Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1

Шифр 419002

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Ганжина Алина Иосифовна

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Ростов-на-Дону, МАОУ „Лицей №27"

Регистрационный номер 5973

Вариант задания 7

Дата проведения « 2 » марта 2019 г.

Подпись участника

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
+	+	∓	нет	−						
10	10	5		0						25

Шифр 419002

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 7

Власова О.В.

№2 +

Решение:

Пусть x (слонов) - количество слонов, решившее освежиться. Тогда $(37-x)$ (слонов) - количество слонов, нерешившие освежиться, $(37-x)\ м^3$ - количество кубометров воды, которое использовал каждый слон.

$(400-x(37-x))\ (м^3)$ - количество кубометров воды, оставшееся после купания.

$k\ (м^3)$ - количество кубометров воды, оставшееся после купания.

Получим:

$400-x(37-x)=k$

$400-37x+x^2-k=0$

$x^2-37x+400-k=0$

$D=(-37)^2-4\cdot(400-k)=1369-1600+4k=4k-231$.

т.к. k - целое число, то $4k>231$

минимальное возможное k при таких условиях равно 58.

решим ур-е для $k=58$

$400-x(37-x)=58$

$400-37x+x^2-58=0$

$x^2-37x+342=0$.

$D=(-37)^2-4\cdot342=1369-1368=1$

$x_1=\frac{37+\sqrt{1}}{2}=\frac{37+1}{2}=\frac{38}{2}=19$

$x_2=\frac{37-\sqrt{1}}{2}=\frac{37-1}{2}=\frac{36}{2}=18$.

Наибольшее количество слонов, которое может участвовать в купании при таких условиях, равно 19.
Объём воды, который остался в бассейне, равен 58 $м^3$
Объём воды, который был израсходован, равен 342 $м^3$
($400 м^3 - 58 м^3 = 342 м^3$).

Ответ: $58 м^3$; $342 м^3$; 19 слонов

№3.

$$\begin{cases}(3-x)\cdot|x+1|=y\\ y-6=a\cdot(x-3)\end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases}y=(3-x)|x+1|\\ y=a(x-3)+6\end{cases}$$

$$(3-x)|x+1|=a(x-3)+6 \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(3-x)(x+1)=a(x-3)+6\\ x+1\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}(x-3)(x+1)=a(x-3)+6\\ x+1<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}(3-x)(x+1)=a(x-3)+6\\ x+1\geq 0\end{cases} \qquad \begin{cases}(x-3)(x+1)=a(x-3)+6\\ x+1<0\end{cases}$$

$(3-x)(x+1)+a(3-x)-6=0$ $\quad x+1\geq 0$

$(3-x)(x+1+a)-6=0$ $\quad x\geq -1$.

$3x+3+3a-x^2-x-xa-6=0$

$-x^2+2x-xa+3a-3=0 \,|\cdot(-1)$

$x^2-2x+xa-3a+3=0$

$x^2+x(a-2)+3(1-a)=0$

$D=(a-2)^2-4\cdot 3(1-a)=(a-2)^2-12(1-a)$

если $D=0$, то система имеет 1 решение,
если $D>0$, то система имеет 2 решения

$(a-2)^2-12(1-a)=0$ $\qquad (a-2)^2-12(1-a)>0$

$a^2-4a+4-12+12a=0$ $\qquad a^2-4a+4-12+12a>0$

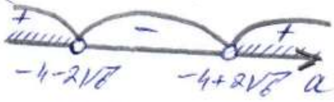
$a^2+8a-8=0$ $\qquad a^2+8a-8>0$

$D = 8^2 - 4 \cdot (-8) = 64 + 32 = 96.$

$a_1 = \frac{-8+\sqrt{96}}{2} = \frac{-8+\sqrt{16 \cdot 6}}{2} = \frac{-8+4\sqrt{6}}{2} = -4+2\sqrt{6}.$

$a_2 = \frac{-8-\sqrt{96}}{2} = \frac{-8-\sqrt{16 \cdot 6}}{2} = \frac{-8-4\sqrt{6}}{2} = -4-2\sqrt{6}.$

$(a+4-2\sqrt{6})(a+4+2\sqrt{6}) > 0$



$a \in (-\infty; -4-2\sqrt{6}) \cup$
$\cup (-4+2\sqrt{6}; +\infty).$

$(x-3)(x+1) = a(x-3)+6$ $\qquad x+1<0.$

$(x-3)(x+1) - a(x-3) - 6 = 0$ $\qquad x < -1.$

$(x-3)(x+1-a) - 6 = 0$

$x^2 + x - xa - 3x - 3 + 3a - 6 = 0.$

$x^2 - 2x - xa + 3a - 9 = 0.$

$x^2 - x(2+a) + 3(a-3) = 0.$

$D = (-(2+a))^2 - 4 \cdot 3(a-3) = (2+a)^2 - 12(a-3)$

если $D=0$, то система имеет 1 решение,
если $D>0$, то система имеет 2 решения.

