Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

116030

Шифр ______________________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика.

(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Романенко Александр Владимирович

Город, № школы (образовательного учреждения) Волжский, МОУСШ №30

Регистрационный номер 6882

Вариант задания 8

Дата проведения «2» марта 2019 г.

Подпись участника

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

семьдесят пять (Пиб)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
12	12	16	~~18~~ 20	15	0					75 Пиб

116030

6030

Шифр ______________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 8

№1.

Ответ: 80

Рассмотрим, как получить число у которого 10 делителей. Заметим, что если число делилось на x и y, то у него так же будет делитель x·y. Однако, если у числа были ~~множители~~ делители x, y, z, причём $y=x^2$; $z=x^3$, то если домножим это число на простое число, не равное x, y, z, то кол-во делителей увеличатся в двое. Так как ищем 10 делителей, то пусть оно было вида $x^4 \cdot y$. Тогда делители будут:

$1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad y \quad yx \quad yx^2 \quad yx^3 \quad yx^4$ – 10 делителей,

так же заметим, что $y \neq 1$; $y \neq x$; $y \neq x^2$ $y \neq x^3$ $y \neq x^4$

Предположим, что $x=2$.

Сумма ~~будет~~ делителей ~~будет: делителей~~ будет:

$$1+2+4+8+16+2y+4y+8y+16y+y=186.$$

$$y(1+2+4+8+16)=155$$

$$y=5.$$

То есть само число получаем $x^4 \cdot y = 2^4 \cdot 5 = 80$.

№2.

$$\cos x - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 1.$$

Заметим, что $\cos x \leq 1$, $0 \leq \sqrt{\sin y} \leq 1$, $0 \leq \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \leq 1$,

~~то есть если $\cos x \neq 1$~~ то есть от $\cos x$ мы отнимаем ~~положительные~~ не отрицательные числа и получаем значение ≥ 1. Т.к. $\cos x \leq 1$, а то становится очевидно, что условие могло выполниться в одном случае, если $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

Перепишем условие, подставив значение $x = 2\pi k$

$$1 - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - 0} \geq 1.$$

т.е. $$-\sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y} \geq 0$$

$$-2\sqrt{\sin y} \geq 0.$$

т.к. $\sqrt{\sin y}$ – всегда больше или равен 0, то ~~на~~ условие выполняется только при $\sin y = 0$.

$$y = \pi n$$

Сформулируем ответ:

Ответ: $x = 2\pi k$, $k \in Z$;
$\cancel{x}\, y = \pi n$, $n \in Z$.

№3

~~Ответ: $-1 \leq y \leq 1$ ... $x \leq 0$.~~

Ответ: ~~...~~ ~~...~~ $y \in [-1; +\infty)$

Решение:

Преобразуем $f(x) = \log_2 \frac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{1 - \sin 3x} =$

$$= \log_2 \frac{\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin^2 x}{1 - \sin 3x} = \log_2 \frac{1}{1 - \sin 3x} =$$

$$= \log_2 1 - \log_2 (1 - \sin 3x) = 0 - \log_2 (1 - \sin 3x) =$$

$= -\log_2 (1 - \sin 3x)$. Найдем возможные значения $-\log_2 (1 - \sin 3x)$. ~~Максимальное зн~~ ~~т.к. $\sin 3x \in [-1; 1]$~~

то ~~рассмотрим $-\log_2 (1 - \sin 3x)$ при $\sin 3x = 1$.~~

~~$-\log_2 (1 - (-1)) = -\log_2 2 = -1.$~~

~~рассмотрим $-\log_2 (1 - \sin 3x)$ при $\sin 3x = 0$~~

~~$-\log_2 (1 - 0) = 0.$~~

~~Так же, заметим, что для $\sin 3x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ значения $-\log_2 (1 - \sin 3x)$ лежат в промежутке от до $(-1; 0)$. Так как~~

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 116030

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 8

Продолжение задачи № 5.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \begin{cases} \sin x_1 = a-1 \\ -\frac{1}{2} < \sin x_1 < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x_2 = 5-2a \\ \left[\begin{array}{l} \sin x_2 > 1 \\ \sin x_2 < -1 \end{array}\right. \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} \begin{cases} \sin x_2 = 5-2a \\ -1 < \sin x_2 < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x_1 = a-1 \\ \left[\begin{array}{l} \sin x_1 > 1 \\ \sin x_1 < -1 \end{array}\right. \end{cases} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \begin{cases} \sin x_1 = a-1 \\ \frac{1}{2} < a < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x_2 = 5-2a \\ \left[\begin{array}{l} a > 3 \\ a < 2 \end{array}\right. \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} \begin{cases} \sin x_2 = 5-2a \\ 2 < a < 3 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x_1 = a-1 \\ \left[\begin{array}{l} a > 2 \\ a < 0 \end{array}\right. \end{cases} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} a \in (\frac{1}{2}; 2) \\ \sin x_1 = a-1 \\ a \in (2; 3) \\ \sin x_2 = 5-2a \end{array}$$

