Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

116025

Шифр ____________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Шайкин Кирилл Александрович

Город, № школы (образовательного учреждения) Волжский, МОУ СШ 30

Регистрационный номер 7175

Вариант задания 8

Дата проведения «2» 03 2019 г.

Подпись участника ____________

(шестьдесят)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

116025

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
12	12	16	15	5	0					60

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

6025

Вариант № 8

N 5. $\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}-\sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}=\cos 2x+8\sin x-6a\sin x-4a^2+6a+9$

Пусть $6a\sin x+4a^2-6a=m$

$\cos 2x+8\sin x+9=t$

$\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{t}=(\sqrt[3]{t})^3-(\sqrt[3]{m})^3$

$\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{t}=(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{m})(\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{mt}+\sqrt[3]{m^2})$

$(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{m})(\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{mt}+\sqrt[3]{m^2})+\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{m}=0$

$(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{m})(\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{mt}+\sqrt[3]{m^2}+1)=0$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{m}=0\\ \sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{mt}+\sqrt[3]{m^2}+1=0\end{array}\right.$$

1) $\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{m}=0$

$\sqrt[3]{t}=\sqrt[3]{m}$

$t=m$

$\cos 2x+8\sin x+9=6a\sin x+4a^2-6a$

$1-2\sin^2 x+8\sin x+9-6a\sin x+4a^2-6a=0$

$2\sin^2 x+\sin x(6a-8)+4a^2-6a-10=0$

$\sin x=p$

$2p^2+p(6a-8)+4a^2-6a-10=0$

$D=(6a-8)^2-2\cdot4(4a^2-6a-10)=36a^2-96a+64-32a^2+48a+80=4a^2-48a+1$

$D>0$

$4(a^2-12a+38)>0$

$a^2-12a+38>0$

$D=144-144=0$

$a=\frac{12}{2}=6$

$\xrightarrow[\quad 6\quad]{+\quad\circ\quad+}\Rightarrow a\neq6$

$p=\frac{8-6a\pm\sqrt{4(a^2-12a+38)}}{4a}$; $\sin x=\frac{4-3a\pm\sqrt{a^2-12a+38}}{2}$

$\sin x\in[-1;1]$ $\quad -1\leq\frac{4-3a+\sqrt{a^2-12a+38}}{2}\geq 1$

5

Ответ?

?

№2 $\cos x - \left(\sqrt{\sin y} + \sqrt{\sin y - \sin^2 x}\right) \geq 1$

$\sqrt{\sin y} \geq 0$

$\sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 0$

$\sqrt{\sin y} + \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 0$ $\qquad \sqrt{\sin y} + \sqrt{\sin y - \sin^2 x} = a$

$\cos x \in [-1; 1]$ $\qquad a \geq 0$

$\cos x - a \geq 1$

$\begin{cases} \cos x \geq 1 + a, \; a \geq 0 \\ \cos x \geq -1 \\ \cos x \leq 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ неравенство верно только при: $\begin{cases} a = 0 \\ \cancel{\cos x \geq 1} \\ \cos x = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sqrt{\sin y} + \sqrt{\sin y - \sin^2 x} = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = \cancel{\frac{\pi}{2}} + 2\pi k, \; k \in Z \\ \sqrt{\sin y} = 0 \\ \sqrt{\sin y - \sin^2 x} = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = 2\pi k, \; k \in Z \\ \begin{cases} \sin y \geq 0 \\ \sin y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin y - \sin^2 x \geq 0 \\ \sin y - \sin^2 x = 0 \end{cases} \end{cases}$

$\uparrow$

т.к. $\begin{cases} \sqrt{\sin y} \geq 0 \\ \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\sin y} = 0 \\ \sqrt{\sin y - \sin^2 x} = 0 \end{cases}$

$\sin y = 0$

$y = \pi n, n \in Z$

$\begin{cases} \sin y = \sin^2 x \\ x = 2\pi k, \; k \in Z \\ y = \pi n, \; n \in Z \end{cases}$

при любом $x = 2\pi k, k\in Z$ $\quad \sin x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 0$
$y = \pi n, n \in Z$ $\quad \sin y = 0 \Rightarrow \sin y = \sin^2 x = 0.$

$\Rightarrow$ решение: ~~$x \in 2\pi$~~ $x = 2\pi k, k \in Z$ v 12
$y = \pi n, n\in Z$

Ответ: $x \in$ множеству точек: $x = 2\pi k, k \in Z$
$y \in$ множеству точек; $y = \pi n, n \in Z$

N1. Ответ: 80. V 12

Заметим, что искомое число $\le \frac{186}{2}$; если сумма делителей входящих равна 186
в него помимо единицы входит нечетное число нечетных делителей
(т.к. если в сумме четное число нечетных слагаемых $\Rightarrow$ сумма четна)

Делители 80:
1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80 Простые: 2 и 5. $80 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5$
$1+2+4+5+8+\ldots+80 = 186$

