

Шифр 119085¹¹⁹⁰⁸⁶
(заполняется ответственным
секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Максимова Дарья Константиновна

Город, № школы (образовательного учреждения) Лицей № 1580,
г. Москва

Регистрационный номер 9

Вариант задания 4

Дата проведения « 10 » февраля 2019 г.

Подпись участника Дарья

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
лет	15	10	05	лет	05					250

Шифр

119086

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 4

№2

Дано: $ABCD$ - трап. ($BC \parallel AD$), $\{K; N; M\} \in BC$; $BK = KN = NM = MC = 1$; $\{L; O; P; Q\} \in AD$;
 $AL = LO = PO = OQ = QD = 3$

Решение:

1) Прямые $BL \cap AK \rightarrow E$; $KN \cap LN \rightarrow F$; $KQ \cap LC \rightarrow S$

2) $\angle KAL = \angle BKA$ (н/л при $BC \parallel AD$ и сек. AK)
 $\angle BEK = \angle AEL$ (верт.)

$\Delta AEL \sim \Delta KEB$

3) Аналогично $\Delta LFO \sim \Delta NFK$; $\Delta LSQ \sim \Delta CSK$

5) Проведем высоты трапеции H_1H_2 , H_3H_4 , H_5H_6 , проходящие через точки E, F, S соответственно

6) H_1E - высота ΔBEK
 $\left. \begin{array}{l} EH_2 - \text{высота } \Delta AEL \\ \Delta AEL \sim \Delta KEB \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{EH_2}{EH_1} = \frac{AL}{KB} = \frac{3}{1}$

7) Аналогично для $\Delta LFO \sim \Delta NFK$; $\Delta LSQ \sim \Delta CSK$ и высот FH_3 ; FH_4 ; SH_5 ; SH_6 :

$$\frac{FH_4}{FH_3} = \frac{LO}{NK} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{SH_6}{SH_5} = \frac{LQ}{KC} = \frac{LO + OP + PQ}{KN + NM + MC} = \frac{3+3+3}{1+1+1} = \frac{9}{3} = \frac{3}{1}$$

8) $\left. \begin{array}{l} H_1H_2 \perp AD \\ H_3H_4 \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow H_1H_2 \parallel H_3H_4 \Rightarrow H_1H_2H_3H_4 - \text{парал-м (по опр.)}$
 $BC \parallel AD$
 $H_1H_2 = H_3H_4$

9) $H_1H_2 = H_3H_4$
 $\left. \begin{array}{l} \frac{EH_2}{EH_1} = \frac{3}{1} = \frac{FH_4}{FH_3} \\ H_1H_2 \parallel H_3H_4 \end{array} \right\} \Rightarrow EH_2 = FH_4 \Rightarrow EH_1H_3F - \text{парал-м (по пр.)} \Rightarrow EF \parallel BC$

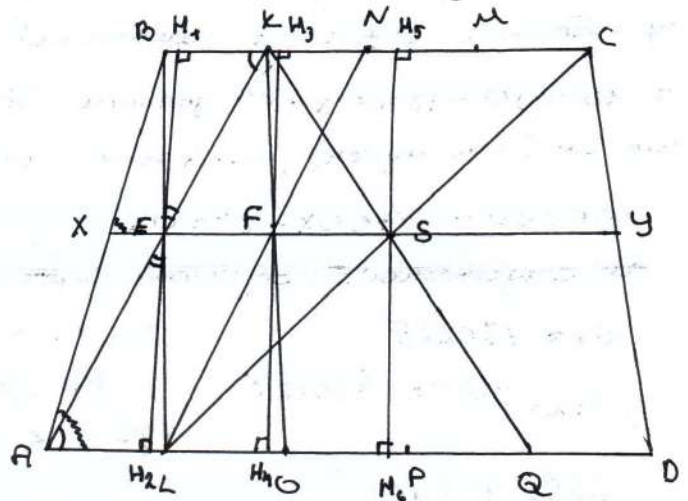
10) Аналогично для H_3H_4 ; H_5H_6 и точек F и S найдем $FS \parallel BC$

11) $\left. \begin{array}{l} FS \parallel BC \\ EF \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow \text{точки } F, S, E \text{ лежат на одной прямой, т.т.г.}$

