Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1

Шифр 116045

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Ясафов Александр Владимирович

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Волжский, МОУ СШ №30

Регистрационный номер 6932

Вариант задания 9

Дата проведения «2» марта 2019 г.

Подпись участника

56 (пятьдесят шесть)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

116045

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	9	16	16	5	–					56

Шифр ______________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 9

№1 Пусть искомое число – x. Т.к оно имеет всего 2 простых делителя, то $x = a^k \cdot b^f$, где a, b - простые, а k, f - целые, больше 0.

Т.к всего делителей 10, то $10 = (k+1)(f+1)$. Т.к $f, k \geq 1$, то $f+1 \geq 2$ и $k+1 \geq 2$

$\Downarrow$

10 раскладывается как $2 \cdot 5$

$\Downarrow$

$k = 1 \quad f = 4$

Подбором находим, что $a = 2 \quad b = 3$

$x = 2 \cdot 3^4 = 162$

его делители: 2; 6; 18; 54; 162; 81; 27; 9; 3; 1

их сумма 363.

Ответ: 363.

12

№2 $\sin x - \sqrt{\cos y} - \sqrt{\cos y - \cos^2 x} \geq 1$

$\sqrt{A}$ - всегда больше 0 $\Rightarrow -\sqrt{\cos y} - \sqrt{\cos y - \cos^2 x} \leq 0$

$\sin x \leq 1$ (т.к синус не может быть больше 1)

$\Downarrow$

$\sin x - \sqrt{\cos y} - \sqrt{\cos y - \cos^2 x} \leq 1$

$\Downarrow$

$\sin x - \sqrt{\cos y} - \sqrt{\cos y - \cos^2 x} = 1$

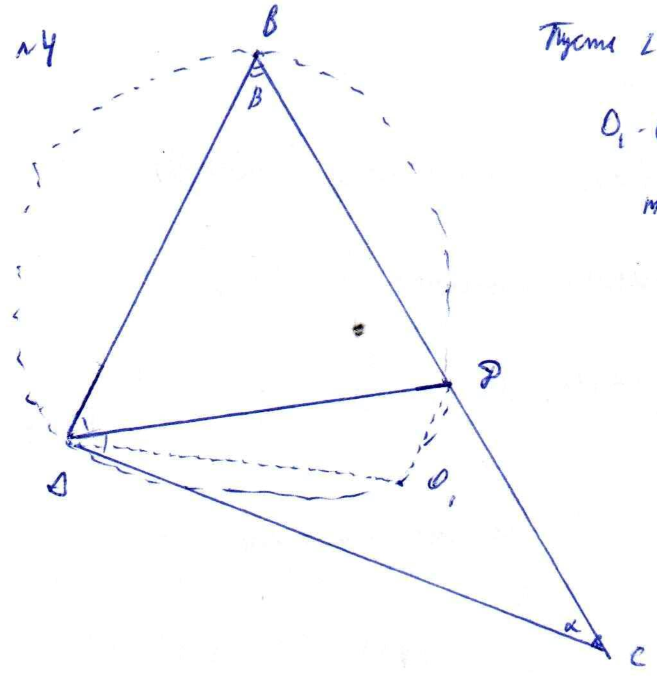
Причем $\left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sqrt{\cos y} = 0 \\ \sqrt{\cos y - \cos^2 x} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k & k \in Z \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n & n \in Z \end{array}\right.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad k \in Z$

$y = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in Z$

9

№4



Пусть $\angle B = \beta$; $\angle C = \alpha$

O_1 - центр вписаной окр. в $\triangle A\Phi C$

т.к O_1 - центр перес. биссектрис в $\triangle A\Phi C$, то $\angle AO_1\Phi = 90$

Т.к O_1 - лежит на окр. описаной около $A\Phi B$, то $\angle AB\Phi + \angle AO_1\Phi = 180$

$\Downarrow$

$\beta + \frac{\alpha}{2} + 90 = 180$

$\Downarrow$ $\beta + \frac{\alpha}{2} = 90$

По т. синусов

$2R_{AB\Phi} = \frac{A\Phi}{\sin\beta} \qquad 2R_{A\Phi C} = \frac{A\Phi}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

