

Шифр 119048  
(заполняется ответственным  
секретарем приемной комиссии)

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**  
**на олимпиаде «Шаг в будущее»**

соревнования по образовательному предмету математика  
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника ДОБРЯНСКИЙ ДМИТРИЙ НИКОЛАЕВИЧ

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Москва, школа № 1580

Регистрационный номер 9 класс

Вариант задания № 3

Дата проведения «10» февраля 2019 г.

Подпись участника 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	15	15	0	нет	10					
0	15	15	0	нет	10					

119048

Шифр \_\_\_\_\_

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Всего 40 баллов

Решение 24

(108) Власов

Вариант № 3

N4

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (a-2)^2 \leq 9, (*) \\ 4a - 3x \leq 8 \quad (2) \\ 2a \leq 13 - 3x \quad (3) \end{cases}$$

$$(1): x^2 - 6x + 9 + (a-2)^2 \leq 9$$

$$x^2 - 6x + (a-2)^2 \leq 0$$

кр-во будет иметь

$D = 36 - 4(a-2)^2$  решение, если  $D \geq 0$ ,

$36 - 4(a-2)^2 \geq 0$  в случае, если  $D < 0$ ,

$4(a-2)^2 \leq 36 \Rightarrow$  Система не имеет решений (1) будет иметь  $\emptyset$  решений)

$$\Rightarrow 2|a-2| \leq 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a-2| \leq 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 \leq a-2 \leq 3$$

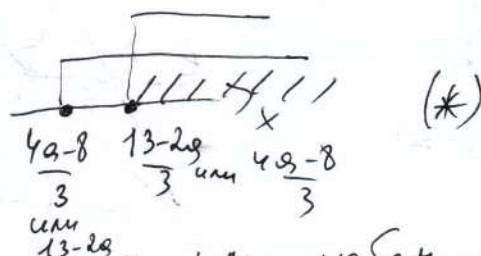
$$-1 \leq a \leq 5 \Rightarrow a \in [-1; 5] +$$

рассмотрим решения кр-во (2) и (3):

$$(2): x \geq \frac{4a-8}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(3): x \geq \frac{13-2a}{3}$$



кр-во (2) и (3) имеют решения при любых значениях  $a$ , их объединение всегда будет давать решение, т.к.

из (\*),  $\Rightarrow$  Система может не иметь решений,

если: 1)  $a \notin [-1; 5]$

2) пересечение (1), (2), (3) не даёт решений

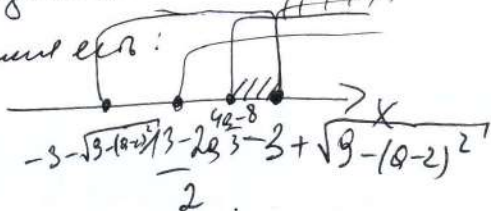
если  $a \in [-1; 5]$ , (1) имеет решение:

$$\left[ \frac{-6 - \sqrt{36 - 4(a-2)^2}}{2}, \frac{-6 + \sqrt{36 - 4(a-2)^2}}{2} \right] \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left[ -3 - \sqrt{9 - (a-2)^2}; -3 + \sqrt{9 - (a-2)^2} \right]$$

иногда, возможно несколько

01) решение есть:



связав:

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 + \sqrt{9 - (a-2)^2} \geq \frac{4a-8}{3} & (4) \\ -3 + \sqrt{9 - (a-2)^2} \geq \frac{13-2a}{3} & (3) \end{cases}$$

$$(13-2a)/2 \quad (4) \quad 9a^2 - 60a + 37 \leq 0$$

решение уравнения (3) и (4) находим решение, пересечение  $x \in c a \in [-1; 5]$ :

$$(3): 9a^2 - 316a + 406 \leq 0$$

ответа нет!

N2

ABCD - трап

$\{K, N\} \in BC$

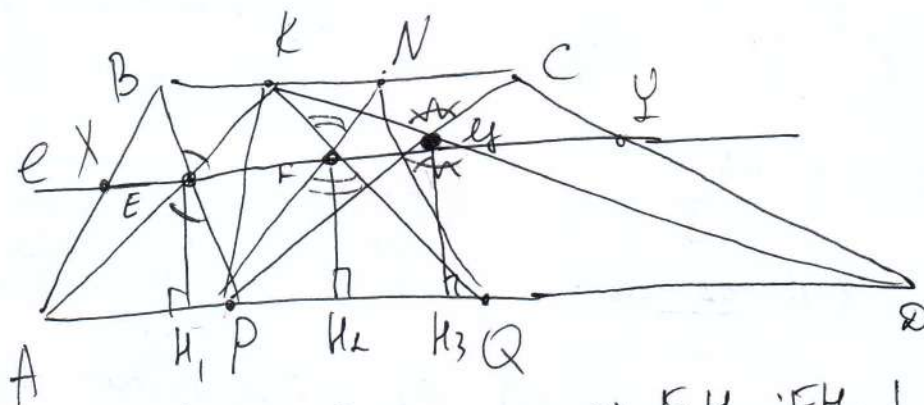
$BK = KN = NC = 1$

$\{P, Q\} \in AD$

$AP = PQ = QD = 2$

$BC \parallel AD$

0-1:  $\left. \begin{array}{l} BP \cap AK \\ KQ \cap PN \\ KP \cap PC \end{array} \right\}$  не 1 решение - ?



