Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 119045

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА.

(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Фомичева Светлана Юрьевна

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Иваново

Лицей №33

Регистрационный номер 9 класс

Вариант задания №3

Дата проведения «10» 02 2019 г.

Подпись участника

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
15	15	15	5	нет	нет					
15	15	15	5	нет						

Шифр 119045

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Всего: 50 баллов

Бетелова Ж

Власова 50б

Вариант № 3

№1.

$$\left(\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{|x-2|}\right)\left(x^2-2x+2+|x-2|\right)\le\sqrt{15+2x-x^2} \quad (1)$$

Оценим левую часть.

$$\left(\frac{1}{(x-1)^2+1}+\frac{1}{|x-2|}\right)\left(((x-1)^2+1)+|x-2|\right)=\frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+1}+$$

$$+\frac{(x-1)^2+1}{|x-2|}+\frac{|x-2|}{(x-1)^2+1}+\frac{|x-2|}{|x-2|}=\frac{(x-1)^2+1}{|x-2|}+\frac{|x-2|}{(x-1)^2+1}+2$$

$$\frac{(x-1)^2+1}{|x-2|}+\frac{|x-2|}{(x-1)^2+1}\ge 2 \text{ по неравенству Коши.}$$

$$\frac{(x-1)^2+1}{|x-2|}+\frac{|x-2|}{(x-1)^2+1}+2\ge 4.$$

Чтобы неравенство (1) было верным необходимо, чтобы $\sqrt{15+2x-x^2}\ge 4$.

$$\sqrt{15+2x-x^2}\ge 4$$

$$15+2x-x^2\ge 16.$$

$$x^2-2x+1\le 0$$

$$(x-1)^2\le 0$$

$$x=1.$$

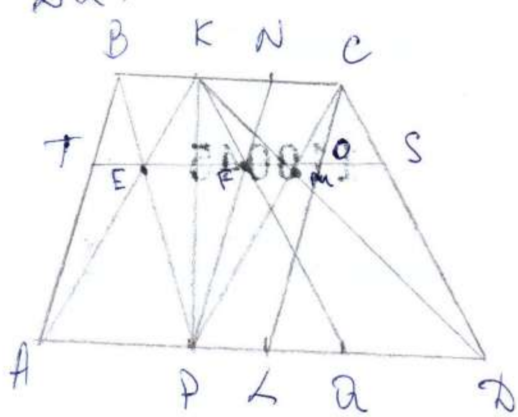
(+)

При $x=1$. $(1+1)(1+1)\le\sqrt{16}$

$4\le 4$ - верно.

Ответ: $x=1$.

№2.



Дано:
$ABCD$, $AD \parallel BC$.
$K, N \in BC$ $BK = KN = NC = 1$.
$P, Q \in AD$ $AP = PQ = QD = 2$
$BP \cap AK = E$
$KQ \cap PN = F$
$KD \cap PC = M$.

Доказать:
E, F, M - лежат на одной прямой.

Найти:
TS.

Решение:

1. Проведем прямую EF.
2. $\triangle BEK$ и $\triangle AEP$.
   1) $\angle BEK = \angle AEP$ как вертикальные
   2) $\angle EBK = \angle APE$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BP

   Значит, $\triangle BEK \sim \triangle PEA$ по двум углам

   $$\frac{EK}{AE} = \frac{BK}{AP}$$

   $$\frac{EK}{AE} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{EK}{AK} = \frac{1}{3}$$
3. Аналогично $\triangle KFN \sim \triangle QFP$ (по двум углам)

   $$\frac{KF}{FQ} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{KF}{KQ} = \frac{1}{3}$$
4. $\triangle EKF$ и $\triangle AKQ$
   1) $\angle AKQ$ - общий.
   2) $\frac{EK}{AK} = \frac{KF}{KQ} = \frac{1}{3}$.