$(2+a)^2 - 12(a-3) = 0$

$4 + 2a + a^2 - 12a + 36 = 0$

$a^2 - 10a + 40 = 0.$

$D = (-10)^2 - 4 \cdot 40 = 100 - 160 = -60.$

$D < 0 \Rightarrow$ нет решений.

$(2+a)^2 - 12(a-3) > 0$

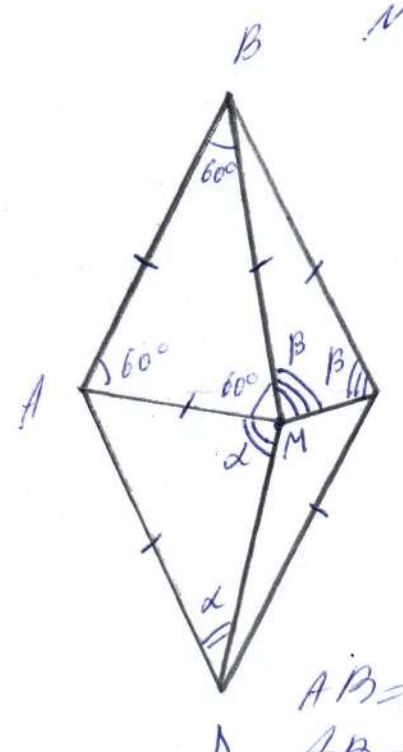
$a^2 - 10a + 40 > 0.$

$D<0$, $a>0 \Rightarrow a^2 - 10a + 40 > 0$ при $\forall a.$

Ответ. система имеет 1 решение при $a = -4+2\sqrt{6}$ и $a = -4-2\sqrt{6}$, или $x \geq -1$; 2 решения при $a \in (-\infty; -4-2\sqrt{6}) \cup (-4+2\sqrt{6}; +\infty)$ при $x \geq -1$; 2 решения при $\forall a$ при $x < -1.$

5б

№1



Дано: $ABCD$ ромб

$\triangle AMB$ р/с.

Найти: $\angle CMD$

Решение:

$ABCD$ ромб $\Rightarrow AB = BC = CD = AD$, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

$\triangle AMB$ р/с $\Rightarrow AB = BM = AM$, $\angle ABM = \angle BMA = \angle BAM = 60°$.

$\left.\begin{matrix} AB = BC = CD = AD \\ AB = BM = AM \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD = AM \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle AMD$ р/б. | +

$\triangle AMD$ р/б $\Rightarrow \angle AMD = \angle MDA = \alpha$.

т.к. сумма углов в $\triangle$ равна $180°$, то

$\angle MAD = 180° - 2\alpha$. +

$\left.\begin{matrix} AB = BC = CD = AD \\ AB = BM = AM \end{matrix}\right\} \Rightarrow BM = BC \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle MBC$ р/б | +

$\triangle MBC$ р/б $\Rightarrow \angle BMC = \angle BCM = \beta$.

т.к. сумма углов в $\triangle$ равна $180°$, то

$\angle MBC = 180° - 2\beta$ | +

$AD \parallel BC \Rightarrow \angle DAB + \angle ABC = 180°$ (сумма односторонних углов при параллельных прямых равна $180°$)

$\angle DAB + \angle ABC = 180°$

$\angle DAB = \angle BAM + \angle MAD = 60° + 180° - 2\alpha = 240° - 2\alpha$

$\angle ABC = \angle ABM + \angle MBC = 60° + 180° - 2\beta = 240° - 2\beta$

$240° - 2\alpha + 240° - 2\beta = 180°$

$480° - 2(\alpha + \beta) = 180°$

$2(\alpha + \beta) = 480° - 180°$

$2(\alpha + \beta) = 300° \mid :2$

$\alpha + \beta = 150°$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 419002

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 7

$\angle CMD = 360^\circ - \angle BMA - \angle AMD - \angle BMC = 360^\circ - 60^\circ - \alpha - \beta =$
$= 300^\circ - (\alpha + \beta)$.

$\alpha + \beta = 150^\circ$

$\angle CMD = 300^\circ - (\alpha + \beta) = 300^\circ - 150^\circ = 150^\circ$

Ответ. 150°.

№5

$$\frac{2x^2 - x + 7}{\sqrt{2x^2 - x + 3}} \le 7 - \sqrt{9 + \sqrt{16x^4 - 8x^2 + 1}}$$

Решение:

