Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 817708
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Новичкова Ирина Юрьевна

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Пенза, ГБНОУ ПО Губернский лицей, 11 класс

Регистрационный номер 11823

Вариант задания 10

Дата проведения «16» марта 2019 г.

Подпись участника

55 (пятьдесят пять) [illegible]

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12	16	0	15	0					55

Шифр 817708

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

817708

Вариант № 10

1

	υ станка	n (кол-во станков)	A (кол-во деталей)
I (до модерниз.)	$\frac{6480}{x}$	x	6480
II (после)	$\frac{11200}{x+3}$	$x+3$	11200

$6480 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$ $\quad 11200 = 2^6 \cdot 5^2 \cdot 7$

$$\begin{cases} \frac{6480}{x} \in \mathbb{N} \\ \frac{11200}{x+3} \in \mathbb{N} \\ \frac{11200}{x+3} > \frac{6480}{x} \end{cases}$$

1) пусть x – чётное, тогда $x+3$ – нечётное
рассмотрим все возможные значения $x+3$:

$$\left[\begin{array}{l} x+3=5 \\ x+3=7 \\ x+3=5^2=25 \\ x+3=5\cdot 7=35 \\ x+3=175 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ll} x=2 & 2^3\cdot 3^4\cdot 5 > 2^6\cdot 5\cdot 7 \Rightarrow \text{не м.б.} \\ x=4 & 2^2\cdot 3^4\cdot 5 > 2^6\cdot 5^2 \Rightarrow \text{не м.б.} \\ x=22 & \text{не м.б. т.к. } 6480 \not\vdots\, 11 \\ x=32 & \text{аналогично не м.б.} \\ x=172=4\cdot 43 & \text{не м.б.} \end{array}\right.$$

2) x – нечётное. рассмотрим все возможные значения $x+3$

$$\left[\begin{array}{l} x+3=2 \\ x+3=4 \\ x+3=8 \\ x+3=16 \\ x+3=32 \\ x+3=64 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ll} x=-1 & \text{не м.б.} \\ x=1 & 6480 > 2^4\cdot 5^2\cdot 7 \Rightarrow \text{не м.б.} \\ x=5 & 2^4\cdot 3^4 < 2^3\cdot 5^2\cdot 7 \Rightarrow \text{подходит} \\ x=13 & \text{не м.б. т.к. } 6480 \not\vdots\, 13 \\ x=29 & \text{аналогично не м.б.} \\ x=61 & \text{не м.б.} \end{array}\right.$$

2) $x=5 \Rightarrow \upsilon_I = \frac{6480}{5} = 6^4 = 36^2 = 1296$

Ответ: 1296 деталей в день.

12

2.

$4\cos x-\sqrt{\sin y}-\sqrt{\sin y-16\sin^2 x+12}\geq 2$

$4\cos x-2\geq\sqrt{\sin y}+\sqrt{\sin y-16\sin^2 x+12}$

воспользуемся методом Мажорант и найдем область определения для правой и левой частей ~~ур-я~~ нер-ва:

$\begin{cases}4\cos x-2\in[-6;2] \\ \sqrt{\sin y}+\sqrt{\sin y-16\sin^2x+12}\geq 0\Rightarrow\end{cases}\Rightarrow 4\cos x-2\in[0;2]\Rightarrow\cos x>0$

$\sin y\in[0;1]\Rightarrow\ \sin y-16\sin^2x+12\in[-16\sin^2x+12;-16\sin^2x+13]$

$16\sin^2x\in[12;13]$

$\sin^2x\in\left[\frac{3}{4};\frac{13}{16}\right]$

$\cos^2x=1-\sin^2x\in\left[\frac{3}{16};\frac{1}{4}\right]$

т.к. $\cos x>0$, то $\cos x\in\left[\frac{\sqrt3}{4};\frac{1}{2}\right]$

$4\cos x-2\in[\sqrt3-2;0]$ но $4\cos x-2\in[0;2]$

$\Rightarrow\ 4\cos x-2=0$

$\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z. \\ \sin y=0\ \Rightarrow y=\pi n,\ n\in Z.\end{cases}$

12

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$

$y=\pi n,\ n\in Z.$

3.

