n+13)=x$ $\Rightarrow$ $8(n-1)<5(n+13)<8n$, $6(n+7)<5(n+13)<6(n+8)$ $\Rightarrow$ $21\dfrac{2}{3}<n<23$, $n=22$, $x=35\cdot 5=175$. Ответ: 175.

2. Решите уравнение $8\sin^4(\pi x)-\sin^2 x=\cos^2 x-\cos(4\pi x)$. В ответе укажите сумму корней, принадлежащих отрезку $[-1;2]$. (5 баллов)

Решение. Учитывая основное тригонометрическое тождество, получаем

$$8\sin^4(\pi x)-1+\cos(4\pi x)=0 \quad\Rightarrow\quad 8\sin^4(\pi x)-2\sin^2(2\pi x)=0 \quad\Rightarrow$$

$$(2\sin^2(\pi x)-2\sin(\pi x)\cos(\pi x))(2\sin^2(\pi x)+2\sin(\pi x)\cos(\pi x))=0 \quad\Rightarrow$$

$$\sin^2(\pi x)(\sin^2(\pi x)-\cos^2(\pi x))=0 \quad\Rightarrow\quad \sin^2(\pi x)(\cos(2\pi x))=0.$$

Следовательно, $\left[\begin{array}{l}\sin(\pi x)=0,\\ \cos(2\pi x)=0,\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\pi x=\pi k,\ k\in Z,\\ 2\pi x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=k,\ k\in Z,\\ x=\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{2},\ n\in Z,\end{array}\right.$

тогда корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;2]$, будут равны

-1, 1, 2, -0.75, -0.25, 0.25, 0.75, 1.25, 1.75. Их сумма равна 5.

Ответ: 5.

3. Найдите наименьшее расстояние от точки с координатами (10; 5; 10) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют неравенству $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9\sqrt{1-(2x+y)^2}$. В ответ запишите квадрат найденного расстояния. (6 баллов)

Решение. Используем неравенство Коши $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$, которое выполняется для всех положительных значений a, b, c. Тогда $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{xyz}}$. Поскольку все части неравенств положительны. то $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\geq 9\sqrt[3]{xyz\cdot\dfrac{1}{xyz}}=9.$ Выражение $9\sqrt{1-(2x+y)^2}\leq 9$ для всех возможных значений x и y. Исходное неравенство справедливо для всех положительных z и всех положительных x и y, для которых выполняется неравенство $1-(2x+y)^2\geq 0$. Таким образом, наименьшее расстояние от точки с координатами (10; 5; 10) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют исходному неравенству, равно расстоянию от точки (10; 5) в плоскости Oxy до прямой $2x+y=1$. Это расстояние в квадрате равно 115,2. Ответ: 115,2.

4. В стране Ландия, разводящей элитную породу лошадей, ежегодно проводится фестиваль по проверке их резвости, в котором могут участвовать только однолетние, двухлетние, трехлетние и четырехлетние скакуны. За каждую лошадь, выполнившую норматив резвости, организаторы фестиваля выплачивают конезаводу, на котором выращена лошадь, фиксированную сумму денег: за однолетку – 1 ландрик, за двухлетку – 2 ландрика, за трехлетку – 3 ландрика и за четырехлетку – 4 ландрика. Каждый конезавод, участвующий в фестивале, выставляет на испытание ежегодно четырех новых лошадей (любого сочетания возрастов по своему желанию), ранее не участвовавших в испытаниях, а также персонально всех лошадей (не старше четырех лет), которые ранее в более молодом возрасте участвовали в испытаниях и выполняли норматив. Какую максимальную сумму денег может заработать конезавод за первые шесть лет своего участия в фестивале? (12 баллов)