пусть $t = x^2$, тогда $16x^4 - 8x^2 + 1 = 16t^2 - 8t + 1$

$16t^2 - 8t + 1 = 0$

$D = 64 - 64 = 0$

$t = \frac{8}{32} = 0,25$

$16t^2 - 8t + 1 = 16(t - 0,25)^2 = 16(x^2 - 0,25)^2$

$$\frac{2x^2 - x + 7}{\sqrt{2x^2 - x + 3}} \le 7 - \sqrt{9 + \sqrt{16(x^2 - 0,25)^2}}$$

$$\frac{2x^2 - x + 7}{\sqrt{2x^2 - x + 3}} \le 7 - \sqrt{9 + 4(x^2 - 0,25)}$$

$$\frac{2x^2 - x + 7}{\sqrt{2x^2 - x + 3}} \le 7 - \sqrt{9 + 4x^2 - 1}$$

$$\frac{2x^2 - x + 7}{\sqrt{2x^2 - x + 3}} \le 7 - \sqrt{4x^2 + 8}$$

$$\frac{2x^2 - x + 7}{\sqrt{2x^2 - x + 3}} \le 7 - \sqrt{4(x^2 + 2)}$$

$$\frac{2x^2-x+7}{\sqrt{2x^2-x+3}} \le 7-2\sqrt{x^2+2}$$

$2x^2-x+7=0$

$D=1-56=-55$

$D<0,\ a>0 \Rightarrow 2x^2-x+7>0$ при $\forall x$

$2x^2-x+3=0$

$D=1-24=-23$

$D<0,\ a>0 \Rightarrow 2x^2-x+3>0$ при $\forall x$

$\Rightarrow \frac{2x^2-x+7}{\sqrt{2x^2-x+3}}>0$ при $\forall x$

$$\frac{2x^2-x+7}{\sqrt{2x^2-x+3}} \le 7-2\sqrt{x^2+2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \frac{(2x^2-x+7)^2}{2x^2-x+3} \le (7-2\sqrt{x^2+2})^2 \\ 2\sqrt{x^2+2} \le 7 \end{cases}$$

$$\frac{(2x^2-x+7)^2}{2x^2-x+3} \le 49-28\sqrt{x^2+2}+4(x^2+2)$$

$$\frac{(2x^2-x+7)^2}{2x^2-x+3} -49-4(x^2+2) \le -28\sqrt{x^2+2} \ \Big|\cdot(2x^2-x+3)$$

$(2x^2-x+7)^2-49(2x^2-x+3)-4(2x^2-x+3)(x^2+2)\le$

$\le -28(2x^2-x+3)\sqrt{x^2+2}$

$(2x^2-x+7)^2-(2x^2-x+3)(49+4(x^2+2))\le$

$\le -28(2x^2-x+3)\sqrt{x^2+2}$

$(2x^2-x+7)^2-(2x^2-x+3)(49+4x^2+8)\le$

$\le -28(2x^2-x+3)\sqrt{x^2+2}$

$(2x^2-x+7)^2=(2x^2-x+7)(2x^2-x+7)=$

$=4x^4-2x^3+14x^2-2x^3+x^2-7x+14x^2-7x+49=$

$=4x^4-4x^3+29x^2-14x+49$

$(2x^2-x+3)(49+4x^2+8)=(2x^2-x+3)(4x^2+57)=$

$=8x^4+114x^2-4x^3-57x+12x^2+171=$

$=8x^4-4x^3+126x^2-57x+171$

$4x^4-4x^3+29x^2-14x+49-(8x^4-4x^3+126x^2-57x+171) \le$
$\le -28(2x^2-x+3)\sqrt{x^2+2}$
$4x^4-4x^3+29x^2-14x+49-8x^4+4x^3-126x^2+57x-171 \le$
$\le -28(2x^2-x+3)\sqrt{x^2+2}$
$-4x^4-97x^2+43x-122 \le -28(2x^2-x+3)\sqrt{x^2+2} \quad |\cdot(-1)$
$4x^4+97x^2-43x+122 \ge 28(2x^2-x+3)\sqrt{x^2+2}$
т.к. $28(2x^2-x+3)\sqrt{x^2+2} >$ при $\forall x$
$4x^4+97x^2-43x+122>0$ при $\forall x$
$(4x^4+97x^2-43x+122)^2 \ge (28(2x^2-x+3)\sqrt{x^2+2})^2$
$(4x^4+97x^2-43x+122)^2 =$
$=(4x^4+97x^2-43x+122)(4x^4+97x^2-43x+122) =$
$=16x^8+388x^6-172x^5+488x^4+388x^6+9409x^4-$
$-4171x^3+11834x^2-172x^5-4171x^3+1849x^2-$
$-5246x+488x^4+11834x^2-5246x+13784=$
$=\underline{16x^8+776x^6-344x^5+10385x^4-8342x^3+}$
$\underline{+25517x^2-10492x+13784}$
$(28(2x^2-x+3)\sqrt{x^2+2})^2=784(2x^2-x+3)^2(x^2+2)=$
$=784(2x^2-x+3)(2x^2-x+3)(x^2+2)=$
$=784(4x^4-2x^3+6x^2-2x^3+x^2-3x+6x^2-3x+9)(x^2+2)=$
$=784(4x^4-4x^3+13x^2-6x+9)(x^2+2)=$
$=784(4x^6+8x^4-4x^5-8x^3+13x^4+26x^2-6x^3-$
$-12x+9x^2+18)=784(4x^6-4x^5+21x^4-14x^3+35x^2+$
$-12x+18)=\underline{3136x^6-3136x^5+16464x^4-}$
$\underline{-10976x^3+27440x^2+6506x^2-9408x+14012}$

?