~~Итак, сформулируем ответ.~~ Рассмотрим промежуток $(+\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2})$ для которого $\sin x \in (\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2})$ есть лишь одно значение x. Поэтому $\sin x_1$ и $\sin x_2$ должны одновременно подходить

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin x_1 = a-1 \\ -1 < \sin x_1 < -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x_2 = 5-2a \\ -1 < \sin x_2 < -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} \sin x_1 = a-1 \\ -1 < a-1 < -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x_2 = 5-2a \\ -1 < 5-2a < -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} \sin x_1 = a-1 \\ 0 < a < 0{,}5 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x_2 = 5-2a \\ \frac{11}{4} < a < 3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

Ответ: $a \in (\frac{1}{2}; 2)$

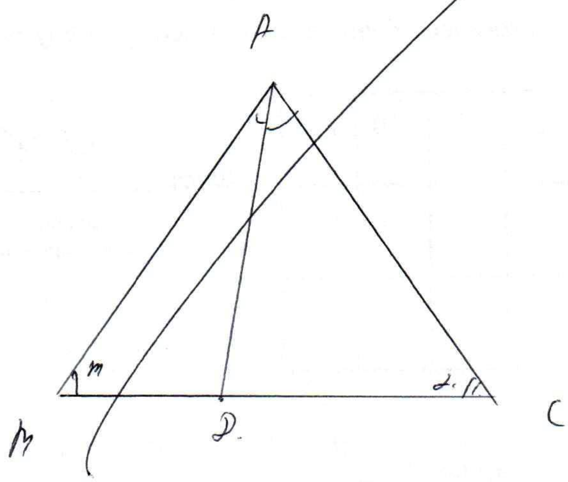
~~$x_1 = \arcsin(a-1) + 2\pi k, k \in Z$~~

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \arcsin(a-1) + 2\pi k, k \in Z \\ x_{1k} = -\arcsin(a-1) + \pi + 2\pi k, \end{array}\right.$$

$a \in (2; 3)$

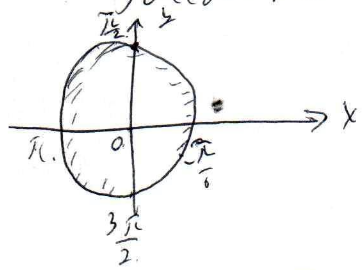
$$\left[\begin{array}{l} x_2 = \arcsin(5-2a) + 2\pi \\ x_2 = \pi - \arcsin(5-2a) + 2\pi \end{array}\right.$$

№ 4.



№ 5.

Рассмотрим промежуток $[-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}]$



Для промежутка $[-\frac{\pi}{6}; \frac{7}{6}\pi]$ — ~~при~~ каждому значению $\sin x$, будет два значения x,

=> должен подойти только один.

=> $\sin x \in [-\frac{1}{2}; 1]$ ~~при $\sin x = 1$ => 1 корень 2 общих~~

при $\sin x = 1$ — 1 корень.

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \sin x_1 = -a-1 \\ -\frac{1}{2} \leq \sin x_1 < 1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \sin x_2 = 5-2a \\ \left[\begin{array}{l} \sin x_2 > 1 \\ \sin x_2 < -1 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \sin x_2 = 5-2a \\ -\frac{1}{2} \leq \sin x_2 < 1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \sin x_1 = -a-1 \\ \left[\begin{array}{l} \sin x_1 > 1 \\ \sin x_2 < -1 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow$$

$a \in (2; \frac{11}{4}]$

$\sin x = 5-2a$.

$a \in (-2; -\frac{1}{2}]$

$\sin x = -a-1$.

Для промежутка $(\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2})$ ~~должны быть разные~~ для каждого $\sin x$ — одно решен,

=> $\sin x_1$ и $\sin x_2$ должны подходить.

=> $\sin x \in (-1; -\frac{1}{2})$ при $\sin x = -1$ — 1 решен => не подходит.