Решение. Четырехлетний скакун максимально может заработать за все время участия в фестивалях только 4 ландрика. Если скакун начинает участвовать в фестивалях с 1 года, то он имеет право участия еще 3 года после этого. В случае ежегодной победы, он в течение 4 лет заработает 1+2+3+4=10 ландрика. Если скакун начнет участвовать в фестивалях с 2 лет, то в течение 3 возможных для него лет участия он заработает максимально 2+3+4=9 ландрика. Если скакун начнет участвовать в фестивалях с 3 лет, то максимально может заработать 3+4=7 ландриков. Таким образом, наиболее оптимальная стратегия такова. В первый год завод выставляет 4 однолетних скакуна. Максимальный выигрыш составляет 4 ландрика. Во второй год завод выставляет 4 новых однолетних скакуна и 4 двухлетних, которые участвовали и победили в первый год. Максимальный выигрыш составит $4+4\cdot 2=12$ ландрика. В третий год завод выставляет 4 новых однолетних скакуна, 4 двухлетних, которые участвовали во второй год и 4 трехлетних, которые участвовали в предыдущие 2 года. Максимальный бонус $4+4\cdot 2+4\cdot 3=24$ ландрика. В четвертый год нет смысла выставлять однолетних скакунов, поскольку они смогут после этого участвовать всего 2 года. Поэтому стоит выставить 4 новых двулетних скакуна. Выигрыш составит $4\cdot 2+4\cdot 2+4\cdot 3+4\cdot 4=44$ ландрика. Скакуны, которые начинают участвовать на 5 год, после этого выступят всего раз, поэтому есть смысл выставлять новыми трехлетних. Выигрыш составит $4\cdot 3+4\cdot 3+4\cdot 3+4\cdot 4=52$ ландрика. На шестой год новыми стоит выставлять только четырехлеток. Выигрыш составит $4\cdot 4+4\cdot 4+4\cdot 4+4\cdot 4=64$ ландрика. Итого за 6 лет участия в фестивалях завод максимально может заработать 4+12+24+44+52+64=200 ландриков. Ответ: 200.

5. Число N записано в виде произведения последовательных натуральных чисел от 2019 до 4036: $N=2019\cdot 2020\cdot 2021\cdot\ldots\cdot 4034\cdot 4035\cdot 4036$. Определите, в какой степени будет стоять двойка в разложении числа N на простые множители. (12 баллов)

Решение. Число N можно представить в виде

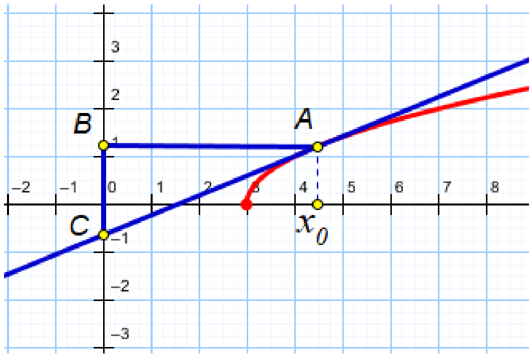
$$N=\frac{(2\cdot 2018)!}{2018!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 4034\cdot 4035\cdot 4036}{2018!}=\frac{(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 4035)\cdot(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 4034\cdot 4036)}{2018!}=$$

$$=\frac{(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 4035)\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2017\cdot 2018)}{2018!}=(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 4035)\cdot 2^{2018}$$

Получили произведение нечетных чисел и степень двойки. Ответ: 2018.

6. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, гипотенуза которого лежит на касательной к графику функции $y = \sqrt{x-3}$, катет – на оси y, а одна из вершин совпадает с точкой касания? (12 баллов)

Решение. $f(x) = \sqrt{x-3}$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$

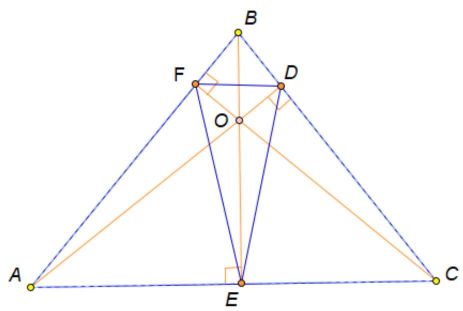


$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC$, x_0 - абсцисса точки касания A,