12) Прямые $EF \cap AB \rightarrow X$; $EF \cap CD \rightarrow Y$

13) $\Delta AEL \sim \Delta KEB \Rightarrow \frac{AE}{KE} = \frac{AL}{BK} = \frac{3}{1} = \frac{EL}{EB} \Rightarrow \frac{EB}{BL} = \frac{1}{4}$

14) $\left. \begin{array}{l} XY \parallel BC \text{ (см. пункт 9)} \\ BC \parallel AD \end{array} \right\} \Rightarrow XY \parallel AD$



6) $\angle B X E = \angle X A L$ (сдвиг. при ~~XY~~ $XY \parallel AD$ и эк. AB) $\Rightarrow \triangle XBE \sim \triangle ABL$ (по двум уг.)
 $\angle ABL$ - общ. для $\triangle XBE$ и $\triangle ABL$

$$\frac{XE}{AL} = \frac{BE}{BL} = \frac{1}{4} \Rightarrow EX = \frac{AL}{4} = \frac{3}{4}$$

7) Аналогично $\triangle ELS \sim \triangle BLC$ (по двум уг.) $\Rightarrow \frac{ES}{BC} = \frac{LS}{LC}$, где $\frac{LS}{CS} = \frac{LQ}{CK}$ (пункт 3) $= \frac{3}{1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{LS}{LC} = \frac{3}{4} = \frac{ES}{BC} \Rightarrow ES = \frac{3 \cdot BC}{4} = \frac{3 \cdot 4}{4} = 3$$

$$\frac{SC}{LC} = \frac{1}{4}$$

$$\triangle SCY \sim \triangle LCD \text{ (по двум уг.)} \Rightarrow \frac{SY}{LD} = \frac{SC}{LC} = \frac{1}{4} \Rightarrow SY = \frac{LD}{4} = 3$$

$$8) XY = EX + ES + SY = \frac{3}{4} + 3 + 3 = 6 \frac{3}{4}$$

Ответ: $6 \frac{3}{4}$

~3

Пусть x - цена одного комплекта в рублях; Тогда необходимо приобрести $13700 - x$ комплектов, а заработаем $100000 - (13700 - x)x =$
 $= 100000 - 13700x - x^2$ должно быть максимально возможным натуральным
 числом (или нулем), т.к. это - остаток от общей суммы

$$100000 - 13700x - x^2 = 0$$

~~Для удобства подставим $x = 1000y$~~

$$D_1 = 470225$$

$$x_{1,2} = -685 \pm \sqrt{470225}$$

$$685^2 = 469025$$

$$690^2 = 476100$$

$x \in \mathbb{N} \Rightarrow$ нужно найти $\min \mathbb{N} x$, ~~выбрав~~

~~но зная что $x \in \mathbb{N}$ и $x < 13700$~~

$$\text{где } x < -685 + \sqrt{470225}$$

~4

$$(x+2)^2 + (a-3)^2 \leq 9 \quad (1)$$

$$6-a \geq (x+2)^2 \quad (2)$$

$$a+x \leq 2 \quad (3)$$

Решим систему графически. ~~Решим~~

(1) окружность с центром в точке $(-2; 3)$ и радиусом 3

(2) $a \leq -(x+2)^2 + 6$ - парабола; ветви вниз; вершина в точке $(-2; 6)$

$$(3) a \leq -x + 2$$

Решение см. в системе координат

Решение системы -

Найдем верхнюю границу значений

a : это - точка пересечения (то, у которой x меньше)

$$a = -(x+2)^2 + 6 \text{ и } a = 2 - x$$

$$-x^2 - 4x - 2 + 6 = 2 - x$$

$$-x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$D = 9 + 8 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} - \text{нужная нам величина}$$

а в этой точке примет значение

$$2 - \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} = \frac{4 + 3 + \sqrt{17}}{2} = \frac{7 + \sqrt{17}}{2}$$

Нижняя граница a - нижняя точка окружности ($a = 0$)

Ответ: $a \in [0; \frac{7 + \sqrt{17}}{2}]$; решения системы для каждого a см. в системе координат

✓6

Ребята пойдут в кино вместе, если:

① Все придут в одно и то же время

② Вася встретит Васю, а Ксюша еще будет в пути

~~③ Если придет не раньше 14:50, а Вася и Ксюша еще не придут в кино~~

Рассмотрим 1-й случай:

