

10 класс

№1: Назовите наименьшее допустимое натуральное значение параметра a , при котором уравнение $ax - 3 = 0$ имеет положительное решение.

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ 0 \cdot x = 3 \\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ то есть } \frac{3}{a} > 0. \text{ Наименьшее значение } a, \text{ при котором это} \\ x = \frac{3}{a} \end{array} \right.$$

справедливо это $a = 1$.

Ответ: 1

№2: Решите неравенство

$$\frac{(\sqrt{x-3} + \sqrt{-x^2 + 18x - 45}) \cdot (|x^2 - 14x + 48| - |x - 8|)}{|x + 4| + |x - 21| - |x + 7| - |x - 36|} \geq 0. \text{ В ответ запишите сумму}$$

целых решений этого неравенства.

Решение: ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 3 \\ -x^2 + 18x - 45 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ (x-3) \cdot (x-15) \leq 0 \end{cases}$ Окончательно,

ОДЗ: $x \in [3; 15]$. На ОДЗ ($x \in [3; 15]$) $|x + 4| = x + 4$; $|x - 21| = 21 - x$;

$|x + 7| = x + 7$; $|x - 36| = 36 - x$.

Тогда знаменатель $= x + 4 + 21 - x - x - 7 + x - 36 = -18$.

$x^2 - 14x + 48 = (x - 6) \cdot (x - 8)$ и неравенство примет вид:

$$\frac{(\sqrt{x-3} + \sqrt{(x-3) \cdot (15-x)}) \cdot (|x-8| \cdot |x-6| - |x-8|)}{-18} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-3} + \sqrt{(x-3) \cdot (15-x)}) \cdot |x-8| \cdot (|x-6| - 1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 3 \leq x \leq 15 \\ |x-8| \cdot ((x-6)^2 - 1) \leq 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 3 \leq x \leq 15 \\ |x-8| \cdot (x-5) \cdot (x-7) \leq 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$x \in \{3\} \cup [5; 7] \cup \{8\}. \quad 3+5+6+7+8=29.$$

Ответ: 29

№3: При каких значениях параметра a уравнение $(a+2) \cdot (x^2 - 6x + 8)^2 - 2(a-1) \cdot (x^2 - 6x + 8) + a - 3 = 0$ имеет ровно два различных решения? В ответе укажите сумму целых значений a , удовлетворяющих условию задачи.

Решение. Сделаем замену $t = x^2 - 6x + 8$ (1). Получим уравнение $(a+2) \cdot t^2 - 2(a-1) \cdot t + a - 3 = 0$ (2). При этой замене $x_{\text{вершины}} = 3$, $t_{\text{вершины}} = -1$.

Областью значений переменной t будет луч $[-1; +\infty)$. Следовательно, при $t < -1$ уравнение $t = x^2 - 6x + 8$ не будет иметь корней, $t = -1$ даст единственное значение x ($x = 3$), а каждое $t > -1$ принесёт нам два различных корня. Следовательно, два решения по переменной x у нас может быть в одном из двух случаев: либо уравнение (2) имеет единственное решение большее -1 , либо уравнение (2) имеет два различных решения, одно из которых больше -1 (оно даст два решения по x), а другое – меньше -1 , которое решений по x не даст. Первый случай возможен либо при $a = -2$

(тогда получится линейное уравнение $6t - 5 = 0$ с корнем $t = \frac{5}{6}$ ($\frac{5}{6} > -1$))

), либо при выполнении условий $\begin{cases} D = 0 \\ t_{\text{вершины}} > -1 \end{cases}$, которому соответствует

наличие одного корня, большего -1 . Решим систему:

$$\begin{cases} 4 \cdot (a-1)^2 - 4 \cdot (a+2) \cdot (a-3) = 0 \\ \frac{a-1}{a+2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - a = 0 \\ \frac{2a+1}{a+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 7. \text{ Второй случай}$$

возможен при условии $\frac{f(-1)}{a+2} < 0$, где $f(t) = (a+2) \cdot t^2 - 2 \cdot (a-1) \cdot t + a - 3$.

