Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1 Кенг!

Шифр 217667
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Рыжиков Кирилл Олегович

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, ГБОУ школа „лицей" 1580

Регистрационный номер 1475

Вариант задания 4

Дата проведения «17» Март 2019 г.

Подпись участника

68 (шестьдесят восемь)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12	4	20	0	20					68

217667

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 4

2. $tgx - \sqrt[4]{\sin y} - \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{\sin y} - 2} \geq 1$

$\frac{1}{\cos^2 x} = tg^2 x + 1$

$tgx = t$, $\sqrt[4]{\sin y} = a$, $1 \geq a \geq 0$

$t - a - \sqrt{t^2 + 1 + a^2 - 2} \geq 1$

$t - a - 1 \geq \sqrt{t^2 + a^2 - 1}$

$\begin{cases} t - a - 1 \geq 0 \ (2) \\ \cancel{t^2} + a^2 + 1 - 2ta - 2t + 2a \geq \cancel{t^2} + a^2 - 1 \ * \end{cases}$

(2) $t - a - 1 \geq 0.$

$t \geq a + 1$

$tg\, x \geq \sqrt[4]{\sin y} + 1$

при этом из * $tgx \leq 1$, $\sqrt[4]{\sin y} \geq 0 \ \forall y / \sin y \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt[4]{\sin y} + 1 \geq 1$ на ОДЗ $\Rightarrow$ единственное решение

$\begin{cases} tgx = 1 \\ \sqrt[4]{\sin y} + 1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k. \\ y = \pi n \end{cases}$

Ответ: ~~$(\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi k)$~~ $(\frac{\pi}{4} + \pi k; \pi n)$ $k, n \in \mathbb{Z}$.

$* \ \cancel{2 - 2}$

$2 - 2ta - 2t + 2a \geq 0$

$1 - ta - t + a \geq 0.$

$t + ta - a \leq 1.$

$t(1 + a) \leq 1 + a$

$t \leq \frac{1+a}{1+a}$

$(1 + a)$ из усл $1 \geq a \geq 0$ > 0

$\Rightarrow t \leq 1 \Rightarrow$

~~$\Rightarrow x \in [\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k]$~~

$x \in [\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi(k+1)]$?

12

лист 1

3\. 1) $a^2+6a+8 \vdots b$; 3) $(a+2b+2) \vdots 4$

$(a+4)(a+2) \vdots b$

$a=-3+\sqrt{1+kb}, k \in N$

т.к. $2b$ - четн, 2 - четн

$\vdots 4 \Rightarrow a+2b+2$ - четн

$\Rightarrow a$ - четное, когда 2 - истинно

2) $a^2+ab-6b^2-15b-9=0$. 4) $a+6b+2$ - простое

$a^2+ab-3(b+\frac{3}{2})(b+1)=0$.

Рассм утв. 2 и утв 4. из 2 $\Rightarrow$, что a - четное, но если a - четное, то $a+6b+2$ так же четное, как сумма 3х четных чисел $\Rightarrow$ не является простым.

~~Пусть a - четное, min a = 2 тогда утв 4 = 24 1) верно~~

Из того, что 3 и 4 взаимоискл, а три всегда верн из них $\Rightarrow$ 1 и 2 всегда варны

при этом из 2): $a^2+ab=\underbrace{6b^2+15b+9}_{\geq 30} \Rightarrow a>b$; пусть $b=1$ - min натуральное, тогда $a=5$, 1, 2, 4 - верно $\Rightarrow (5;1)$ подходит

Также заметим, что из 2) $a^2+ab=\underset{четн}{6b^2}+15b+\underset{неч}{9}$ Если a - четное, то b - нечетное

$\Rightarrow$ ~~в~~ b всегда нечетная, а из 1) $\underset{чет}{a^2}+\underset{чет}{6a}+8 \vdots b$ если a - нечетное, то b - нечетное.

из 1го: ~~$kb=(x+1)(x-1)$~~ т.к. $a \in N \Rightarrow 1+kb=x^2$ $kb=(x^2-1)=(x+1)(x-1)$, $a=-3+\sqrt{1+kb}$, $x \geq 3$

~~из~~ Если a нечетное, то из 4 $(a+2) \not\vdots 3 \Rightarrow a \neq \{1; 7; 13; \ldots; 1+k\cdot 6\}$

Если a четное, то из 3) $a+\underset{\vdots 4}{2(b+1)} \Rightarrow a \vdots 4 \Rightarrow a_{четн} \in \{4; 8; 12; 16 \ldots 4\cdot k\}$

см. продл на лист 6.

4\.