$$1) AK \cap BP = E$$

$$KQ \cap PN = F$$

$$KP \cap PC = G$$

$$2) EH_1: EH_1 \perp AD$$

$$FH_2: FH_2 \perp AD$$

$$GH_3: GH_3 \perp AD$$

~~Handwritten scribbles and signatures at the bottom right.~~



1)  $EH \perp EF$ ,  $EH \perp EF$

3)  $\triangle AEP = \triangle PFQ$  (по  $AP = PQ$   
 $\angle KAP = \angle NPQ$   
 $\angle BPA = \angle KQP$ )

$\Rightarrow EH_1 = FH_2 =$

$\Rightarrow EH$  и  $FH$  равны по  $L$ .

3)  $\triangle AEP \sim \triangle KEB$ ;  $\triangle PFQ \sim \triangle NFK$ ;  $\triangle PFD \sim \triangle CQK$ .  
 (т.к. у них равны верш. углы; углы при  
 основании равны т.к.  $BE \parallel AD$ );  $K = \frac{1}{2} \left( \frac{BK}{AP} = \frac{KN}{PQ} = \frac{KC}{QD} \right)$

$\Rightarrow$  их стороны относятся как  $\frac{1}{2} \Rightarrow$  их высоты тоже как  $\frac{1}{2}$ .

$\Rightarrow EH_1 = \frac{2}{3}h$ ;  $FH_2 = \frac{2}{3}h$ ;  $CH_3 = \frac{2}{3}h$ ,  $h$  - высота трапеции  $\Rightarrow$

$\Rightarrow E, F, H$  находятся на одной прямой (также,  $EF \parallel AD$ ) и  $AD \Rightarrow$  их от  $AD$  равно  $\frac{1}{3}$  высоты (также,  $EF \parallel AD$ )

4)  $KCDQ$  - параллелограм  $\Rightarrow FY = QD = 2$ .  
 ( $AD \parallel BC$ ;  $KC = 2 = QD$ )

5)  $BNPA$  - параллелограм  $\Rightarrow XF = AP = 2$   
 ( $AD \parallel BC$ ;  $AN = 2 = AP$ )

$\Rightarrow XY = FY + XF = 4$   
 Ответ:  $XY = 4$ .

N3

~~число~~ ~~популяр~~  $N$  - кол-во купленных справок

число ~~популяр~~ ~~генер~~:

$(2,5 + 44 - N) \cdot N = (46,5 - N) \cdot N = f(N)$  - функция,

сп ~~стоимость~~ ~~справки~~  $\cdot$  кол-во ~~купленных~~ ~~справок~~

выражающая кол-во ~~справок~~ ~~одной~~ ~~от~~ ~~кол-во~~ ~~продалых~~ ~~справок~~

$f(N) = 46,5N - N^2 = -N^2 + 46,5N$

максимум в вершине (параболы, ветви вниз)

$N_{\text{верш}} = \frac{46,5}{2} = 23,25 \Rightarrow$  ближайшее натуральное число - 23  
 (т.к. справки не могут быть дробными)

$N_{\text{max}} = 23$

$f(N_{\text{max}}) = -23^2 + 46,5 \cdot 23 = 540,5$  (то есть руб) - максимальная сумма, которую Степан

Ответ: 23 справки; 540,5 руб

N1

$$\left( \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{|x - 2|} \right) (x^2 - 2x + 2 + |x - 2|) \leq \sqrt{15 + 2x - x^2}$$

$$\text{ОДЗ: } x^2 - 2x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow |x - 2| \neq 0 \quad 15 + 2x - x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \in \mathbb{R}}{(x < 0)} \quad \underline{x \neq 2} \quad x^2 - 2x - 15 \leq 0$$

$$(x + 3)(x - 5) \leq 0$$

$$\Rightarrow x \in [-3; 5] \setminus \{2\}$$

$$\frac{(|x - 2| + x^2 - 2x + 2)^2}{(x^2 - 2x + 2)|x - 2|} \leq \sqrt{15 + 2x - x^2}$$

$$\frac{(|x - 2| + x^2 - 2x + 2)^4}{(x^2 - 2x + 2)^4 (x - 2)^2} \leq (15 + 2x - x^2)^2$$