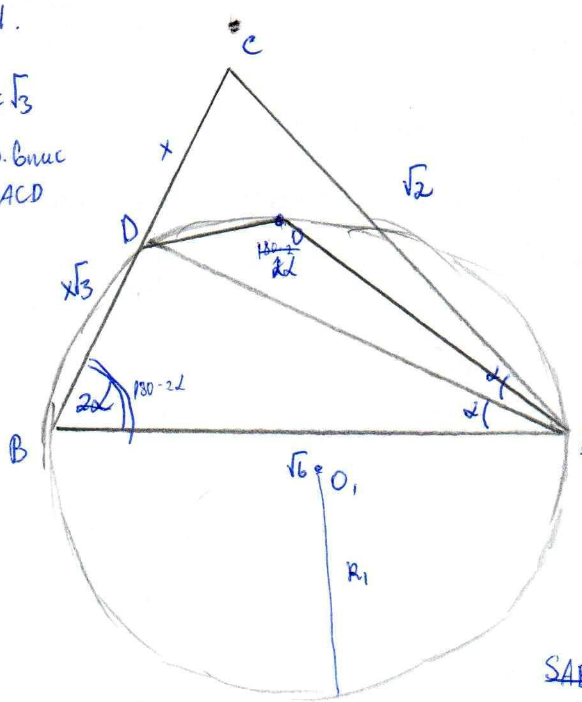
N4.

$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{3}$

O - центр. впис в $\triangle ACD$

$S_{\triangle ACD} = ?$

$AC = \sqrt{2}$



Р-ие $\triangle ABD$
по т. синусов:
$\frac{BD}{\sin\alpha} = 2R_1$

в $\triangle ACD$: по т. синусов: $\frac{CD}{\sin\alpha} = 2R_2$

$\frac{R_1}{R_2} = \frac{BD}{\sin\alpha} : \frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{BD}{CD} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow BD = CD\sqrt{3}$

по св-ву бис: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \sqrt{3}$ $\quad AB = \sqrt{3}\cdot AC = \sqrt{6}$ ✓

$S_{ACD} = \frac{AD\cdot AC\cdot \sin\alpha}{2}$ $\quad S_{ABD} = \frac{AB\cdot AD\cdot\sin\alpha}{2}$

$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC} = \sqrt{3}$

~~$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} =$~~

AODB - впис
$\angle AOD = 90 + \frac{1}{2}\angle A$
$\angle AOD = 2\alpha$
~~$\angle CD$~~
$\angle AOD + \angle ABD = 180^\circ$
$\angle ABD =$ ~~$180^\circ - 2\alpha$~~ $180-2\alpha$
$\angle DBA = 180^\circ - 3\alpha$
по т. синусов $\sin B = \sin 2\alpha$
$\frac{AD}{\sin B} = 2R_1$
$\frac{AD}{\sin 2\alpha} = 2R_1$
$AD = 2R_1 \sin 2\alpha$

$x(1+\sqrt{3}) = BC = \sqrt{2} = AC$ ✓
~~$BC = 2$~~ $\quad$ BC
$x = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$
$BC = \sqrt{2}$

$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} = S_{ACD}(1+\sqrt{3})$

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\sin 2\alpha}{2} = \sqrt{3}\sin 2\alpha = S_{ACD}(1+\sqrt{3})$

$S_{ACD} = \frac{\sqrt{3}\sin 2\alpha}{(1+\sqrt{3})}$

по т. cos:
$BC^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{6}\cos 2\alpha$
$\Rightarrow 2 = 2 + 6 - 2\cdot\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3}\cos 2\alpha$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{2}$
$4\sqrt{3}\cos 2\alpha = 6$ $\quad \cos 2\alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{1}{2}$
$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$

$S_{ACD} = \frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+1)}{(1+\sqrt{3})2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: ~~$\frac{\sqrt{3}}{2}$~~ $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{4}$ 15

№3. $f(x) = \log_2 \frac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{1-\sin 3x}$

~~$\sin 3x = +1$~~
~~$3x =$~~

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$f(x) = \log_2 \frac{1-2\sin^2 x + 2\sin^2 x}{1-\sin 3x}$

$f(x) = \log_2 \frac{1}{1-\sin 3x}$

$\sin 3x \in [-1; 1]$

~~min~~ $f(x)_{min}$ при $1-\sin 3x$ max $\Rightarrow \sin 3x = -1$ $f(x) = \log_2 \frac{1}{2} = -1$

$f(x)_{max}$ при $1-\sin 3x \to 0 \Rightarrow \sin 3x \to 1$ ~~$f(x) = \log$~~ $f(x) \in [-1; +\infty)$

$\Rightarrow$ область допустимых значений функции: $f(x) \in [-1; +\infty)$

при вызове функции $f(f(x))$ область значений $f(x)$ становится областью определения каждой следующей функции

При нечетном кол-ве вызовов (при нечетном n) область значений $f(f(\ldots f(x)))$ совпадает с областью значений $f(x) \Rightarrow$ область значений $\underbrace{f(f\ldots f}_{2019}(x) \in [-1; +\infty)$

Ответ: $f^{[2019]}(x) \in [-1; +\infty)$ V 16