$A(x_0, f(x_0))$, $B(0, f(x_0))$, C - точка пересечения касательной с осью y. Пусть $C(0ς$ Уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{x-3}$ имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Точка C принадлежит касательной, ее координаты подставляем в уравнение касательной: $c = -f'(x_0)x_0 + f(x_0)$. Тогда $AB = x_0$, $BC = f(x_0) - c = f'(x_0)x_0$, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC = \dfrac{1}{2} f'(x_0)(x_0)^2 = \dfrac{x_0^{\,2}}{2\sqrt{x_0 - 3}}$. Для поиска экстремумов функции $S_{ABC} = S(x_0) = \dfrac{x_0^{\,2}}{4\sqrt{x_0-3}}$ находим нули производной этой функции $S'(x_0) = \dfrac{3(x_0^{\,2} - 4x_0)}{8\sqrt{(x_0-3)^3}}$. Поскольку $x_0 \geq 3$, то единственной точкой экстремума, а именно, точкой минимума для этой функции является точка $x_0 = 4$, $S_{\min} = S(4) = \dfrac{4^2}{4\sqrt{4-3}} = 4$. Ответ: 4.

7. В треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Длина стороны AC равна $1+\sqrt{3}$. Расстояния от центра вписанной в треугольник DEF окружности до точек A и C равны $\sqrt{2}$ и 2, соответственно. Найдите длину стороны AB. (16 баллов)

Решение. AD, BE, CF - высоты треугольника ABC, DA, EB, FC биссектрисы углов D, E, F треугольника DEF, O - точка пересечения высот треугольника ABC, она же является центром вписанной в треугольник DEF окружности. Таким образом, $AO = \sqrt{2}, CO = 2$. Пусть $OE = x$, $AE = y$. Тогда приходим к системе $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ (1+\sqrt{3} - y)^2 + x^2 = 4. \end{cases}$ Решая систему получаем $y = 1, x = 1$. Тогда $\angle DAC = \angle BCA = 45°$, $BC = \sqrt{6}$, $\angle FCA = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30°$, $\angle ABE = 30°$, $AB = 2$. Ответ: 2.

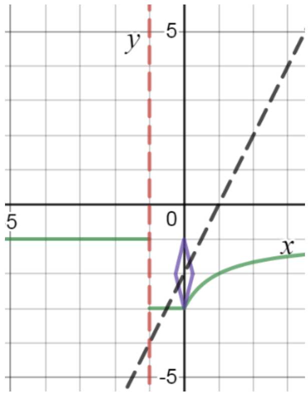


8. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y = \dfrac{|x|-1}{|x+1|} - 2, \\ 4|x - 1{,}5 - a| + |y - 1 - 2a| = 1. \end{cases}$$

имеет единственное решение. В ответе укажите наименьшее среди всех полученных значение параметра a. (16 баллов)

Решение. Построим графики функций:



а) $y=\dfrac{|x|-1}{|x+1|}-2=\begin{cases}-1, & \text{при } x<-1,\\ -3, & \text{при } -1<x\le 0,\\ \dfrac{x-1}{x+1}-2=\dfrac{-x-3}{x+1}=-1-\dfrac{2}{x+1}, & x\ge 0,\end{cases}$

б) $4|x-1{,}5-a|+|y-1-2a|=1$ - ромб, центр которого перемещается по прямой $y=2x-2$.

Общие точки графиков есть только при $-1<x\le 0$ – при этом только одно пересечение получаем в точке (0, -3), $a=-1{,}5$.

Ответ -1.5.