$f(x)=\log_2\frac{\cos 6x+2\sin^2 3x}{2-2\cos 3x}$ $\qquad -1\leq\cos x<1$

$\cos 6x=1-2\sin^2 3x\Rightarrow\ f(x)=\log_2\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-\cos 3x)}$

$f(x)=-(1+\log_2(1-\cos 3x))$

$\cos 3x\in[-1;1)\Rightarrow\log_2(1-\cos 3x)\in(-\infty;1]$

$\Rightarrow f(x)\in(-\infty;2]$ $\qquad f(x)\in[-2;+\infty)$

$f(f(x))=-(1+\log_2(1-\cos 3(1+\log_2(1-\cos 3x))))$

аналогично, значения $\cos\alpha\in[-1;1)\Rightarrow$

$f(f(x))\in[-2;+\infty)$

т.к. значения $\cos\alpha \in [-1;1)$, то множество значений $f^{[n]}(x)$ не меняется $\Rightarrow f^{[2019]}(x)\in[-2;+\infty)$

Ответ: $f^{[2019]}(x)\in[-2;+\infty)$ 16

5.

$$(\cos 2x+2\cos x+2a)^5-(6a\cos x-4a^2+11)^5=(6a-2)\cos x+2\sin^2 x-4a^2-2a$$

$$(2\cos^2 x-1+2\cos x+2a)^5-(6a\cos x-4a^2+11)^5=(6a\cos x-4a^2+11)-(2\cos^2 x-1+2\cos x+2$$

пусть $2\cos^2 x-1+2\cos x+2a=\alpha$

$6a\cos x-4a^2+11=\beta$ $\Rightarrow$

$$\alpha^5-\beta^5=\beta-\alpha$$

$$(\alpha-\beta)(\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\beta^3\alpha+\beta^4)=-(\alpha-\beta)$$

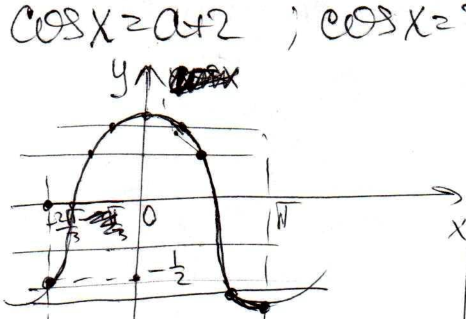
$\alpha=\beta$ или $\underbrace{\alpha^4}_{\ge 0}+\alpha\beta(\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{\ge 0})+\underbrace{\alpha^2\beta^2}_{\ge 0}+\underbrace{\beta^4}_{\ge 0}=-1$

не может быть

$$2\cos^2 x-1+2\cos x+2a=6a\cos x-4a^2+11$$

$$\cos^2 x+\cos x(1-3a)+2a^2+a-6=0$$

$\cos x=a+2$; $\cos x=2a-3$ $\qquad x\in\left[-\frac{2\pi}{3};\pi\right]$



нужно, чтобы было либо 2 решения от одного ур-ия и 0 от другого, либо по 1 нужн решению от каждого уравнения

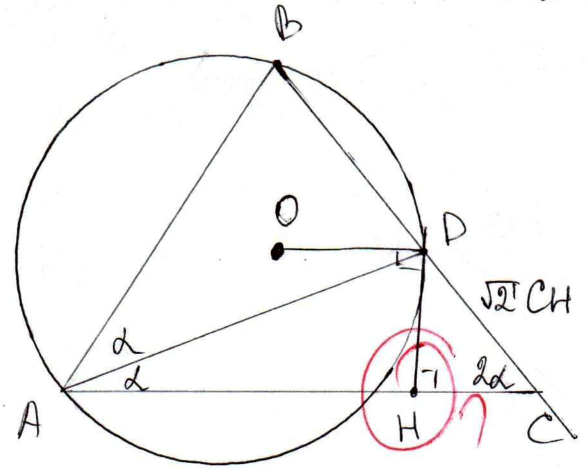
$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}1\ge a+2\ge -\frac{1}{2}\\ 1\ge 2a-3\ge -\frac{1}{2}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}>a+2>-1\\ -\frac{1}{2}>2a-3>-1\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}-1\ge a\ge -2{,}5\\ 2\ge a\ge \frac{5}{4}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}-2{,}5>a>-3\\ \frac{5}{4}>a>1\end{array}\right.\end{array}\right.$$ нет реш-ий.

