Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

217641

Шифр ______

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Рыбкина Елизавета Геннадьевна

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Серпухов МБОУ СОШ №9

Регистрационный номер 3118

Вариант задания 2

Дата проведения «17» марта 2019 г.

Подпись участника

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана 217641

217641

шестьдесят (Пав)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
12	12	16	20.	0	0					60

Пав

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

641

Вариант № 2

№1 По условию изначально пиксель имел белый цвет => его номер 3. Проследим последовательность изменения номера (цвета) пикселя:

1) $3 \to 3\cdot 3 - 2 = 9 - 2 = 7$
2) $7 \to 3\cdot 7 - 2 = 21 - 2 = 19$
3) $19 \to |129 - 2\cdot 19| = 91$
4) $91 \to |129 - 2\cdot 91| = 53$
5) $53 \to |129 - 2\cdot 53| = 23$
6) $23 \to |129 - 2\cdot 23| = 83$
7) $83 \to |129 - 2\cdot 83| = 37$
8) $37 \to |129 - 2\cdot 37| = 55$
9) $55 \to |129 - 2\cdot 55| = 19$
10) $19 \to 91$
11) $91 \to 53$

. . . . .

Выписывая эту последовательность, замечаем, что она начинает повторяться. Всего есть 9 значений в этой программе.

Найдем цвет, в который будет окрашен белый пиксель спустя 2019 применений этой программы:

1) Т.к. 2 первых шага встречаются единожды, то $2019 - 2 = 2017$
2) Каждые семь шагов (не включая 2 первых шага) будут повторяться, значит можно найти количество этих повторений: $\frac{2017}{7} = \frac{288\cdot 7 + 1}{7}$.

Получается, что программа выполнит 288 повторений семи совпадающих шагов. ($288\cdot 7 = 2016$). Но по условию программа повторяется 2017 раз => после 288 повторений семи совпадающих шагов программе нужно будет сделать еще один шаг, а именно после выполнения 2018 шагов пиксель будет иметь номер 19 => при выполнении последнего 2019 шага ∈ пиксель будет иметь цвет: $19 \to |129 - 2\cdot 19| = 91$ => ~~ф~~ пиксель будет иметь фиолетовый цвет.

Ответ: фиолетовый − 91

№2

$$3\operatorname{tg}x - \sqrt[4]{\cos y} - \sqrt{\frac{9}{\cos^2 x} + \sqrt{\cos y} - 12} \geq \sqrt{3}$$

$$3\operatorname{tg}x - \sqrt[4]{\cos y} - \sqrt{3} \geq \sqrt{\frac{9}{\cos^2 x} + \sqrt{\cos y} - 12}$$

$$\begin{cases} 3\operatorname{tg}x - \sqrt[4]{\cos y} - \sqrt{3} \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \cos y \geq 0 \end{cases}$$

Т.к. $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, то $3\operatorname{tg}x - \sqrt[4]{\cos y} - \sqrt{3} \geq \sqrt{9 + 9\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{\cos y} -}$

$$3\operatorname{tg}x - \sqrt[4]{\cos y} - \sqrt{3} \geq \sqrt{9\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{\cos y} - 3}$$

Пусть $3\operatorname{tg}x = a$ $(a \in R)$, $\sqrt[4]{\cos y} = b$ $(b \in [0;1])$

$$a - b - \sqrt{3} \geq \sqrt{a^2 + b^2 - 3}$$

$$\cancel{a^2 + b^2} + 3 - 2ab - 2a\sqrt{3} + 2b\sqrt{3} \geq \cancel{a^2 + b^2} - 3$$

$$6 \geq 2ab + 2a\sqrt{3} - 2b\sqrt{3}$$

$$3 \geq ab + a\sqrt{3} - b\sqrt{3}$$

$$ab + a\sqrt{3} - b\sqrt{3} - 3 \leq 0$$

$$b(a - \sqrt{3}) + \sqrt{3}(a - \sqrt{3}) \leq 0$$

$$(a - \sqrt{3})(b + \sqrt{3}) \leq 0$$

Т.к. $b \in [0;1] \Rightarrow b \geq 0$; $\sqrt{3} \geq 0 \Rightarrow b + \sqrt{3} \geq 0$

Значит, что $a - \sqrt{3} \leq 0$; $a \leq \sqrt{3}$

Но $a - b - \sqrt{3} \geq 0 \Rightarrow a \geq b + \sqrt{3} \Rightarrow a \geq \sqrt{3}$.

Т.к. $a \leq \sqrt{3}$ и $a \geq \sqrt{3}$, то $a = \sqrt{3} \Rightarrow 3\operatorname{tg}x = \sqrt{3}$

$$\operatorname{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

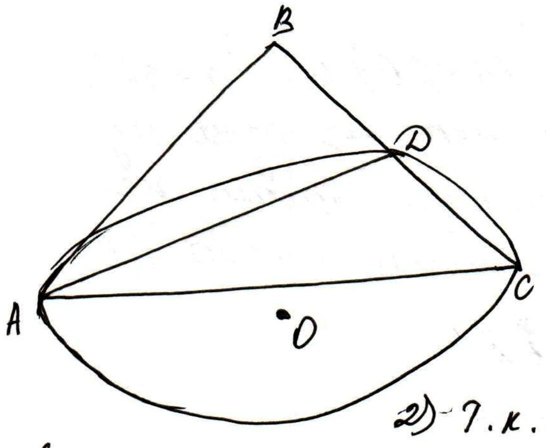
$$b + \sqrt{3} \leq a \Rightarrow \begin{cases} b + \sqrt{3} \leq \sqrt{3} \\ b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0 \to \sqrt[4]{\cos y} = 0$$

$$\cos y = 0$$

$$y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ $n, k \in Z$

№4



Дано: $\triangle ABC$, окр $(O; R)$ $R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $AB = 2$, $\angle A = 60^\circ$, AD – бисс.