Дано:

ω описанн ADC $R=\sqrt{3}$

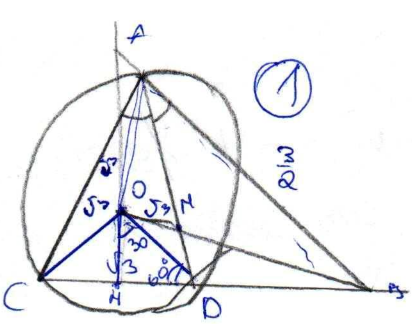
$\angle A=60°$

AD - бисс.

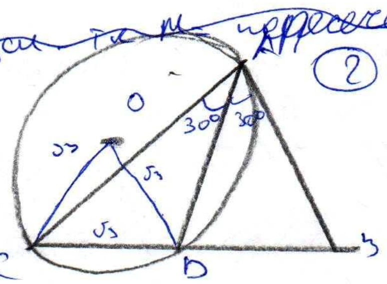
OM - ?

$AB=3$

$M=\{AD\}\cap\{BO\}$



~~из усл. т.к. M~~ пересечение



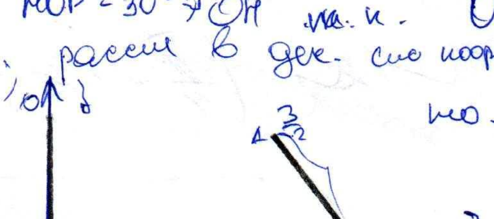
по т. sin'ов: $CD=2\cdot R\cdot \sin\angle CAD=\sqrt{3} \Rightarrow COD$ - правильн

$OH=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$; $\angle HOD=30° \Rightarrow OH$ мед. к. $OH=AB$

рассм $HOAD$; рассм в дек. сис координат; $H-(0;0)$ $HO=\frac{3}{2}$

$HO \perp OX \Rightarrow O(0;\frac{3}{2})$ т.к.

$AB=\frac{3}{2} \Rightarrow y_A \leq \frac{3}{2}$



$\Rightarrow$ сл-й ① невозм

O всегда выше или на уровне

лист 2 $\Rightarrow$ O вне треугольн ADC $\Rightarrow \angle ADC$ - тупоугольный

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

217667

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 4.

В продолжении..

$m \cap AB = E$.

$m \parallel AL$ $\frac{BP}{PL} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{2}{3}$; $PE \cap AC = S_1$

по Th Менелая для $\triangle ABC$ и S_1P – секущ.

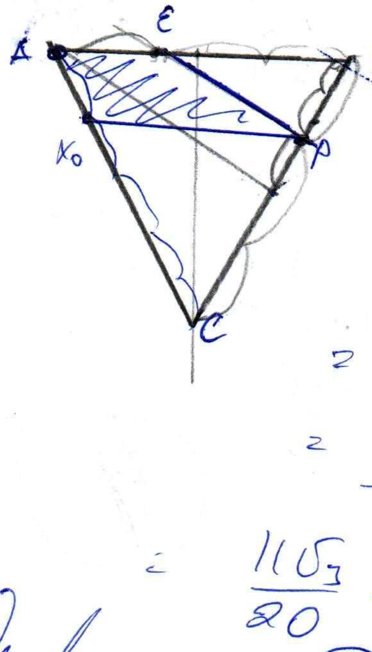
$$\frac{CP}{PB} \cdot \frac{BE}{EA} \cdot \frac{S_1A}{S_1C} = 1 \quad \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{S_1A}{S_1C} = 1$$

$\frac{S_1A}{S_1C} = \frac{1}{4}$; $S_1M \cap TC = X$; по Th) Менелая для $\triangle TAC$ и S_1M – секущ.

$$\frac{TM}{MA} \cdot \frac{S_1A}{S_1C} \cdot \frac{CX}{XT} = 1 \quad \frac{CX}{XT} = \frac{\cancel{4}}{1} \Rightarrow (MXPE) \text{ – искомое сечение}$$

т.к. $M, X, P, E \in \alpha$, $\angle(\alpha, ABC) = 60°$

$\rho(A, \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.



$A = \text{пр}_{ABC} M \quad X_0 = \text{пр}_{ABC} X$

$$S_{\text{пр}} = S_{AEPX_0} = S_{ABC}\left(1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) =$$

$$= S_{ABC}\left(1 - \frac{8}{15} - \frac{2}{9}\right) = S_{ABC}\left(\frac{45 - 24 - 10}{45}\right) =$$

$$= S_{ABC} \cdot \frac{11}{45} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{11}{45} = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{11}{45} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cdot 11}{20} = \frac{11\sqrt{3}}{20}; \quad S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos(\angle \alpha, ABC)} =$$

$$= \frac{11\sqrt{3}}{20} \cdot 2 = \frac{11\sqrt{3}}{10}$$

Ответ: $\frac{11\sqrt{3}}{10}$

20

лист 5

$a = -3 + \sqrt{1+kb}$

$\sqrt{1+kb} = \{7; 11; 15 \ldots 7+k\cdot 4\}$

a - четное тогд

и $\sqrt{1+kb} = x^2$ т.е. $7 + k\cdot 4 = x^2$

$\cancel{7 = 7 \cdot 1}$

$\cancel{1 \cdot 7}$

$7 = (x - \sqrt{k\cdot 2})(x + \sqrt{k \cdot 2})$

~~$k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow$ ур-е не имеет натуральных корней~~