Решим последнее неравенство: $\frac{a+2+2(a-1)+a-3}{a+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{4a-3}{a+2} < 0 \Leftrightarrow$

$a \in (-2; \frac{3}{4})$. Таким образом, ответом задачи будет $a \in [-2; \frac{3}{4}) \cup \{7\}$. Посчитаем

сумму целых значений a , удовлетворяющих условию задачи:
 $-2 + (-1) + 0 + 7 = 4$.

Ответ: 4

$$\frac{x-3}{x} + \frac{x-4}{x} + \frac{x-5}{x} + \dots + \frac{3}{x} = 5$$

№4: Решить уравнение $\frac{x-3}{x} + \frac{x-4}{x} + \frac{x-5}{x} + \dots + \frac{3}{x} = 5$. В ответ записать наибольший корень уравнения. Если полученный результат не является целым числом, округлить его до трёх значащих цифр по правилам округления.

Решение: В левой части уравнения находится целое число дробей, числители которых представляют из себя арифметическую прогрессию и убывают от числа $(x-3)$ до числа 3 с разностью -1 . Посчитаем количество дробей: $a_1 = x-3$,
 $a_n = 3 = a_1 + (n-1)d = x-3 + (n-1)(-1)$, получаем, что количество дробей $n = x-5$. Сумма числителей равна сумме n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{x-3+3}{2} \cdot (x-5) = \frac{x \cdot (x-5)}{2}.$$

Тогда уравнение принимает вид: $\frac{x \cdot (x-5)}{2 \cdot x} = 5$, решая его, получаем, что $x = 15$.

Ответ: 15

№5: В связи с неблагоприятными погодными условиями фермер собрал зерна на 10 % меньше, чем в предыдущий год. Как изменится в процентах по сравнению с предыдущим годом его выручка от продажи зерна, если закупочная цена на зерно по сравнению с предыдущим годом повысилась на 15%. В ответе укажите количество процентов.

Решение:

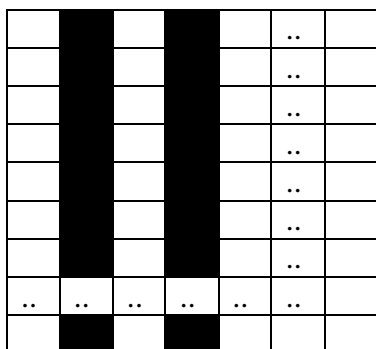
Пусть в прошлом году фермер собрал x тонн зерна. Тогда в этом году он собрал $0,9x$ тонн. Закупочная цена в прошлом году была y тыс.рублей. А в этом стала $1,15y$ тыс.рублей. Тогда выручка от продажи зерна в прошлом году составила yx тыс. рублей, а в этом году $1,15y \cdot 0,9x = 1,035yx$. Сравнивая выручки двух лет, получаем, что в этом году выручка составляет 1.035 от прошлого. То есть выросла на 3,5 процента.

Ответ: 3,5

№6: Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 35 клеток (35×35 – всего в квадрате 1225 клеток), чтобы среди любых трех его клеток, образующих фигуру «уголок», обязательно была хотя бы одна закрашенная.

Решение.

Закрашивать надо столбцами через один (см. рис.). Таким образом будет закрашено $N \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ клеток. Это минимально возможное количество. Действительно, в каждой полоске $2 \times N$ клеток должно быть не менее $2 \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ закрашено. Поэтому в соседнем столбце рядом с неокрашенной обязательно есть закрашенная. ($35 \cdot 17 = 595$).



Ответ: 595

№7: Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите больший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

Решение:

Поскольку $AB=BC$ (по условию), треугольник ABC равнобедренный. То есть

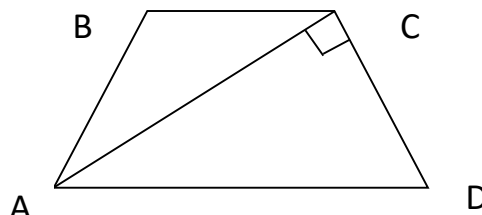
$$\angle BAC = \angle BCA = \alpha. \quad \text{Отсюда} \quad \angle ABC =$$

$$180^\circ - 2\alpha = \angle BCD = 90^\circ + \angle ACB =$$

$$= 90^\circ + \alpha. \quad \text{Вычисляя, получим} \quad \alpha = 30^\circ.$$

$$\text{Следовательно,} \quad \angle ABC = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ$$

$$= 120^\circ.$$



Ответ: 120

№8: Внутри треугольника ABC выбрана точка M так, что угол BMC – прямой, а треугольник BMC равнобедренный. Расстояния от точки M до точки A , прямой AB и прямой AC равны $\sqrt{10}$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$, соответственно. Найдите квадрат длины стороны BC .