$\frac{R_{AB\Phi}}{R_{A\Phi C}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta} = \sqrt{3}$ (по условию)

$\Downarrow$ $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}\cdot\sin\beta$

Получаем систему

$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}\cdot\sin\beta \\ \beta = 90 - \frac{\alpha}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{3}\cdot\sin(90 - \frac{\alpha}{2})$

$\sin\alpha = \sqrt{3}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$

$2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$

$\cos\frac{\alpha}{2}\left(2\sin\frac{\alpha}{2} - \sqrt{3}\right) = 0$

$\cos\frac{\alpha}{2} = 0$ или $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Т.к α и β $\in (0; 180)$, то $\frac{\alpha}{2} = 90 \Rightarrow \alpha = 180$, что невозможно

$\Downarrow$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 60 \Rightarrow \alpha = 120$ +

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 116045

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 9

$a=b$

$$\sqrt[3]{6a\cdot\sin x+4a^2+2a}=\sqrt[3]{\cos 2x+2\sin x+11}$$

$$6a\sin x+4a^2+2a=\cos 2x+2\sin x+11$$

$$6a\cdot\sin x-\cos 2x-2\sin x=-4a^2-2a+11$$

$$6a\sin x-1+\sin^2 x-2\sin x+4a^2+2a-11=0$$

$\cos 2x=1-2\sin^2 x$

$\sin x=t$ $\quad t\in[-1;1]$

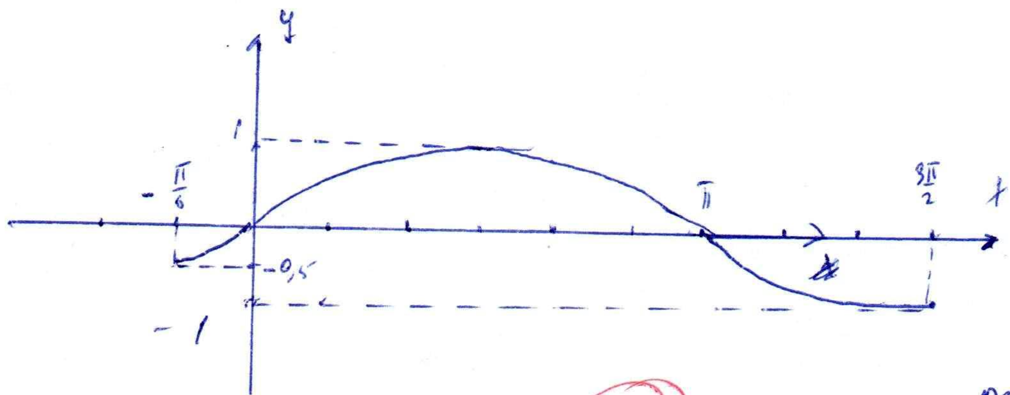
$$2t^2+t(6a-2)+4a^2+2a-12=0$$

$$D=(6a-2)^2-4(4a^2+2a-12)=20a^2-20a+52$$

$$t=\frac{-6a+2\pm\sqrt{20a^2-20a+52}}{2}=\frac{-3a+1\pm\sqrt{5a^2-5a+13}}{2}$$

~~Переход~~

Г-м график синуса



т.к корней на промежутке от $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$ 2, то

либо t_1 и $t_2\in[-1;-0{,}5]$, либо один из корней $t_1;t_2$ лежит в промежутке $[-0{,}5;1)$, а другой не лежит в промежутке $[-1;1]$, либо один из корней равен 1, а другой лежит в промежутке $[-1;-0{,}5)$.

