Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 119047
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Еськов Михаил Михайлович

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Иваново №33

Регистрационный номер 9 класс

Вариант задания 3

Дата проведения «___» ________________ 201__ г.

Подпись участника ________________

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
15	15	15	5	нет	нет					
15	15	15	~~5~~ 5	нет	нет					

Шифр 119047

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Всего: 50 баллов

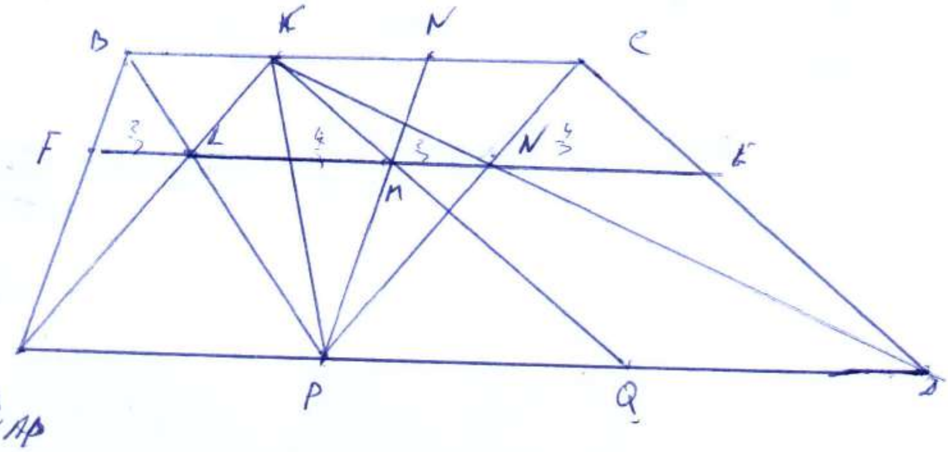
Беленова Ж.

50б

Власова

Вариант №________

№ 2



Пусть $BP \cap AK = L$

$KQ \cap PN = M$

$KD \cap PC = N$

$\triangle BKL \sim \triangle PLA$

т.к. $\angle BLK = \angle ALP$ – вертик.

$\angle KBL = \angle LPA$ т.к. $BK \parallel AP$

$\Downarrow$

$$\frac{KL}{LA} = \frac{BL}{LP} = \frac{BK}{AP} = \frac{1}{2}$$

Аналогично $\triangle KMN \sim \triangle QPM \Rightarrow \frac{KM}{MQ} = \frac{NM}{MP} = \frac{1}{2}$

$\triangle KNC \sim \triangle DNP \Rightarrow \frac{KN}{ND} = \frac{NC}{NP} = \frac{KC}{PD} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{KL}{LA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{KL}{KA} = \frac{1}{3}$, аналогично $\frac{KM}{KQ} = \frac{1}{3}$, $\frac{KN}{ND} = \frac{1}{3}$

$\triangle LKM \sim \triangle AKQ$ т.к. $\angle K$ общий $\frac{KL}{KA} = \frac{KM}{KQ} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{LM}{AQ} = \frac{1}{3}$

$\Downarrow$

$\angle KLM = \angle KAQ \Rightarrow LM \parallel AQ$

Аналогично $\triangle MKN \sim \triangle QKD \Rightarrow \frac{MN}{QD} = \frac{1}{3}$

$MN \parallel QD$

$MN \parallel DQ$
$ML \parallel AQ$
$\{A, Q, D\} \in AD$

$M \in LN \Rightarrow M, L, N$ лежат на одной прямой

$\{F, E\}$ пересечения пр LN с AB и CD соотв.