Решение.

Угол BAC – острый, т.к. $\angle BMC=90^\circ$. $AB \perp MN$. Треугольник BKM равен треугольнику CHM по гипотенузе и острому углу ($BM=MC$, $\angle MBK=\angle BMH=\angle MCH$) следовательно, $KMHN$ – квадрат.

Далее только Т.Пифагора.

$$AK^2 = AM^2 - MK^2 = 10 - 2 = 8.$$

$$AL^2 = AM^2 - ML^2 = 10 - 5 = 5.$$

Пусть, $BC = x$, $BM = y$, $BN = z$, $PC = t$.

$$MB^2 = KB^2 + MK^2 = (KN+z)^2 + MK^2 = y^2.$$

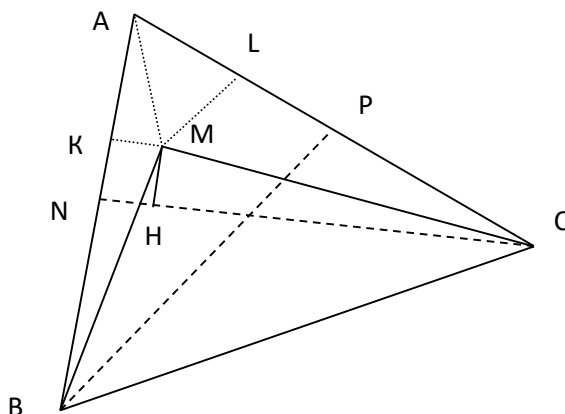
$$MC^2 = LC^2 + ML^2 = (LP+t)^2 + ML^2 = y^2.$$

$$\text{Поэтому: } (\sqrt{2} + z)^2 + 2 = (\sqrt{5} + t)^2 + 5. \quad (1)$$

$$PB^2 = CB^2 - PC^2 = AB^2 - AP^2 \quad \text{или} \quad x^2 - t^2 = (3\sqrt{2} + z)^2 - 20 \Rightarrow x^2 = z^2 + t^2 + 6\sqrt{2}z - 2.$$

$$CN^2 = CB^2 - BN^2 = AC^2 - AN^2 \quad \text{или} \quad x^2 - z^2 = (2\sqrt{5} + t)^2 - 18 \Rightarrow x^2 = z^2 + t^2 + 4\sqrt{5}t + 2.$$

Таким образом: $z = \frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{5}t + 1)$. Из (1): $t^2 - 2\sqrt{5}t - 40 = 0$. ($t > 0$) \Rightarrow



$$t = 4\sqrt{5}, z = 7\sqrt{2}, x^2 = 260.$$

Ответ: 260

№9: Решить уравнение $x^2 + \frac{9x^2}{x^2 + 6x + 9} = 7$. В ответ записать значение выражения $x_0^3 - 4x_0$, где x_0 – наибольший корень уравнения. Если полученный результат не является целым числом, округлить его до трёх значащих цифр по правилам округления.

Решение: Заметим, что левая часть уравнения представляем из себя сумму двух квадратов, добавим и отнимем удвоенное произведение и свернем слагаемые по формуле квадрат разности:

$$(x)^2 + \left(\frac{3x}{x+3}\right)^2 = 7$$

$$(x)^2 + \left(\frac{3x}{x+3}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3x}{x+3} - 2 \cdot x \cdot \frac{3x}{x+3} = 7$$

$$\left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3x}{x+3} = 7$$

$$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2 + \frac{6x^2}{x+3} - 7 = 0, \text{ делаем замену } \frac{x^2}{x+3} = t, \text{ решаем полученное уравнение, получаем,}$$

$$\text{что } \frac{x^2}{x+3} = -7 \text{ или } \frac{x^2}{x+3} = 1. \text{ Первое уравнение корней не имеет, корни второго } x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{. Наибольший корень } x_0 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, x_0^3 - 4x_0 = 3.$$

Ответ: 3