Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 118006
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Кисаева Софья Александровна

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Москва, школа №1580

Регистрационный номер класс 8

Вариант задания 3

Дата проведения «10» февраля 2019 г.

Подпись участника Кисаев

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
+.	±			∓						
15	12			5						32

15 12 0 0 5 -0

Шифр 118006

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

32 хор

Вариант № 3

№1

$$\begin{cases} 3x+2y=15a \\ \frac{1}{a}\cdot x+y=9 \;\;|\cdot a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3x+2y}{15} \\ \cancel{a}\, x+ay=9a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3x+2y}{15} \\ a\cdot(9-y)=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3x+2y}{15} \\ a=\frac{x}{9-y} \end{cases}$$

$a \neq 0$

при $x=y$:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{3x+2x}{15}=\frac{5x}{15}=\frac{x}{3} \\ a &= \frac{x}{9-x} \end{aligned}\right\} \text{значит } \frac{x}{3}=\frac{x}{9-x}, \text{ значит } 9-x=3 \Rightarrow x=6, \text{ значит } y=$$

Значит, при $x=y=6$ $a=\frac{6}{3}=2$.

+.

Ответ: при $a=2$ $y=x$.

№2

$$\begin{cases} \frac{y-x+1}{x^2-3x}=1 \\ y^2+5+2xy=6y+6x-x^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} x\neq 0 \\ x\neq 3 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y-x+1}{x\cdot(x-3)}=1 & (1) \\ y^2+5+2xy+x^2-6y-6x=0 & (2) \end{cases}$$

$(x\neq 3)$

$(x\neq 0)$

прорешаем отдельно (1) и (2) уравнения

(1) $\frac{y-x+1}{x\cdot(x-3)}=1$, значит $y-x+1=x^2-3x$

$x^2-2x-y-1=0$ (*)

(2) $y^2+5+2xy+x^2-6y-6x=0$

$y^2+x^2-6\cdot(y+x)+2xy+5=0$

$(y+x)^2-\cancel{2xy}-6\cdot(y+x)+\cancel{2xy}+5=0$

$(y+x)^2-6\cdot(y+x)+5=0$

$(y+x)\cdot(y+x-6)+5=0$

обозначим $y+x=t$, тогда:

$t\cdot(t-6)+5=0$

$t^2-6t+5=0$

$D=36-20=16=4^2$

$t_1=\frac{6+\sqrt{4^2}}{2}=\frac{6+4}{2}=5$

$t_2=\frac{6-\sqrt{4^2}}{2}=\frac{6-4}{2}=1$

значит $\left[\begin{array}{l} y+x=5 \\ y+x=1 \end{array}\right.$ (+)

Подставим значения в (*):

1.) при $y+x=5$ $x=5-y$

$(5-y)^2-2\cdot(5-y)-y-1=0$

$25-10y+y^2-10+2y-y-1=0$

$y^2-9y+14=0$

$D=81-56=25=5^2$

$y_1=\frac{9-\sqrt{5^2}}{2}=\frac{9-5}{2}=\frac{4}{2}=2$

$y_2=\frac{9+\sqrt{5^2}}{2}=\frac{9+5}{2}=7$

при $y=2$ $x=5-2=3$.

при $y=7$ $x=5-7=-2$

2.) при $y+x=1$ $x=1-y$

$(1-y)^2-2\cdot(1-y)-y-1=0$

$1-2y+y^2-2+2y-y-1=0$

$y^2-y-2=0$

$D=1+8=9=3^2$

$y_1=\frac{1-\sqrt{3^2}}{2}$ $\frac{1-3}{2}=-1$

$y_2=\frac{1+\sqrt{3^2}}{2}=\frac{1+3}{2}=2$

при $y=-1$ $x=1+1=2$

при $y=2$ $x=1-2=-1$

Ответ: ~~(3;2)~~, $(-2;7)$, $(2;-1)$, $(-1;2)$.

12.

Из ответа не исключено решение входящее в ОДЗ.

№ 4.

$a=?$; $f(x)=p(x)$. 1 решение.

$f(x)=\left|\frac{x^3+x^2-4x-4}{(x-1)\cdot(x-3)+3x-5)}\right|=\left|\frac{x^2\cdot(x+1)-4(x+1)}{x^2-4x+3+3x-5}\right|=\left|\frac{(x^2-4)\cdot(x+1)}{x^2-x-2}\right|$

при $x^2-x-2=0$ $f(x)$ не имеет смысла, т.е:

$x^2-x-2=0$

$D=1+8=9=3^2$

$x_1=\frac{1+\sqrt{3^2}}{2}=\frac{1+3}{2}=2$

$x_2=\frac{1-\sqrt{3^2}}{2}=\frac{1-3}{2}=-1$

при $x=-1$ или $x=2$ $f(x)$ не имеет смысла, т.е. $x\neq-1$, $x\neq2$.

также: $x^2-x-2=x\cdot(x-2)\cdot(x+1)$

тогда:

$f(x)=\left|\frac{(x^2-4)\cdot(x+1)}{x\cdot(x-2)\cdot(x+1)}\right|=\left|\frac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+1)}{x\cdot(x-2)\cdot(x+1)}\right|=\left|\frac{x+2}{x}\right|$

$p(x)=\sqrt{x^2}+a=|x|+a$

т.к. $f(x)=p(x)$, тогда: $\left|\frac{x+2}{x}\right|=|x|+a$ (+)

Мы знаем, что модуль всегда ≥ 0, тогда:

1.) пусть $\left|\frac{x+2}{x}\right| = 0$, тогда: $\frac{x+2}{x} = 0 \quad (|\cdot x)$

$x+2=0$

$x=-2$

~~при x=-2~~ $|x|+a=0$: $a = -|x|$

$a = -|-2|$

$a=-2$

при $a=-2$ одно решение $(x=-2)$.

2.) пусть $\left|\frac{x+2}{x}\right| > 0$, тогда:

а.) $\frac{x+2}{x} > 0 \quad (|\cdot x)$

$x+2>0 \quad (x \neq 0)$

$x>-2$

б.) $\frac{x+2}{x} < 0 \quad (|\cdot x)$

$x+2<0 \quad (x\neq 0)$

$x<-2$

$|x|+a>0$, тогда $a>|x|$, тогда $a>-2$ и при $x<-2$, и при $x>-2$, ~~при~~ $x\neq 0$

~~при a>-2 тогда~~ но при $a>-2$, когда $x\neq 0$ бесконечно много решений.

Значит:

Ответ: при $a=-2$ уравнение $f(x)=p(x)$ имеет одно решение $(x=-2)$.

5б