$\triangle FBL \sim \triangle ABP$ т.к. $FL \parallel AP \Rightarrow \frac{FL}{AP} = \frac{BL}{BP} = \frac{1}{3}$

$FL = \frac{AP}{3} = \frac{2}{3}$

$\frac{LM}{AQ} = \frac{2}{3}$; $LM = \frac{AQ \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$

$\triangle NCE \sim \triangle PCD$ т.к. $NE \parallel PD \Rightarrow \frac{NE}{PD} = \frac{CN}{NP} = \frac{1}{3}$

$NE = \frac{PD}{3} = \frac{4}{3}$

т.к. $\triangle MKN \sim \triangle QKD$ $\frac{MN}{QD} = \frac{KM}{KQ} = \frac{1}{3}$

$MN = \frac{QD}{3} = \frac{2}{3}$

$FE = FL + LM + MN + NE = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$

Ответ: $FE = 4$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 119047

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 3

№ 1

$$\left(\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{|x-2|}\right)\left(x^2-2x+2+|x-2|\right)\le\sqrt{15+2x-x^2}$$

$$\left(\frac{|x-2|}{x^2-2x+2}+\frac{(x^2-2x+2)}{|x-2|}+2\right)\le\sqrt{15+2x-x^2}$$

$\sqrt{15+2x-x^2}\to max$

$15+2x-x^2\to max$

парабола с ветвями вниз с максимумом в вершине

$x_в=\frac{-b}{2a}=1$

$y_в=15+2-1=16$

~~15~~ $15+2x-x^2\le 16$

$\sqrt{15+2x-x^2}\le 4$

$\frac{|x-2|}{(x^2-2x+2)}+\frac{(x^2-2x+2)}{|x-2|}\ge 2$ т.к. сумма двух неотрицательных* обратных чисел не может быть меньше ~~превосходить~~ 2,

* $|x-2|\ge 0$

$x^2-2x+2>0$ т.к. $D>0$ ($D=b^2-4ac$; $D=4-8<0$)

$$\frac{|x-2|}{x^2-2x+2}+\frac{(x^2-2x+2)}{|x-2|}\ge 2$$

+

$$\frac{|x-2|}{(x^2-2x+2)}+\frac{(x^2-2x+2)}{|x-2|}+2\ge 4$$

$$\sqrt{15+2x-x^2}\le 4$$

$$4\le\frac{|x-2|}{x^2-2x+2}+\frac{x^2-2x+2}{|x-2|}+2\le\sqrt{15+2x-x^2}\le 4$$

$$\frac{|x-2|}{x^2-2x+2}+\frac{x^2-2x+2}{|x-2|}+2=\sqrt{15+2x-x^2}=4$$

$\sqrt{15+2x-x^2} = 4$

$x = 1$ проверим для левой части, подходит.

$\frac{\cancel{\sqrt{15+2\cdot1}}}{1-2+2} + \frac{1\cdot 2+2}{\sqrt{1-2}} + 2\sqrt{15+2\cdot 1}$

$4 = 4$

Ответ: $x=4$

№3

Пусть Степан не продал x страусов, тогда $44-x$ он продал по средней цене за страуса $2,5+x$. Общая выручка составила $(44-x)(x+2,5)$

$(44-x)(x+2,5) \to max$

$-x^2 + 44x - 2,5x + 110 \to max$

$-x^2 + 41,5x + 110 \to max$

$\frown^{xmax}$

парабола с ветвями вниз с максимумом в вершине

$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{41,5}{2} = 20,75$

т.к. он не продал целое ~~число~~ число страусов, то 20,75 было неточно либо 20, либо 21

I 21 не продал, тогда продал 23 по цене 23,5. Общая выручка составила $23 \times 23,5 = 540,5$	II 20 не продал, тогда он продал 24 по цене 22,5. Общая выручка составила: $24 \times 22,5 = 540$

(+)

Заметим что ~~при~~ в I случае выручка больше чем во II, тогда максимум он получил 540,5 тыс. руб и продал 23 страуса

№4

$\begin{cases} (x-3)^2 + (a-2)^2 \le 9 \\ 4a - 3x \le 8 \\ 2a \le 13 - 3x \end{cases}$ представим решение уравнений в системе координат xOa

