Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 816209

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Иванова Алина Вячеславовна

Город, № школы (образовательного учреждения) Тамбов, МАОУ «Лицей №14 им. Заслуженного учителя РФ А.М. Кузьмина», 11

Регистрационный номер 4739

Вариант задания 6

Дата проведения «16» февраля 2019 г.

Подпись участника

Σ=56 (пятьдесят шесть) [illegible] –

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
12	3	16	20	5	0					56

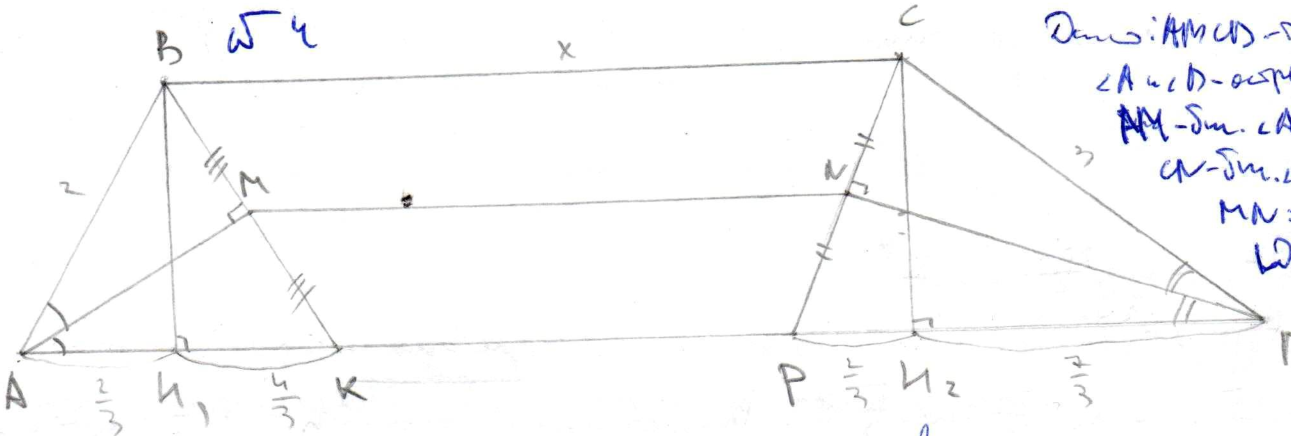
816209

Шифр ______________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

816209

Вариант № 6



Дано: ABCD – трапеция (BC∥AD; ∠A и ∠D – острые); AB=2; CD=3; AM – бис. ∠A; BM – бис. ∠B; CN – бис. ∠C; DN – бис. ∠D; MN=4; $S_{ABCD}=\frac{26\sqrt{2}}{3}$; ω(O; r) – впис. в ABD

Найти: r

Решение: 1) ABCD – трапеция, AD∥BC ⇒ ∠A+∠B = 180°, как внутр. углы при паралл. прям. и сек. AB ⇒ ∠MAB = ½·∠A (т.к. AM – бис. ∠A); ∠ABM = ½∠B (т.к. BM – бис. ∠B)

⇒ ∠MAB+∠MBA = ½·(∠A+∠B) = 90°, тогда в △ABM ∠M = 90°. Аналогично, ∠N = 90° (в △CND)

2) △AMB = △AMK (по общ. катету AM и остр. углу ∠BAM=∠KAM (т.к. AM – бис. ∠A)) ⇒ BM=MK ⇒ AM – медиана в △ABK, но также AM – бис и высота (∠AMB=90° по 1)) ⇒ по призн. △ABK – равноб. (AB=AK=2). Аналогично можно доказать, что CD=DP=3 (где т.K = BM∩AD; т.P = CN∩AD)

3) Построим $MH_1 ⊥ AD$ и $CH_2 ⊥ AD$ и обозначим BC = x; AD = y; h – высота ABCD ($BH_1=CH_2=h$)

4) BM=MK; CN=NP ⇒ в трапеции KBCP MN – средняя линия (по опр.) ⇒ по св-ву MN = $=\frac{BC+KP}{2}=\frac{BC+(AD-AK-DP)}{2}=\frac{x+y-2-3}{2}=\frac{x+y-5}{2}=4$ (по условию) ⇒ $x+y=13$