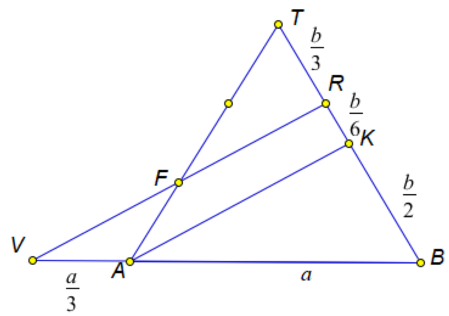
9. Дана правильная четырехугольная пирамида *TABCD* с основанием *ABCD*, причем *AB* = 9/2. На ее высоте *TO* выбрана точка T_1 так, что $TT_1 = TO/3$. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 делят отрезки *OA*, *OB*, *OC* и *OD*, соответственно, в отношении $1:2$, считая от точки *O*. Найдите площадь сечения пирамиды $T_1A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной медиане *AK* боковой грани *TAB*, проходящей через середину ребра *TC* и точку *F* отрезка *TA* такую, что $AF:FT=1:2$, если известно, что расстояние от точки *C* до этой плоскости сечения равно $4\sqrt{2/13}$. Результат округлите до сотых по правилам округления. (16 баллов)

Решение. Пусть α - плоскость сечения, ρ - расстояние от точки *C* до этой плоскости сечения, *a* – сторона основания пирамиды *TABCD*, φ - угол между плоскостью сечения и основанием пирамиды.

1. Построение сечения $T_1A_1B_1C_1D_1$

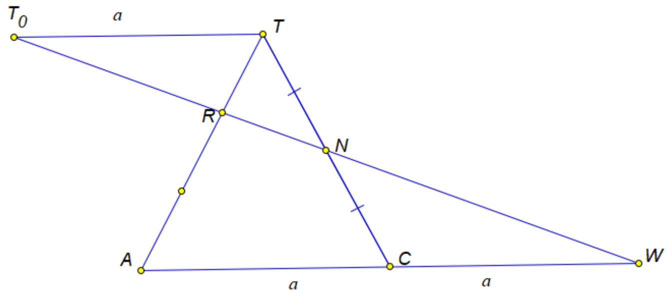
1) *R* – точка пересечения плоскости сечения α с *BT*

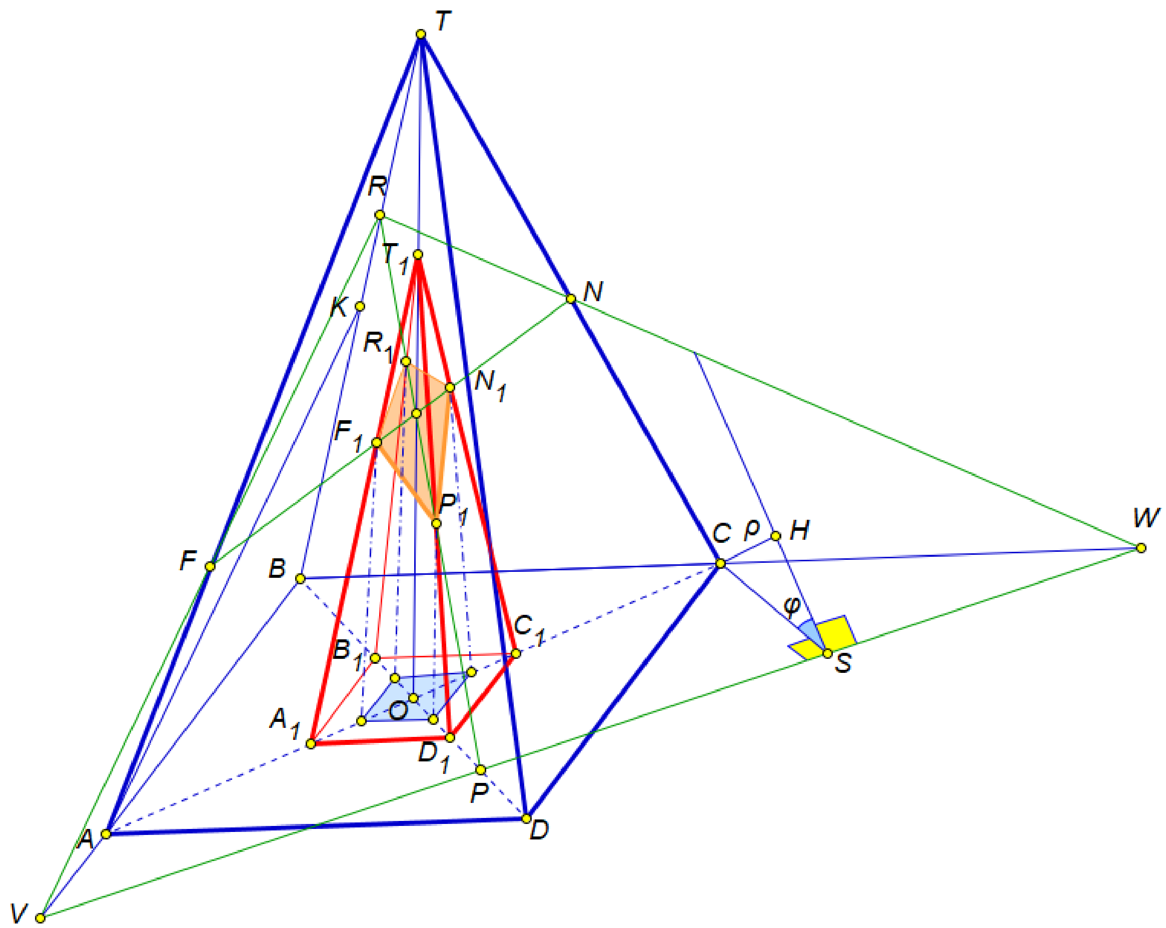
$FR \parallel AK$, $TB=b$, $TR:RB=1:2$, $VA=a/3$