=> $\left\{\begin{array}{l} -1 < -a-1 < -\frac{1}{2} \\ -1 < 2a-1 < -\frac{1}{2} \end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{l} 0 < -a < \frac{1}{2} \\ 0 < 2a < \frac{1}{2} \end{array}\right.$ => $\varnothing$.

Сформулируем ответ.

Ответ: $a \in (2; \frac{11}{4}]$

$x_1 = \arcsin(5-2a) + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = -\arcsin(5-2a) + \pi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

уж 2 решения? из $[-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}]$

$a \in (-2; -\frac{1}{2}]$

$x_3 = \arcsin(-a-1) + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

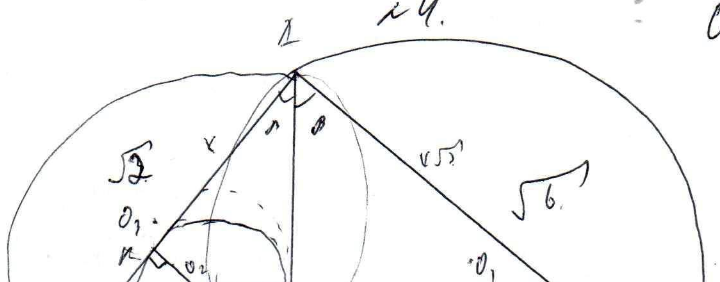
$x_4 = -\arcsin(-a-1) + \pi + 2\pi n.$

?

$a \in (-\infty; -2] \cup (-\frac{1}{2}; 2] \cup (\frac{11}{4}; +\infty)$

$\varnothing$?

№4.



Ответ: $\frac{(3-\sqrt{3})}{4}$.

по теор. sin.

$\frac{AC}{\sin 2} = 2R_1$ (R_2)

$\frac{AB}{\sin(180^\circ - 2)} = 2R_2$. ($R_1$)

$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$!

В то же время. (т.к. $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{3}$!)

$\sin 2m = \sqrt{3} \cdot \sin\alpha$.

также 2β?

$90 + \cancel{2R}$

$\Leftarrow$

$\frac{2R_1}{2R_2} = \frac{AB}{AC}$.

т.к. $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{3}$, $\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{AC}$, $AC = \sqrt{2}$ по усл.

$\Rightarrow AB = \sqrt{6}$

$\frac{CD}{\sin m} = 2R_2$; $\frac{DB}{\sin m} = 2R_1$

$\frac{2R_1}{2R_2} = \frac{DB}{CD} = \sqrt{3}$; $DB = y\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\cancel{y + y\sqrt{3} = 2}$.

$\cancel{y = \sqrt{3} - 1}$.

$\cancel{\frac{DB}{\sin m} = \frac{DB}{\sin 2} = 2R_1}$

$\cancel{\frac{AC}{CD}}$ $\cancel{\frac{AB}{DB}}$

как вычислить?

$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot CD \cdot \sin\alpha = \cancel{\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}}$ $\frac{(3-\sqrt{3})}{4}$

$\cancel{=}$ $= \frac{1}{2} AC \cdot CD \cdot \sin\alpha$

~~значение $1-\sin 3x$ всегда лежит в промежутке~~
т.к. $\sin 3x \in [-1;1]$
~~[0;2]. V для прилож $1-\sin 3x \in [0;2]$~~

~~$\log_2(1-\sin 3x)$ = ... лежит в промежутке~~

~~Пусть $1-\sin 3x = b$, причем $b \in [0;2]$.~~

~~Значит $1 \le -\log_2 b \le 0$, т.к. b меньше и не равно основанию, но больше 0, то оно лежит в указанном промежутке~~

~~при $\sin 3x$~~

~~$\sin 3x \in [-1;1]$. Если $\sin 3x = -1$, то~~

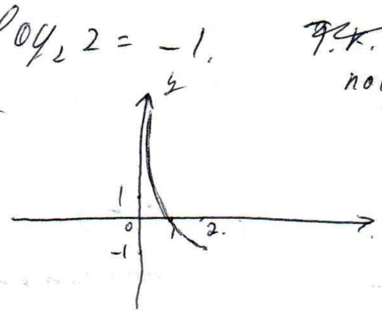
Рассмотрим область допустимых значений:

$-\log_2(1-\sin 3x)$; $1-\sin 3x \ge 0$. $\boxed{\sin 3x < 1}$.

~~Для значения $\sin 3x$~~ Значение $\sin 3x$ в нашей задаче лежит в промежутке $[-1;1)$. Тогда возможные значения $1-\sin 3x$ лежат в промежутке $(0;2]$. Пусть $1-\sin 3x = b$, $b \in (0;2]$.