5) $S_{ABCD}=\frac{BC+AD}{2}\cdot h=\frac{x+y}{2}\cdot h=\frac{13}{2}\cdot h=\frac{26\sqrt{2}}{3}$ (по условию) ⇒ $h=\frac{4\sqrt{2}}{3}=BH_1=CH_2$ (20)

6) △ABH_1: по т. Пифагора $AH_1=\sqrt{AB^2-BH_1^2}=\sqrt{4-\frac{16\cdot2}{9}}=\frac{2}{3}$, тогда $H_1K=AK-AH_1=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

△CDH_2: по т. Пифагора $DH_2=\sqrt{CD^2-CH_2^2}=\sqrt{9-\frac{16\cdot2}{9}}=\frac{7}{3}$, тогда $H_2P=DP-DH_2=3-\frac{7}{3}=\frac{2}{3}$

7) $BC=H_1H_2=AD-AH_1-DH_2=AD-\frac{2}{3}-\frac{7}{3}$, т.е. $x=y-\frac{2}{3}-\frac{7}{3}=y-3$.

Используя полученные равенства из 4) и 6) сост. и решим систему уравнений

$$\begin{cases}x+y=13\\x=y-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y-3+y=13\\x=y-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y=16\\x=y-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=8\\x=5\end{cases}$$ т.е. BC=5; AD=8

8) △BH_1D: по т. Пифагора $BD=\sqrt{BH_1^2+DH_1^2}=\sqrt{BH_1^2+(AD-AH_1)^2}=\sqrt{\frac{16\cdot2}{9}+\left(8-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{16\cdot2}{9}+\frac{22^2}{9}}=$ $=\sqrt{\frac{516}{9}}=\frac{\sqrt{2^2\cdot3\cdot43}}{3}=\frac{2\sqrt{43\cdot3}}{3}$

9) $S_{ABD}=\frac{1}{2}\cdot BH_1\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot8=\frac{16\sqrt{2}}{3}$

10) $P_{ABD}=AB+AD+BD=2+8+\frac{2\sqrt{43\cdot3}}{3}=10+\frac{2\sqrt{43\cdot3}}{3}$, тогда $p_{ABD}=\frac{P_{ABD}}{2}=5+\frac{\sqrt{43\cdot3}}{3}$

11) Радиус впис. в △ окр. равен отношению площади △ к его полупериметру, т.е.

$r=\frac{S_{ABD}}{p}=\frac{16\sqrt{2}}{3}:\frac{15+\sqrt{43\cdot3}}{3}=\frac{16\sqrt{2}}{15+\sqrt{129}}$ Ответ: $\frac{16\sqrt{2}}{[illegible]}$

№1.

по теореме Чалшина $N = p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}$, где $p_1, p_2, \ldots p_k$ — различные простые числа, а $n_1, n_2, \ldots n_k$ — ~~натуральные~~ натуральные, имеет $P(N)=(n_1+1)(n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_k+1)$ делителей. По условию, число (обозначим его за x) имеет 6 делителей. $6=2\cdot 3$, т.е. $n_1+1=2, n_2+1=3$, тогда $n_1=1, n_2=2$. Тогда число x имеет вид $x=a\cdot b^2$, где a и b — простые числа. При этом множество ~~его~~ делителей числа x имеет вид: $\{1; a; b; ab; b^2; ab^2\}$. По условию $1+a+b+ab+b^2+ab^2=78$, т.е. $a+b+ab+b^2+ab^2=77$. Найдём a и b

1) $a=2; b=3$ $\quad a+b+ab+b^2+ab^2=2+3+6+9+2\cdot 9<77$ — не подх.

2) $a=3; b=2$ $\quad a+b+ab+b^2+a\cdot b^2=3+2+6+4+3\cdot 4<77$ — не подх.

3) $a=3; b=5$ $\quad 3+5+15+25+3\cdot 25>77$ — не подх.

4) $a=5; b=3$ $\quad 5+3+15+9+5\cdot 9=8+15+9+45=17+60=77 \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases}$, тогда

$x=5\cdot 3^2=45$ — искомое число.