$$(x^2 - 2x + 2)^4 (x - 2)^2$$

$$(15 + 2x - x^2) (x^2 - 2x + 2)^2 (x - 2)^2 \geq (|x - 2| + x^2 - 2x + 2)^4$$

$$(x + 3)(x - 5) \underbrace{(x^2 - 2x + 2)^2}_A \underbrace{(x - 2)^2}_B \geq \underbrace{(|x - 2| + x^2 - 2x + 2)^4}_A$$

$$(x + 3)(x - 5) A^2 B^2 \geq (B^2 + 2AB + A^2)(A^2 + 2AB + B^2)$$

$$\geq A^2 B^2 + 2AB^3 + B^4 +$$

Оценки  
осуществятся

N6.

п.к. Ксюша не будет играть, то игра сводится к тому, когда Ксюша включается в вероятность того, что когда Ксюша играет, то на основании будет Ваня и Вась, но они в любом случае идут Ксюше до 16<sup>го</sup>  $\Rightarrow$  игра сводится к численной вероятности того, что Ваня и Вась встретятся. На н-м ХОУ это можно изобразить так:

x - время прихода Вани на остановку

y - время прихода Вани на остановку

См. на рисунке



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 119048

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 3

№6 (продолж.)

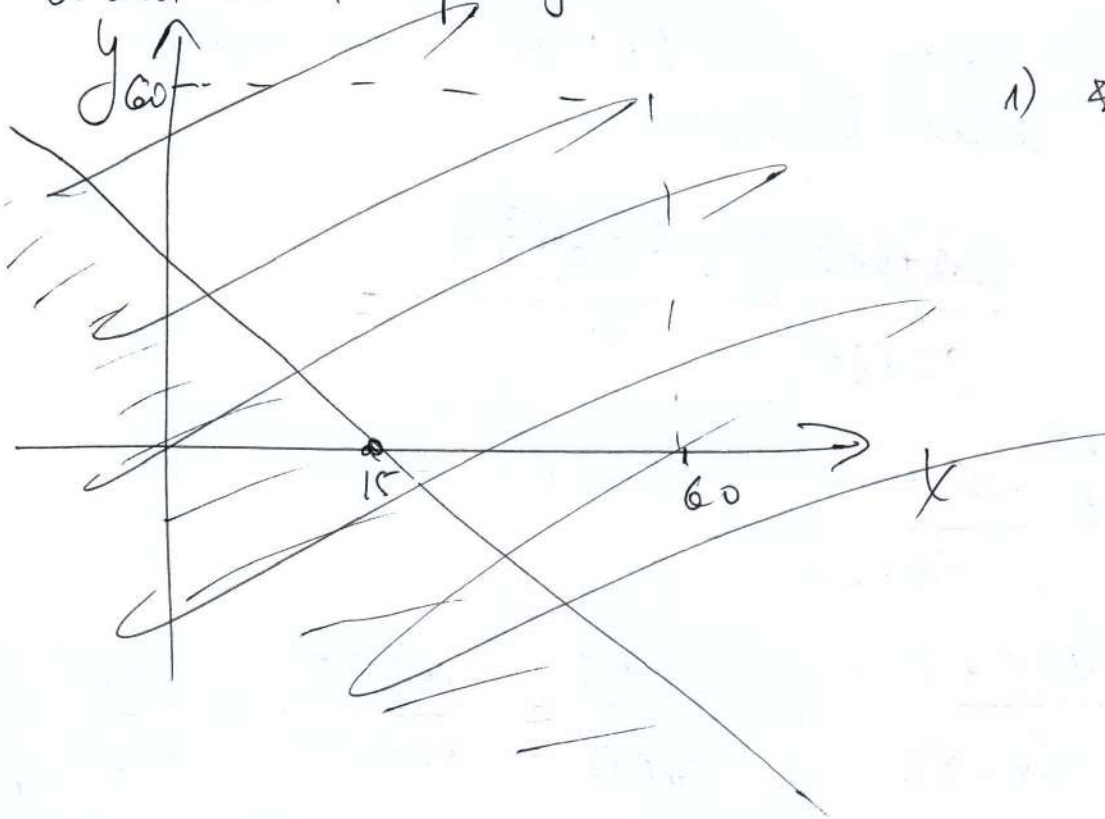
кто бы они встретились нужно чтобы:

1) либо  $x \leq y \leq x+15$  (Ваня приходит тогда, когда Вася его ждёт)

2) либо  $y \leq x \leq y+10$  (Ваня приходит тогда, когда Вася его ждёт)