   Значит, $\triangle EKF \sim \triangle AKQ$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними

   $\angle KEF = \angle KAQ$
5. $\angle KEF$ и $\angle KAQ$ - соответственные при прямых EF и AD и секущей AK, $\angle KEF = \angle KAQ$, значит,

6. $EF \cap KD = X$.

$\frac{KX}{XD} = \frac{KF}{FQ} = \frac{1}{2}$ по теореме Фалеса

7. $\triangle KMC$ и $\triangle DMP$.

1) $\angle KMC = \angle DMP$ как вертикальные

2) $\angle MKC = \angle MDP$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей KD

Значит, $\triangle KMC \sim \triangle DMP$ по двум углам.

$\frac{KM}{MD} = \frac{KC}{PD} = \frac{1}{2}$.

8. $\frac{KX}{XD} = \frac{1}{2}$ $\frac{KM}{MD} = \frac{1}{2}$

$\frac{KX}{XD} = \frac{KM}{MD}$

$\frac{KD - XD}{XD} = \frac{KD - MD}{MD}$

$\frac{KD}{XD} - 1 = \frac{KD}{MD} - 1$

$\frac{KD}{XD} = \frac{KD}{MD}$

$XD = MD$

$X = M$.

Значит, $M \in EF$.

$M; E; F$ - на одной прямой.

9. $ME \cap AB = T$ $ME \cap CD = S$

10. Д.п: $CL \parallel AB$. $L \in AD$ $CL \cap TS = O$

11. $ABCO$ - параллелограмм (по определению)

$TO = BC = 3$.

12. $\triangle COS$ и $\triangle CLD$

1) $\angle DCL$ - общий.

2) $\angle COS = \angle CLD$ как соответственные при $TS \parallel AD$ и секущей CL.

Значит, $\triangle COS \sim \triangle CLD$ по двум углам.

$\frac{OS}{DL} = \frac{CS}{SD} = \frac{1}{3}$.

$\frac{OS}{\ } = \frac{1}{\ }$ $\frac{OS}{\ } = \frac{1}{\ }$ $OS = 1$.

13. $TS = TO + OS$

$TS = 3 + 1 = 4$.

Ответ: $TS = 4$.

№3.

Пусть Степан продал x страусов. Тогда каждый страус в среднем стоил $(2,5+44-x)$ тыс. руб. Значит, Степан заработал $(x(2,5+44-x))$ тыс. руб.

Оценим это выражение.

$$x(2,5+44-x) = -x^2+46,5x = -(x^2-46,5x) =$$
$$= -(x^2-2\cdot 23\tfrac{1}{4}\cdot x+540\tfrac{9}{16})+540\tfrac{9}{16} = -(x-23\tfrac{1}{4})^2+540\tfrac{9}{16}.$$

$$(x-23\tfrac{1}{4})^2 \geq 0$$

$$-(x-23\tfrac{1}{4})^2 \leq 0$$

$$540\tfrac{9}{16}-(x-23\tfrac{1}{4})^2 \cancel{\geq} \leq 540\tfrac{9}{16}.$$

Равенство достигается при $x = 23\frac{1}{4}$, но Степан не мог продать нецелое количество страусов. Ближайшее целое число это 23. И так как графиком зависимости стоимости от количества является парабола, ветви которой направлены вниз, то при расхождении дальше от x вершины (т.е. от $23\frac{1}{4}$), значение будет уменьшаться, то значит ~~в~~ при $x = 23$ значение наибольшее.