Ответ: 45.

12

№2

$$\begin{cases} n\in\mathbb{N} \\ \cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\ldots+\cos\frac{2\pi n}{9}=\cos\frac{\pi}{9} \; * \\ \log_3^2 n+14<\log_3 9n^7 \; ** \end{cases}$$

$*$ $\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\ldots+\cos\frac{2\pi n}{9}=\cos\frac{\pi}{9}$ ~~ИЛ. Рассмотрим ~~выражение~~ левую часть рав. f(n) = cos 2π/9 + cos 4π/9 + … + cos 2πn/9 − cos π/9 = f(n) = 2 cos ((2π/9+4π/9)/2) · cos ((4π/9 − 2π/9)/2) + cos 6π/9 + … + cos 2πn/9 − cos π/9 = 2 cos 6π/9 · cos 2π/9 + cos 6π/9 + … + cos 2πn/9 − cos π/9 = 2 cos π/9 · cos π/9 + cos 6π/9 + … + cos 2πn/9 − cos π/9 = cos π/9 + cos 6π/9 + … + cos 2πn/9 − cos π/9 = cos 6π/9 + cos 8π/9 + … + cos 2πn/9 т.е. cos 6π/9 + … + cos 2πn/9 = 0 … cos 2π/3 + cos 8π/9 + cos~~

Рассмотрим левую часть равенства: $\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\ldots+\cos\frac{2\pi n}{9}=$

$=2\cdot\cos\frac{\frac{4\pi}{9}-\frac{2\pi}{9}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{4\pi}{9}+\frac{2\pi}{9}}{2}+2\cos\frac{\frac{8\pi-6\pi}{9}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{8\pi+6\pi}{9}}{2}+\ldots+2\cos\frac{2\pi(n-1)+2\pi n}{18}\cdot\cos\frac{2\pi n-(2\pi(n-1))}{18}$

$=2\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{6\pi}{18}+2\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{14\pi}{18}+\ldots+2\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi n+2\pi(n-1)}{18}=2\cos\frac{\pi}{9}\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+\ldots$

$\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+\ldots+\cos\frac{2\pi n+2\pi(n-1)}{18})$. Тогда $2\cos\frac{\pi}{9}\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+\ldots+\cos\frac{2\pi n+(2\pi(n-1))}{18})=\cos\frac{\pi}{9}$

$\cos\frac{\pi}{3}+\ldots+\cos\frac{2\pi n+(2\pi(n-1))}{18}=\frac{1}{2}$

$**$ $\log_3^2 n+14<\log_3 9n^7$

$\log_3^2 n-\log_3(3^2\cdot n^7)+14<0$

$\log_3^2 n-7\log_3 n-2+14<0$

$\log_3^2 n-7\log_3 n+12<0$

$D=b^2-4ac=49-4\cdot 12=1$

$\log_3 n=\frac{7-1}{2}=3$

$\log_3 n=\frac{7+1}{2}=4$

$(\log_3 n-3)(\log_3 n-4)<0$

по правилу равносильности:

$(n-3^3)(n-3^4)<0$

$+ \quad 3^3 \quad - \quad 3^4 \quad +$

$27<n<81$

?

3

№3.

$f(x)=\log_{0,5}\left(\frac{\sin x}{\sin x+15}\right)$. Преобразуем ф-цию: $f(x)=\log_{2^{-1}}\left(\frac{\sin x}{\sin x+15}\right)$;

$f(x)=\log_2\left(\frac{\sin x}{\sin x+15}\right)^{-1}$; $f(x)=\log_2\left(\frac{\sin x+15}{\sin x}\right)$; $f(x)=\log_2\left(1+\frac{15}{\sin x}\right)$ $\log_2(t)\nearrow$

~~Тогда, в зависимости от того, какое выражение будет подставлено, $f(g(x))=\log_2\left(1+\frac{15}{\sin(g(x))}\right)=\log_2\left(1+\frac{15}{\sin g(x)}\right)$, т.е. для любого выражения, для которого мы находим $f(g(x))$ будет верна оценка $-1\le\sin g(x)\le 1 \Leftrightarrow -15\le\frac{15}{\sin g(x)}\le 15 \Leftrightarrow -14\le 1+\frac{15}{\sin g(x)}\le 16$ при этих выраж. под логарифмом не может быть отрицательным~~