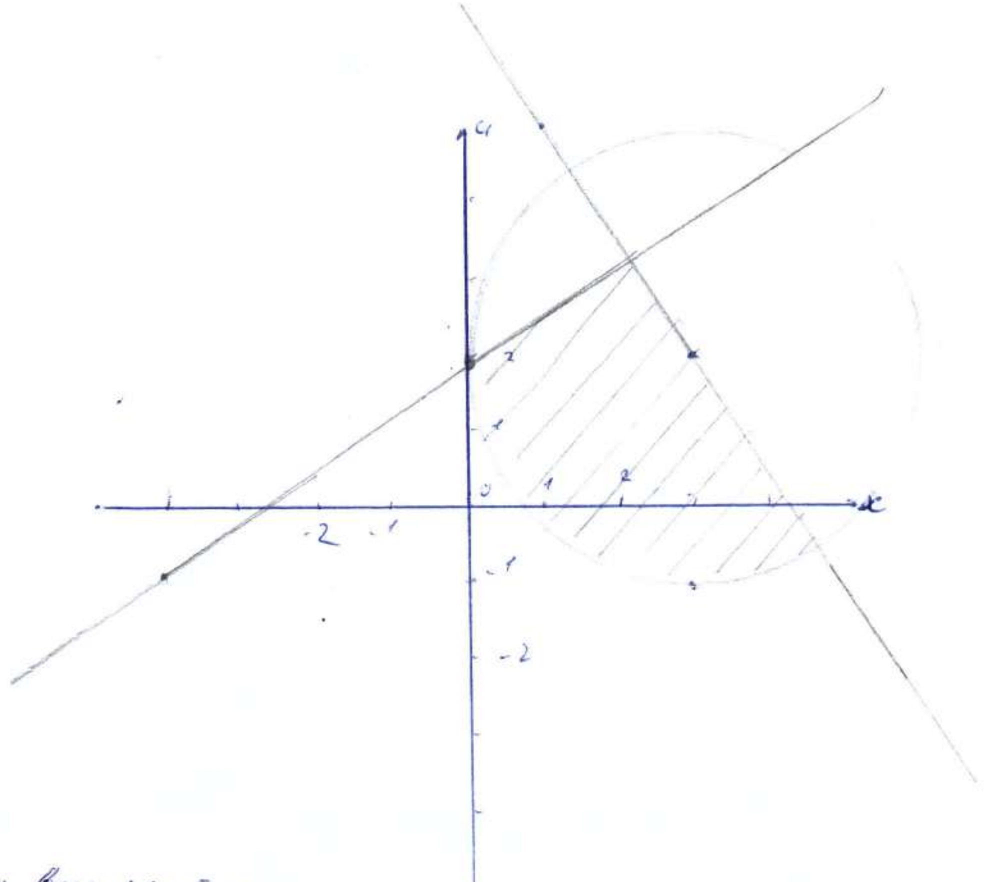
$(x-3)^2 + (a-2)^2 \le 9$ — круг с центром $(3;2)$ и радиусом 9

~~$4a-3x\le8$~~ граница $4a-3x \le 8$ есть прямая $4a-3a \le 8$ ~~которая~~

для $2a \le 13-3x$ прямая $2a = 13-3x$, которые делят плоскость на несколько частей, посмотрим, какие подходят

для $4a-3x \le 8$ подходит правая полуплость, для $2a \le 13-3x$ левая.

для круга плоскость внутри круга. пересечение всех нужных частей и есть решение системы



Так выглядит схематическое решение

Найдем пересечение прямых $4a - 3x = 8$ и $2a = 13 - 3x$

$$\begin{cases} 4a - 3x = 8 \\ 2a = 13 - 3x \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 4a = -8 \\ 4a = 26 - 6x \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 18 - 6x \\ a = \dfrac{13 - 3x}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ a = 3{,}5 \end{cases}$$

Заметим, что эта точка принадлежит кругу => выполняется все условия, при этом это максимальное a

Самая нижняя точка круга $(3; -1)$ тоже выполняет всем условиям и является минимальной

Ответ

5б

+

при $a \in [-1; 3{,}5]$ имеется хотя бы одно решение

2