Найти: r – ?

Решение:

1) Р.м. $\triangle ADC$, он является вписан... по теореме синусов: $\frac{DC}{\sin\angle DAC} = 2R$

$\angle DAC = \frac{1}{2}\angle A = 30^\circ \Rightarrow DC = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot R = R$

2) Т.к. AD – биссектрисса $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ (по свойству биссектрисы)

3) Пусть $\angle DCA = \alpha$, тогда $\angle ADC = 180^\circ - 30^\circ - \alpha = 150^\circ - \alpha$

4) $\angle DCA$ опирается на дугу $\smile AD$, $\angle DCA$ является вписанным $\Rightarrow \smile AD = 2\cdot\angle DCA = 2\alpha$

Аналогично, $\smile AC = 2\cdot(150^\circ - \alpha)$

5) $\angle B = \frac{\smile AC - \smile AD}{2}$ (по определению)

$\angle B = \frac{2(150^\circ - \alpha) - 2\alpha}{2} = 150 - 2\alpha$

6) Р.м. $\triangle ABC$, $\angle B = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha = 150^\circ - 2\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \angle ACD = 30^\circ$, $\angle ADC = 120^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$

7) Р.м. $\triangle ADC$, по теореме синусов: $\frac{AD}{\sin\angle ACD} = \frac{AC}{\sin\angle ADC} = 2R$

$AD = 2R\cdot\sin 30^\circ = R = DC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; $AC = 2R\sin 120^\circ = 2R\sin 60^\circ = R\sqrt{3} =$

8) $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$; $\frac{2}{4} = \frac{BD}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$; $BD = \frac{2\cdot 4\sqrt{3}}{3\cdot 4} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

9) $S_{\triangle ABD} = pr = \frac{1}{2} AB\cdot AD \sin\angle BAD$; $p = \frac{AB + BD + AD}{2} = \frac{2 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}}}{2}$

$p = \frac{2 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{2 + \frac{6}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$

$S_{ABD} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\sin 30^\circ = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\cdot 4}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\frac{2}{\sqrt{3}} = pr$; $r = \frac{2}{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}$

9) Т.к. $\triangle ABD$ – прямоугольный, то $r \overset{\text{док?}}{=} \frac{BD + AB - AD}{2} =$
$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} + 2 - \frac{4}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{2 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ответ: $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

N №3

1) $(a^2+2a) \vdots b$ 2) $a^2+ab-6b^2-4a-17b-5=0$

3) $(a+2b) \vdots 4$ 4) $a+6b$ - простое число

Т.к. $(a+6b)-(a+2b)=4b$, то числа $(a+2b)$ и $(a+6b)$ или одновременно делятся на 4 или нет $\Rightarrow$ одно из высказываний 3) и 4) ложно, т.к. простое число не делится на 4. Если 3) - ложно, то a - четное число (в противном случае четн + нечет = нечет $\not\vdots 4$

Рассмотрим 2) $a^2+ab-6b^2-4a-17b-5=0$

$a^2+(b-4)a-6b^2-17b-5=0$

$D=(5b+6)^2$, тогда

$a=\dfrac{4-b\pm(5b+6)}{2}$ $\left[\begin{array}{l} a_1=2b+5 \\ a_2=-3b-1 \Rightarrow a+3b=-1 \text{ - не подходит} \end{array}\right.$

$a, b \in N \Rightarrow a>0, b>0$

1) истинное подставим из 2) $a^2+2a=(2b+5)^2+2(2b+5)=$
$=4b^2+20b+25+4b+10=4b^2+24b+35 \vdots b \Rightarrow 35 \vdots b \Rightarrow b=$
$=1; 5; 7; 35$

① $b=1$, $a=7$ 1) $49+14=63 \vdots 1$ 2) верно; 3) $7+2=9 \not\vdots 4$ - ложно; 4) $7+6=13$ - истино $\Rightarrow a=7, b=1$ подходит

② $b=5$, $a=15$ 1) $225+30=255 \vdots 5$ - верно, 2) верно
3) $15+10=25 \not\vdots 4$ ложно 4) $15+30=45$ - ложно $\Rightarrow$
$\Rightarrow b=5, a=15$ не подходит

③ $b=7$, $a=19$ 1) $19^2+2\cdot19=19(19+2)=19\cdot21 \vdots 7$ - верно
2) верно
3) $19+14=20+13=33 \not\vdots 4$ ложь; 4) $19+42=61$ - верно $\Rightarrow$
$\Rightarrow a=19$, $b=7$ подходит

④ $b=35$, $a=75$, 1) $75^2+2\cdot75=75\cdot77 \not\vdots 35$ ложно
3) $75+70=145 \not\vdots 4$ - ложно $\Rightarrow a=75$, $b=35$ не подходит

Ответ: $a=7; b=1$ или $a=19$, $b=7$