15

Ответ: $a\in[-2{,}5;-1]$; $[1{,}25;2]$

решение?

4. Дано: $\triangle ABC$ – равнобедр. $AC=2$
AD – бис. DH – касат.
$H \in AC$ $CD=\sqrt{2}\,CH$
Найти: S_{ABC}



Решение:

св-во бис.: $\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BD} \Rightarrow \frac{2}{x}=\frac{\sqrt{2}\,CH}{x-\sqrt{2}\,CH} \Rightarrow x=\frac{2CH}{\sqrt{2}-CH}=AB$

$AB=x$

$\Rightarrow BD=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-CH}\cdot CH^2$

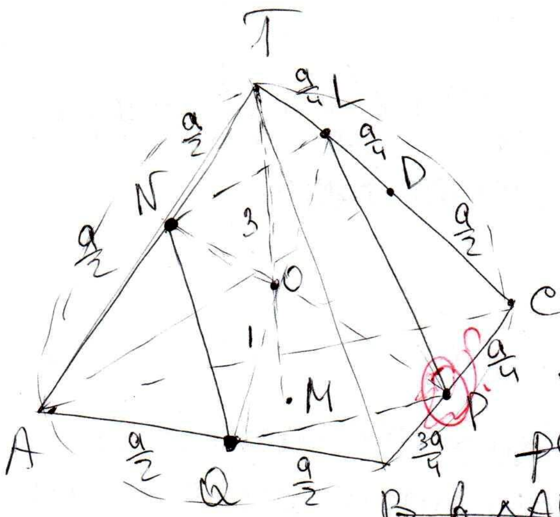
0

т.к. $OD \parallel AC \Rightarrow \triangle DHC$ – прямоуг $\Rightarrow \angle DCH=45^\circ$ (т.к. $DC=\sqrt{2}\,CH$) $\Rightarrow$
$\angle ABC=90^\circ \Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AB^2=\frac{AC^2}{4}=1$

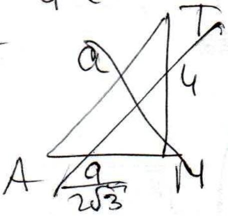
Ответ: $S_{ABC}=1$

6.

Дано: правильн. пирамида $TABC$
$H=4$ $TO:OM=3:1$
Найти: S_{NLPQ}

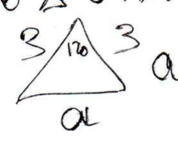


Решение:
пусть $AT=a$, тогда $TL=\frac{a}{4}$ (ср. линия)
~~рассмотрим $\triangle ATM$~~



$\cancel{B\ в\ \triangle ABC\ \frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3a}{2}\cdot 4}$

в $\triangle OTA$ по т. cos



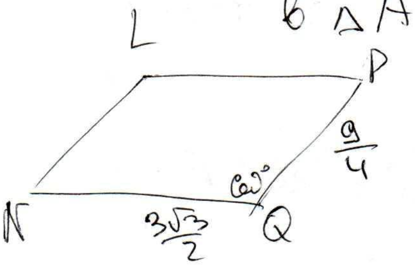
$a=3\sqrt{3}$

$\cancel{AM=4=\frac{a}{2\sqrt{3}}} \Rightarrow$

$\cancel{a^2=16+\frac{a^2}{12} \Rightarrow a=8\sqrt{\frac{3}{11}}}$

в $\triangle NTD$ $NL=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{16}-\frac{a^2}{2\cdot 4\cdot 2}}=\frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{9}{4}$

в $\triangle ANQ$ $NQ=\frac{a}{2}$ ($\angle NAQ=60^\circ$) $=\frac{3\sqrt{3}}{2}$



$NLPQ$ – пар-м

$S=ab\sin\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16}$

т.к. $\alpha=60^\circ$ (т.к. пирамида – правильная)

Ответ: $S_{NLPQ}=\frac{81}{16}$

0