2) *W* – точка пересечения плоскости сечения α с *BC*

$TN=b/2$, $BC:CW=1:1$, $CW=a$.

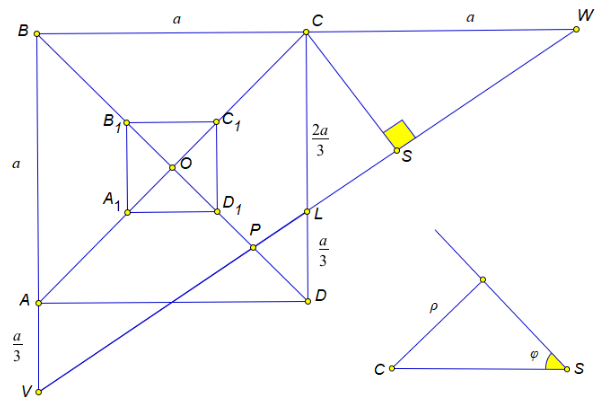




3) P – точка пересечения BD с VW (прямая пересечения плоскости сечения с плоскостью основания) $BP:PD=4:1,\ PD=\frac{1}{5}BD=\frac{a\sqrt{2}}{5}$,

$$D_1P=\frac{2}{15}BD=\frac{2\sqrt{2}}{15}a.$$

4) $\sin\varphi=\frac{\rho}{CS},\quad CS=\frac{2a}{\sqrt{13}},\quad \cos\varphi=\frac{\sqrt{4a^2-13\rho^2}}{2a}.$



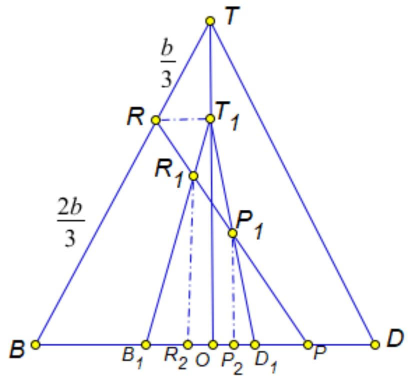
4) R_1 и P_1 – точки пересечения ребер T_1B_1 и T_1D_1 с плоскостью сечения α