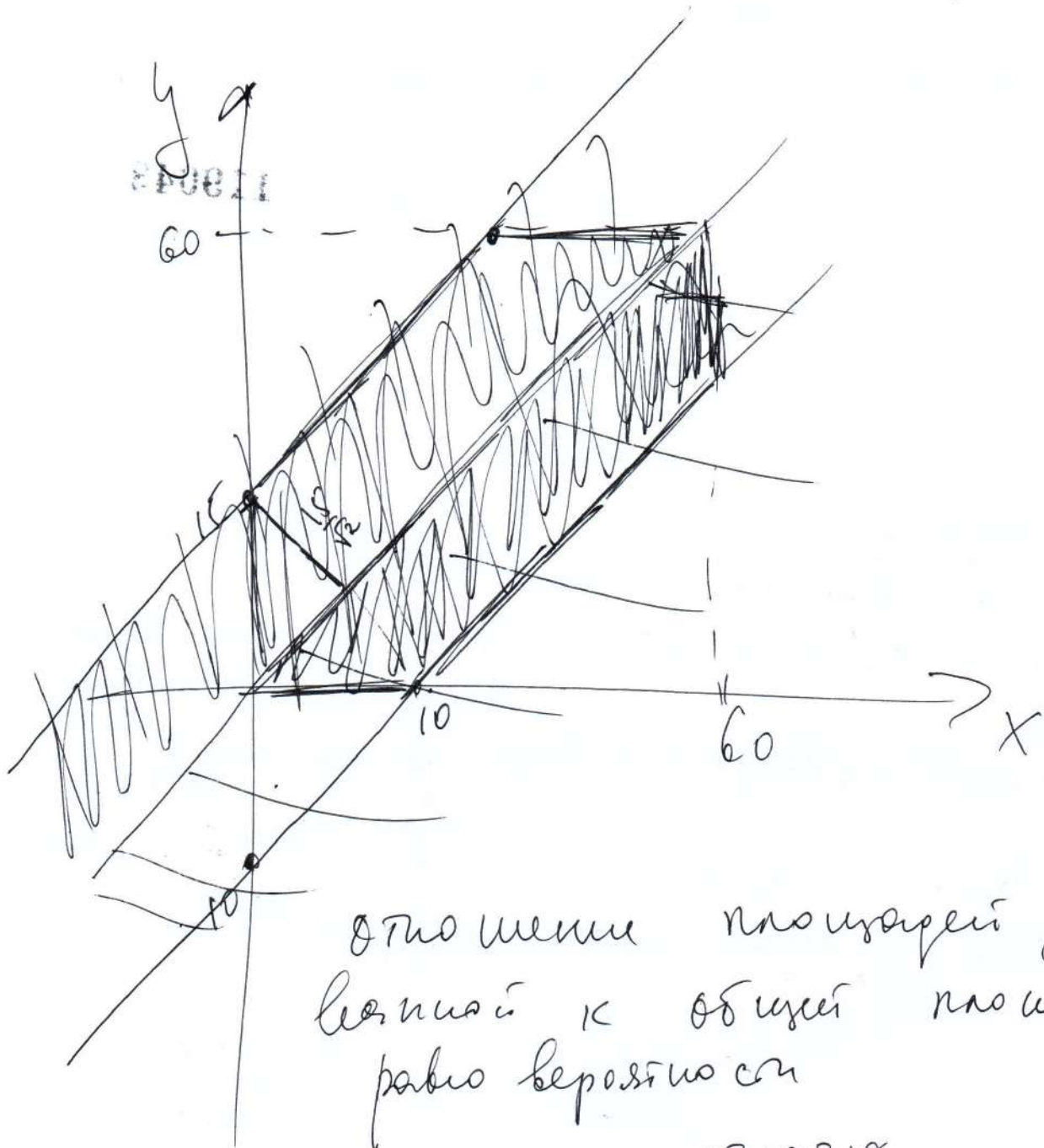
все возможные случаи

описываются прямоугольником  $60 \times 60$ .



$$1) \begin{cases} y \geq x \\ y \leq x+15 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y \leq x \\ y \geq x-10 \end{cases}$$



Отношение площадей заштрихованной к общей площади равно вероятности

$$P = \frac{\frac{45\sqrt{2} + 60\sqrt{2} \cdot 15}{2} + \frac{50\sqrt{2} + 60\sqrt{2} \cdot 10}{2}}{60 \times 60} =$$

$$= \frac{\frac{45+60}{2} \cdot 15 + 50+60 \cdot 5}{60 \cdot 60} =$$

$$= \frac{787,5 + 550}{60 \cdot 60} = \frac{1337,5}{3600} = \frac{13375}{36000} = \frac{2675}{7200} = \frac{535}{1440}$$

$$= \frac{107}{288}$$

Ответ:  $\frac{107}{288} \cdot \frac{1}{3}$  (красная пометка)