$k \cdot 4 = x^2 - 7$ не имеет ~~целых~~ натуральных решений для k и x. $\Rightarrow$ a четное невозможно. т.к. $\cdot 3$ всегда ложь.

a - нечетное.

$a = -3 + \sqrt{1+kb}$

$\sqrt{1+kb} \in \{8; 12; 14; \ldots$ т.е.

~~$\{8\} \cup \{k\cdot 4; k\cdot 4+2 \mid k \in \mathbb{Z}, k \geq 3\}$~~ k нечетное

$\{8; 12; 14\} \cup \{k \cdot 4 \mid k \in \mathbb{Z}, k > 3, k$ нече

и являются полным к-ом.

$1 + kb = x^2$

$kb \in \{63; 143; 195\} - \{(k^2 \cdot 16) - 1 \mid k > 3$ k нечетное$\}$

$1+kb \in \{64; 144; 196\} \cup \{k^2 \cdot 16 \mid k > \ldots$

при этом $a > b$

~~$k^2 - 12k + 36$~~ ~~2~~ ~~$k^2 + 12k - 36$~~ $< 8 <$

~~$36 - 12k + k^2 - 8$~~

$-3 + \sqrt{1+kb} > b$

$\sqrt{1+kb} > b+3$

$1 + kb > b^2 + 6b + 9$

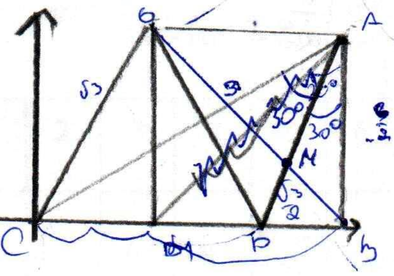
$b^2 + b(6-k) + 8 < 0$

$b_b = \frac{-6+k}{2} = \frac{k-6}{2}$

Ответ: $a = 5$
$b = 1$

лист 6.

пусть $y_O = y_A$.



т.к. $OH = AB$, $OH \perp CD$, $AB \perp CB \Rightarrow \triangle BA$ — прямоуг-к

$\Rightarrow CA = 2 \cdot AB = 3$

$\frac{CD}{DB} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{1} \Rightarrow DB = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MB = \sqrt{3}$

$O\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$ $A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$

$B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ $D(\sqrt{3}; 0)$

$y_{OB} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{9}{4}$ $y_{AD} = \sqrt{3} \cdot x - 3$

$M = y_{AD} \cap y_{OB}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{9}{4} = \sqrt{3}x - 3 =$

$3 + \frac{9}{4} = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$

$\frac{21}{4} = \frac{3\sqrt{3}x}{2}$

$\frac{7}{2} = \sqrt{3}x$

$x = \frac{7\sqrt{3}}{6}$

$y_M = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7\sqrt{3}}{6} + \frac{9}{4} =$

$= -\frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 6} + \frac{9}{4} = -\frac{7}{4} + \frac{9}{4} = \frac{1}{2}$

$OM = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} =$

$= \sqrt{\frac{4}{3} + 1} = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{7}{3}}$.

20

5. $\lg \frac{3\sqrt{3} + (\sin x + 4)\cos a}{-3\sin a \cos x} = |3\sin a \cos x| - |(\sin x + 4)\cos a + 3\sqrt{3}|$

Замена: $+3\sin a \cos x = t$

$3\sqrt{3} + (\sin x + 4)\cos a = u$.

$\lg \frac{u}{-t} = |t| - |u|$

$\begin{cases} t > 0 \\ u < 0 \end{cases} : t + u.$

$\begin{cases} t < \\ u > 0 \end{cases} : -t - u.$

из ОДЗ

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t > 0 \\ u < 0 \\ \frac{u}{-t} = 10^{t+u} \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} t < 0 \\ u > 0 \\ \frac{u}{-t} = 10^{-t-u} \end{cases} \quad \cancel{(2)} \end{array}\right.$

(1) $\begin{cases} t > 0. \\ u < 0 \\ \frac{u}{-t} = 10^{t+u} \end{cases}$, $\frac{u}{-t} = 10^t \cdot 10^u$