$23\cdot(2,5+21) = 23\cdot 23,5 = 540,5$ (тыс руб) +

Ответ: ~~в~~ Степан мог получить максимум 540,5 тыс рублей, при 23 проданных страусах.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 119045

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 3

№4.

$$\begin{cases} (x-3)^2+(a-2)^2 \le 9. \\ 4a-3x \le 8 \quad (1) \\ 2a \le 13-3x \quad (2) \end{cases}$$

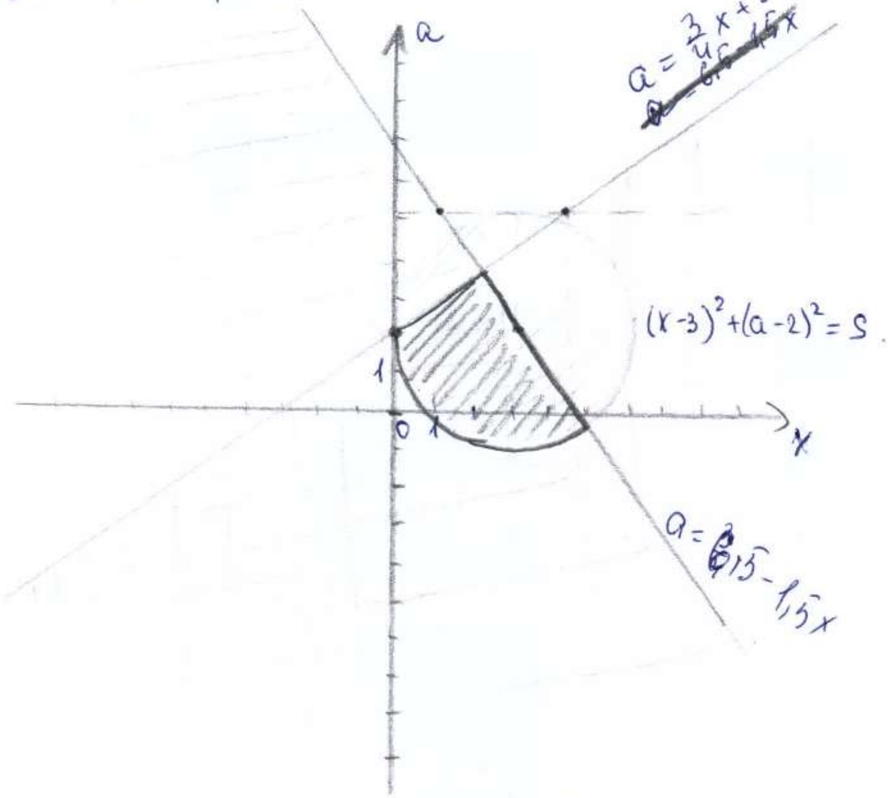
(1) $4a-3x \le 8$

$4a-3x=8$

$a=\frac{8+3x}{4}=\frac{3}{4}x+2.$

(2) $2a \le 13-3x$

$a \le 6,5-1,5x$



Система имеет решения при $a \in [-1; 3,5]$*.

При $a = 3{,}5$ $\quad x = 2$.

При $2 \leq a < 3{,}5$ $\quad x \in \left[\frac{4a-8}{3}; \frac{13-2a}{3}\right]$.

При $*_1 \leq a < 2$ $\quad x \in \left[3^{*_2} - \sqrt{9-(a-2)^2}; \frac{13-2a}{3}\right]$

При $-1 < a < *_1$ $\quad x \in \left[-3 - \sqrt{9-(a-2)^2}; 3 + \sqrt{9-(a-2)^2}\right]^*$ $*_2$.

При $a = -1$ $\quad x = 3$. +

$*$. $a = 3{,}5$, получилось из точки пересечения прямых $a = \frac{3}{4}x + 2$ и $a = 6{,}5 - 1{,}5x$.

$*_1$ здесь должно быть значение a в точке пересечения прямой $a = 6{,}5 - 1{,}5x$ и окр.

$(x-3)^2 + (a-2)^2 = 9$.

$*_2$. $(x-3)^2 + (a-2)^2 = 9$

$x^2 - 6x + 9 + (a-2)^2 - 9 = 0$

$x^2 - 6x + (a-2)^2 = 0$

$D_1 = k^2 - ac$

$D_1 = 9 - (a-2)^2$.

$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$

$x = 3 \pm \sqrt{9-(a-2)^2}$.

Точки пересечения не найдено