5

I вар. $\begin{cases} -1 \le -3a+1+\sqrt{5a^2-5a+13} < 0{,}5 \\ -1 \le -3a+1-\sqrt{5a^2-5a+13} < 0{,}5 \end{cases}$

II вар $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -0{,}5 \le -3a+1+\sqrt{5a^2-5a+13} < 1 \\ -3a+1-\sqrt{5a^2-5a+13} < -1 \end{cases} \\ \begin{cases} -0{,}5 \le -3a+1-\sqrt{5a^2-5a+13} < 1 \\ -3a+1+\sqrt{5a^2+5a+13} > 1 \end{cases} \end{array}\right.$

III $\begin{cases} -3a+1+\sqrt{5a^2-5a+13} = 1 \\ 1 \le -3a+1-\sqrt{5a^2-5a+13} < -0{,}5 \end{cases}$

$\Downarrow$

$a \in [-0{,}5; 1]$

Ответ: $a \in [-0{,}5; 1]$

$\beta = 90 - \frac{\alpha}{2} = 30°$

$\angle BAC = 180 - \angle B - \angle C$ (т.к сумма углов $\Delta = 180°$)

$\Downarrow$

$\angle BAC = 180 - 120 - 30 = 30°$

$\Downarrow$

ABC — равнобедренный ($BC = CA = 2$)

+.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 120 = \sqrt{3}$

$S_{AB\Phi} = \frac{1}{2} h \cdot B\Phi \quad S_{AC\Phi} = \frac{1}{2} h \cdot \Phi C$

5 т.к у треугольников равные высоты, то $\frac{S_{AB\Phi}}{S_{AC\Phi}} = \frac{B\Phi}{\Phi C}$

по т. синусов

6

$2R_{AB\Phi} = \frac{\Phi B}{\sin \angle \frac{A}{2}} \qquad 2R_{A\Phi C} = \frac{\Phi C}{\sin \angle \frac{A}{2}} \Rightarrow \frac{B\Phi}{\Phi C} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{R_{AB\Phi}}{R_{A\Phi C}}$

2

+.

$\Downarrow$

$\frac{S_{AB\Phi}}{S_{AC\Phi}} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow S_{AB\Phi} = S_{ABC} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{3}{\sqrt{3}+1}$

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{3}+1}$ 16

№ 3

$f(x) = \log_2 \frac{\cos 4x + 2\sin^2 2x}{1 - \cos 5x} = \log_2 \frac{1 - 2\sin^2 2x + 2\sin^2 2x}{1 - \cos 5x} = \log_2 \frac{1}{1-\cos 5x} =$

$= \log_2 1 - \log_2(1 - \cos 5x) = -\log_2(1 - \cos 5x)$

Т.к области значений $(1 - \cos 5x)$ - $1 - \cos 5x \in (0; 2]$ (т.к $\cos 5x \in [-1; 1]$, но знаменатель не равен 0.)

$\Downarrow$

$f(x) = -\log_2(1 - \cos 5x) \in [-1; \infty)$ (т.к при $(1 - \cos 5x) \to 0$ $\log_2 \to -\infty$, а при $(1 - \cos 5x) = 2$ $\log_2 = 1$.)

т.к $f(x)$ - имеет обл. значений $[-1; \infty)$, то $f(f(x))$ - имеет области определения $[-1; \infty)$ $\quad f(f(x)) = -\log_2(1 - \cos f(x))$ где $f(x) \in [-1; \infty)$. Т.к cos имеет период

2π, то на промежутке от $[-1;\infty)$ от будет принимать все возможные значения $\Rightarrow$ $f(t(x))$ - имеет ту же область значений, что и $f(x)$,

$\Downarrow$

$f^{[2019]}$ имеет ту же область значений, что

$\Downarrow$

множество значений $f^{[2019]}(x) \in [-1;\infty)$

Ответ: $[-1;\infty)$

16

№5 Пусть $\sqrt[3]{6a\cdot\sin x + 4a^2 + 2a^2} = a$

$\sqrt[3]{\cos 2x + 2\cdot\sin x + 11^2} = b$

тогда, по условию

$a - b = b^3 - a^3$

$(a-b) + (a^3 - b^3) = 0$

$(a-b) + (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 0$

$(a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0$

$\Downarrow$

либо $a = b$, либо $a^2 + ab + b^2 + 1 = 0$

из н-ва о средних $a^2 + b^2 \geq 2ab$

$\Downarrow$

$a^2 + b^2 \geq ab$

$\Downarrow$

$a^2 + ab + b^2 \geq 0$

$\Downarrow$

$a^2 + ab + b^2 + 1 \geq 1$

$\Downarrow$

$a^2 + ab + b^2 + 1 \neq 0$

Значит $a = b$