Поскольку Ксюша не будет никого ждать, они должны прийти в 1 секунду. В часе (с 14:00 до 15:00) 3600 секунд. Вероятность того, что один из них придет в какую-либо секунду равна $\frac{1}{3600}$, а все трое - $\left(\frac{1}{3600}\right)^3$

Рассмотрим 2-й случай:

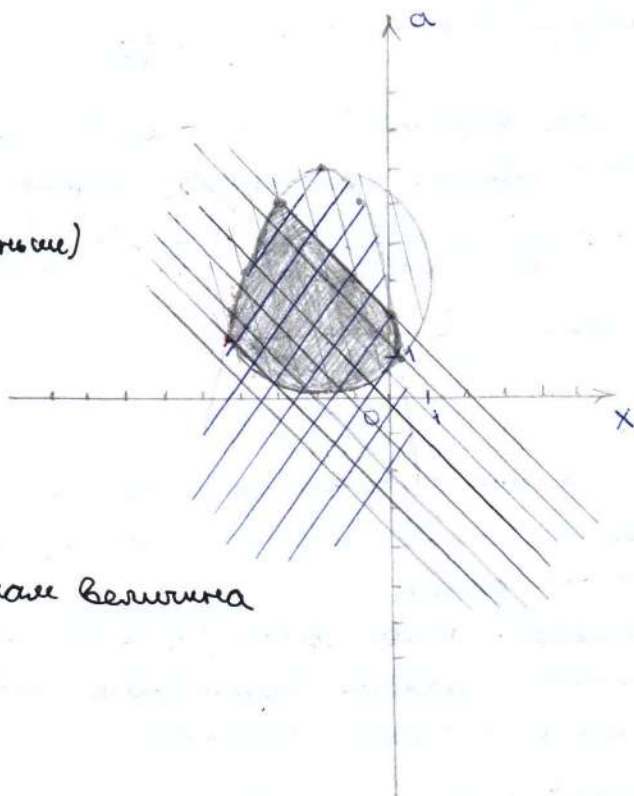
Он делится на 2 подслучая:

1) Вася придет раньше Васи. ~~Это случайное событие, вероятность этого равна 0,5. Тогда~~, вероятность того, что Вася придет в ближайшем 20 мин. равна $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ ~~А была вероятность двух пересечений~~

~~Вот~~ Тогда, чтобы ребята вместе поехали в кино, нужно, чтобы Ксюша пришла не раньше Васи. ~~Это равновероятное~~ Приход Васи /

Ксюши первым/ой - равнозначное события (случайное). Вероятности каждого из них равна $\frac{1}{2}$. В этом случае в кино ребята пойдут вместе с вероятностью $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

2) Вася придет раньше Васи и они встретятся. Вероятность равна $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ Вероятность того, что Ксюша в этом моменте еще



не придет равна $\frac{1}{2}$. Т.е. вероятность того, что 8 кино режиссеров пойдут вместе: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

Общая вероятность того, что режиссера пойдут в кино вместе, равна сумме найденных вероятностей.

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{3600}\right)^3 = \frac{3}{12} + \frac{1}{3600^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3600^3}$$

Ответ: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3600^3}$ 08

✓3

Пусть цена одного комплекта в магазинах равна x . Тогда кол-во комплектов равно $13700 - 1000x$. А остаток от возведенной суммы равен

$100 - (13700 - 1000x)x = 100 - 13700x + 1000x^2$. Найдем x , при котором данное выражение равно нулю.

$$1000x^2 - 13700x + 100 = 0$$

$$x^2 - 13,7x + 0,1 = 0$$

$$D = 184,29$$

$$x_{1,2} = \frac{-13,7 \pm \sqrt{184,29}}{2} \quad (x < 0 \text{ нам не подходит}) \Rightarrow x = \frac{-13,7 + \sqrt{184,29}}{2}$$

Но $1000x$ - натуральное число, т.к. кол-во ~~компл~~ комплектов целое и вычисляется с помощью ~~выражения~~ выражения $13700 - 1000x$

Таким образом искомая цена комплекта $\begin{cases} x < \frac{-13,7 + \sqrt{184,29}}{2} \\ x \in \mathbb{N} \end{cases}$

Тогда, $x = \frac{-13,7 + 20,542}{2} = 13,692$ тыс. руб

Кол-во ~~комплект~~ комплектов $13700 - 13692 = 8$

Ответ: 8 шт; 13692 руб 108