$u < 0$: $3\sqrt{3} + \underset{-4}{4\cos a} + \underset{-1}{\cos a \sin x} < 0 \Rightarrow u < 0$ невозможно

$\Rightarrow \begin{cases} u > 0 \\ t < 0 \\ \frac{u}{-t} = \frac{1}{10^{t+u}} \end{cases}$ мин: $3\sqrt{3} - 5 > 0$

$10^{t+u} \cdot u = -t$

0

1. I $n \le 19$ $n \to n+4$

II $n \ge 20$ $n \to |128 - 2n|$

0. 5 I
1. 9 I
2. 13 I
3. 17 I
4. 21 II
5. 87 II
6. 45 II
7. 39 II
8. 51 II
9. 27 II
10. 75 II
11. 21 II
12. 87

$2019 - 3 = 2016.$

$2016 / 7 = 288$

$\Rightarrow$ далее идут 288 полных блоков $\Rightarrow$

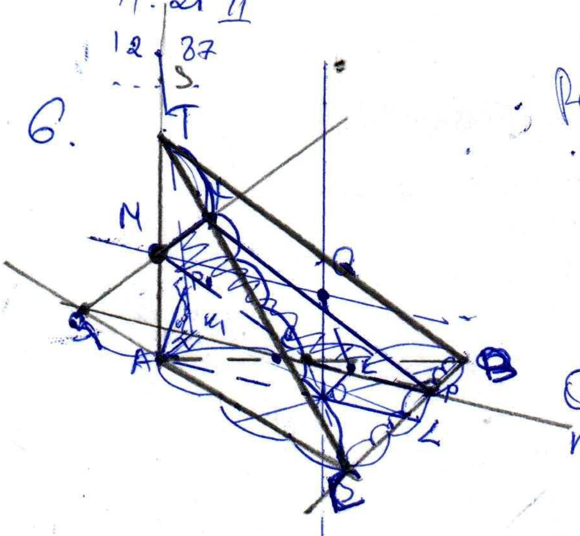
$\Rightarrow$ результат 2019 операции $- 75$ т.е. По...

блоки пос с 4 повторяются.

Ответ: голубой.

12

6.



Решение: $n \perp (OEM)$, $n \perp (ABC)$ (TAO — пл-ть большого круга, TA — хорда: $l / l \parallel AO \wedge F(\text{сер }TA) \in l$. $l \cap n = Q$, т.к. по опр. центр опис сферы $\in$ перп вост в центре основания пирамиды $\Rightarrow$ Q — центр описанной сферы $O = \text{пр}_{(ABC)} Q$ Чрез P провели прош в пирамиду т. $\alpha \cap (ABC) = m$. $OK \perp m$, $QK \perp m$ по Т о 3х перп ($OK \perp m$, $O = \text{пр}_{ABC} Q$), $\angle OKQ$ — линейный угол двухгранного угла (α, ABC) т.к. $QK \perp m$, $QK \in \alpha$, $OK \perp m$, $OK \in \alpha$, $\alpha \cap (ABC) = m$.

$\Rightarrow \angle OKQ = 60°$, $m \in \alpha$, $OK \subset (OQK)$, $OK \perp m \Rightarrow (OQK) \perp m$, $m \subset \alpha$, $m \perp (OKQ)$ ~~α (OKQ)$\perp$~~ $\Rightarrow (OKQ) \perp \alpha$, $A = \text{пр}_{(ABC)} S$ ($S \in \alpha$, $S \in TA$) Аналогично, как для OKQ $(AK_1S) \perp \alpha$, $\angle AK_1S = 60°$ $AP \perp TK_1 \Rightarrow$ ~~AP~~ $TK_1 = \alpha \cap (TK_1A)$, $(TK_1A) \perp \alpha \Rightarrow AP \perp \alpha \Rightarrow AP_1 = \rho(A, \alpha)$ $AP_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$AK_1 = \frac{AP}{\sin 60} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$; Рассм. $\triangle AK_1P$ и $\triangle PAL$, прямоуг ($\angle AK_1P = 90°$, $\angle PLA = 90°$) AP — общая гип-за, $PL = \frac{1}{6} BC = \frac{1}{2} = AK_1 \Rightarrow \triangle AK_1P = \triangle ALP$ по катету и гипотенузе

$\Rightarrow$ соотв эл-ты равны $\Rightarrow \angle PAL = \angle APK_1 \Rightarrow K_1P \parallel AL \Rightarrow \alpha \cap (ABC) =$

$= m \parallel AL$ т.к. $\alpha \parallel AL \Rightarrow$ строим $q / Q \in q \wedge q \parallel AL$, $q \cap TA = M$ — сер TA $\Rightarrow \alpha \cap TA = M$.

Листы