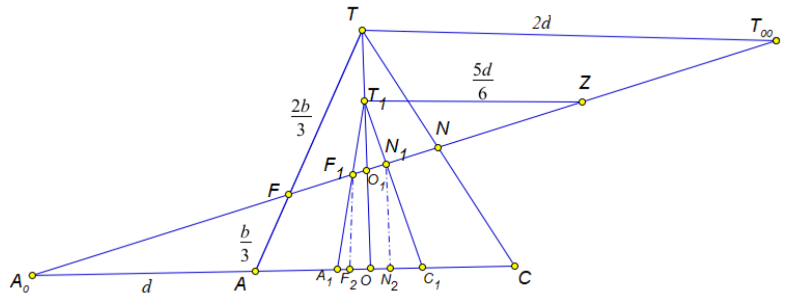
$$\frac{R_1T_1}{R_1B_1}=\frac{RT_1}{B_1P},\ RT_1=\frac{1}{3}BO=\frac{1}{6}BD,\ B_1P=\frac{7}{15}BD,\ \frac{R_1T_1}{R_1B_1}=\frac{5}{14},\ \frac{R_1T_1}{T_1B_1}=\frac{5}{19}.$$

R_2 - проекция R_1 на плоскость основания, $\frac{OR_2}{OB_1}=\frac{5}{19},\quad OR_2=\frac{5}{19}\cdot\frac{BD}{6}=\frac{5\sqrt{2}a}{19\cdot 6}.$

P_2 - проекция P_1 на плоскость основания, $\frac{T_1P_1}{P_1D_1}=\frac{RT_1}{D_1P},\ \frac{T_1P_1}{P_1D_1}=\frac{5}{4},\ \frac{T_1P_1}{T_1D_1}=\frac{5}{9},$

$$\frac{OP_2}{OD_1}=\frac{5}{9},\quad OP_2=\frac{5}{9}\cdot\frac{BD}{6}=\frac{5\sqrt{2}a}{9\cdot 6}.\quad R_2P_2=\frac{70\sqrt{2}a}{19\cdot 27}.$$





$TT_{00} \parallel A_0A$, $A_0A = d$, $TT_{00} = 2d$, $A_0C = TT_{00} = 2d$, $AC = d$.

O_1 - точка пересечения A_0T_{00} и TO, $\dfrac{OO_1}{TO_1} = \dfrac{3}{4}$, $TO_1 = \dfrac{4}{7}TO$, $T_1O_1 = \dfrac{5}{21}TO$.

$T_1Z \parallel A_0A$, $\dfrac{A_0O}{T_1Z} = \dfrac{OO_1}{T_1O_1} = \dfrac{9}{5}$, $T_1Z = \dfrac{5}{6}d$. $\dfrac{T_1F_1}{A_1F_1} = \dfrac{T_1Z}{A_0A_1} = \dfrac{5}{8}$, $\dfrac{T_1F_1}{T_1A_1} = \dfrac{5}{13}$. $\dfrac{T_1N_1}{C_1N_1} = \dfrac{T_1Z}{A_0C_1} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{T_1N_1}{T_1C_1} = \dfrac{1}{3}$.

F_2 - проекция F_1 на плоскость основания, $\dfrac{OF_2}{OA_1} = \dfrac{5}{13}$, $OF_2 = \dfrac{5}{13} \cdot \dfrac{BD}{6} = \dfrac{5\sqrt{2}a}{13 \cdot 6}$.

N_2 - проекция N_1 на плоскость основания, $\dfrac{ON_2}{OC_1} = \dfrac{1}{3}$, $ON_2 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{BD}{6} = \dfrac{\sqrt{2}a}{3 \cdot 6}$.

$$F_2N_2 = \frac{14\sqrt{2}a}{9 \cdot 13}.$$

2. Площадь сечения $F_1R_1N_1P_1$

$$S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\varphi} = \frac{S_{F_2R_2N_2P_2}}{\cos\varphi} = \frac{F_2N_2 \cdot R_2P_2}{2\cos\varphi} = \frac{3 \cdot 49 \cdot 5 \cdot 8a^3}{9^3 \cdot 13 \cdot 19\sqrt{4a^2 - 13\rho^2}}.$$

$a = 9/2$, $\rho = 4\sqrt{\dfrac{2}{13}}$, $S_{сеч} = \dfrac{3 \cdot 49 \cdot 5 \cdot 8a^3}{9^3 \cdot 13 \cdot 19\sqrt{4a^2 - 13\rho^2}} = \dfrac{105}{247} \approx 0,43$. Ответ: 0,43.