Очевидно, что $-\log_2 b$ лежит в промежутке $[-1;+\infty)$. Докажем это. Минимальное значение $-\log_2(1-\sin 3x)$ будет при максимальном значении $1-\sin 3x$, т.е. $1-\sin 3x = 2$. $-\log_2 2 = -1$. ~~т.к. $\sin 3x$ из определения логарифма,~~ построим график $y_1 = -\log_2 b$.

~~Логориф~~



Можем сделать вывод, что $-\log_2(1-\sin 3x)$ всегда лежит в промежутке $[-1;+\infty)$.

~~Из~~ Так же заметим, что если взять функцию от функции, возможные значения $-\log_2(1-\sin 3x)$ — не изменятся, так как мы вместо x будем подставлять другое значение, ~~а~~ но ~~знак~~ возможное значение $\sin 3x$ — будет по-прежнему в промежутке $[-1;1)$ =>

~~$f \le f^{[2019]}(x)$~~ $f^{[2019]}(x) \in [-1;+\infty)$.

№5.

$$\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}-\sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}=\cos 2x+(8-6a)\sin x-4a^2+6a+9$$

Пусть $\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}=k$; $\sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}=l$.

$$k-l=\cos 2x+8\sin x-6a\sin x-4a^2+6a+9$$

$$k-l=l^3-k^3$$

то есть

$$(l-k)(k^2+kl+l^2)+l-k=0$$

~~вынов~~ $(l-k)(k^2+kl+l^2+1)=0$

или $l-k=0$ | или $k^2+kl+l^2+1=0$.

$(k-l)^2+kl+1=0$

$(k-l)^2+kl+1>0$, поэтому не рассматриваем данный множитель

$6a\cdot\sin x+4a^2-6a=\cos 2x+8\sin x+9$

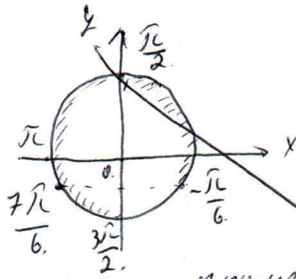
$6a\cdot\sin x+4a^2-6a=1-2\sin^2 x+8\cdot\sin x+9$

$2\sin^2 x+(6a-8)\sin x+4a^2-6a-10=0$

$D=(6a-8)^2-8(4a^2-6a-10)=$
$=36a^2-96a+64-32a^2+48a+80=$
$=4(a^2-12+36)=4(a-6)^2.$

$\sin x_1=\dfrac{(8-6a)+2(a-6)}{4}=-a-1$

$\sin x_2=\dfrac{(8-6a)-2(a-6)}{4}=5-2a$



Рассмотрим промежуток $[-\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{2}]$

для $\sin x\in[-\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6})$

~~при любом значении x, соответ. ему условию, будет~~ для любого значения $\sin x$ в данном промежутке, $\sin x$ — имеет два значения x, $\Rightarrow$ чтобы было 2 корня на промежутке

либо 1. $\sin x_1=\sin x_2$
$a-1=5-2a$
$3a=6$
$a=2$. т.е. $\sin x=2-1=1$ — не входит в промежуток, при $\sin x=1$ — одно решение $\Rightarrow$ не подходит.

либо 2. a имеет такое значение, что $\sin x_1$ или $\sin x_2$ — выходит за границы $[-1;1]$

$\sin x_1$

*. (рассмотрено на отдельном листе), см. продолжение на нём

~~$\Rightarrow$ на промежутке $[-\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6}]$ нет ровно 2 корня.~~

Рассмотрим $x\in(-\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6})$, то где $\sin x\in(-\frac{1}{2};1)$, причём для которого $\sin x$ в данном промежутке есть лишь одно решение x.

~~Поэтому~~ $\begin{cases}\sin x_1=a-1\\ -\frac{1}{2}<\sin x_1<1\end{cases}\Leftrightarrow\left\{-\frac{1}{2}<a-1<1\right.\Leftrightarrow\left\{\frac{1}{2}<a<2\right.$

$\begin{cases}\sin x_2=5-2a\\ -\frac{1}{2}<\sin x_2\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\left\{-\frac{1}{2}<5-2a<1\right.\Leftrightarrow\left\{1<a<\frac{11}{4}\right.$

$\Rightarrow 1<a<2$.
$x_1=\arcsin(a-1)$
$x_2=\arcsin(5-2a)$