~~$0<\log_2\left(1+\frac{15}{\sin x}\right)\le 4$ т $\log_2(t)\nearrow$ на $\mathbb{R}$~~

~~$\Rightarrow f(x)\in$~~

16

Тогда, для любого $g(x)$ можно оценить: $-1\le\sin g(x)\le 1$, $\sin g(x)\ne 0$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\sin g(x)}\le -1\\ \frac{1}{\sin g(x)}\ge 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{15}{\sin g(x)}\le -15\\ \frac{15}{\sin g(x)}\ge 15\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1+\frac{15}{\sin g(x)}\le -14<0 \text{ (выраж. под лог. не может быть } <0)\\ 1+\frac{15}{\sin g(x)}\ge 16\end{array}\right.$$

$\log_2\left(1+\frac{15}{\sin x}\right)\ge 4$. При этом $1+\frac{15}{\sin x}\ne 0$ $\left(x\ne(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{15}\right)+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\right)$

Ответ: $[4;+\infty)$

№5

$(2\sin x+a^2+a)^3-(\cos 2x+3a\sin x+11)^3=12-2\sin^2x+(3a-2)\sin x-a^2-a$

$(2\sin x+a^2+a)^3-(1-2\sin^2x+3a\sin x+11)^3=12-2\sin^2x+3a\sin x-2\sin x-a^2-a$

$(2\sin x+a^2+a)^3+(2\sin^2x-3a\sin x-12)^3=12+3a\sin x-2\sin^2x-2\sin x-a^2-a$

Пусть $2\sin x+a^2+a=k$; $2\sin^2x-3a\sin x-12=p$, т.е.

$k^3+p^3=-k-p$

$(k+p)(k^2-kp+p^2)+(k+p)=0$

$(k+p)(k^2-kp+p^2+1)=0$

$$\left[\begin{array}{l} k+p=0 \ * \\ k^2 - kp + p^2 + 1 = 0 \end{array}\right.$$

~~$2\sin^2 x + \sin x(2-3a$~~

$* \ 2a\sin x + a^2 + a + 2\sin^2 x - 3a\sin x - 12 = 0$

$2\sin^2 x + \sin x(2-3a) + a^2 + a - 12 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (2-3a)^2 - 4\cdot 2(a^2+a-12) = 4 - 12a + 9a^2 - 8a^2 - 8a + 8\cdot 12 =$

$= a^2 - 20a + 100 = (a-10)^2 \ge 0$

(1) $a = 10 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{3a-2}{2} = \frac{30-2}{2} > 1 \Rightarrow x \in \varnothing$

(2) $a > 10 \Rightarrow \sin_1 x = \frac{3a-2+a-10}{2} = (2a-6) > 2\cdot 10 - 6 = 14 > 1 \Rightarrow x \in \varnothing$

~~(3) $a < 10 \Rightarrow$~~ $\sin x_2 = \frac{3a-2-a+10}{2} = \frac{2a+8}{2} = a+4 > 14 > 1 \Rightarrow x \in \varnothing$

(3) $a < 10 \Rightarrow \sin x = \frac{3a-2+a-10}{2} = 2a-6$ - есть корн., когда $\begin{cases} |2a-6| \le 1 \\ a > 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2{,}5 \le \ldots \\ a > 1\ldots \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$

$\sin_2 x = a+4$ - есть корн., когда $\begin{cases} |a+4| \le 1 \\ a > 10 \end{cases}$ аналогично $x \in \varnothing$

Таким обр., ур-ние имеет 1 корень, когда

$k^2 - kp + p^2 + 1 = 0$ имеет 1 корень

$(2a\sin x + a^2 + a)^2 + (2\sin^2 x - 3a\sin x - 12)^2 + 1 - (2a\sin x + a^2 + a)(2\sin^2 x - 3a\sin x - 12) = 0$

имеет 1 корень. При этом $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$,

~~когда $(2a\sin x + a^2 + a)$~~

?