Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

217377

Шифр 217377
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Шлотова Надежда Евгеньевна

Город, № школы (образовательного учреждения) Дубна, МБОУ „лицей „Дубна"

Регистрационный номер 10762

Вариант задания №1

Дата проведения «17» марта 2019 г.

Подпись участника

56 (пятьдесят шесть) Кеш—

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
12	3	16	20	5	—					56 Кеш—

217377

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 1

7377

Задача 1

Проведем несколько начальных операций.

$n \le 17 \Rightarrow n := 3n-2$

$n \ge 18 \Rightarrow n := |129-2n|$

красный (5) $\xrightarrow{1} 13 \xrightarrow{2} 37 \xrightarrow{3} 55 \xrightarrow{4} 19 \xrightarrow{5} 91 \xrightarrow{6} 53 \xrightarrow{7} 23 \xrightarrow{8} 83 \xrightarrow{9}$

$\xrightarrow{9} 37 \xrightarrow{10} 55 \xrightarrow{11} \ldots$

12

Теперь через каждые 7 операций мы получаем такое же число (начиная с третьей операции).

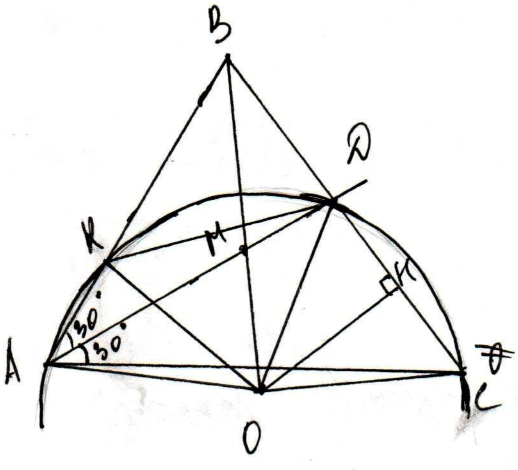
$2019 = 2 + 7 \cdot 288 + 1$

На 2018 операции мы получим число 37.

Осталось сделать одну операцию и получить 55 (синий)

ответ: синий.

Задача 4



Дано: $\triangle ABC$

$\angle BAC = 60°$

AD - биссектриса

O - центр окружности описанной у $\triangle ADC$

$R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$AD \cap BO = M$

~~AB~~ $AB = 1$

$AM = ?$

Пусть AB пересекает окружность в точке K

AD – биссектриса => $\angle BAD = \angle DAC = 30°$

$\angle DOC = 2\angle DAC = 60°$, т.к. $\angle DOC$ – центральный, а $\angle DAC$ – вписанный и они опираются на одну дугу

Аналогично $\angle DOK = 2\angle DAK = 60°$

$DO = OC = R \Rightarrow \angle ODC = \angle OCD = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$, тогда

$DO = OC = DC = R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Аналогично $AK = KO = OD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

AD – биссектриса => $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$

Пусть $BD = x$; $AC = y$: $\frac{x}{1} = \frac{2\sqrt{3}}{3y}$

По т. косинусов

$\cancel{AD}$ $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos\angle BAC$

$\left(x + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = y^2 + 1 - 2 \cdot y \cdot \frac{1}{2} = y^2 - y + 1$

$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{y} + 1\right)^2 = y^2 - y + 1$

$3y^4 - 3y^3 - y^2 - 8y - 4 = 0$

$y = 2$ $AC = 2$

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $BD = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$BC = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

По т. косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$

$4 = 1 + 3 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cos\angle ABC$

$\cos\angle ABC = 0 \Rightarrow \angle ABC = 90°$

По т. Пифагора

$KD^2 = KB^2 + BD^2$

$\frac{4}{3} = \cancel{A}KB^2 + \frac{1}{3}$

$KB = 1$

Т.к. $K \in AB$, то K и A являются одной точкой

~~Перерисуем рисунок~~.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 217377

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 1

$(14;5)$ $14+30+1=45$ X (делится на 5)

$(18;7)$ $18+42+1=61$ ✓

$(74;35)$ $74+210+1=285$ x (делится на 5)

16

$(-5;1)$ $-5+6+1=2$ ✓

Получилось 3 пары чисел: $(6;1)$; $(18;7)$; $(-5;1)$

Но т.к. -5 не является натуральным, то остается только две пары $(a;b)$

Ответ: $a_1=6$; $b_1=1$; $a_2=18$; $b_2=7$.

Задание 2

$$\sqrt{3}\,tg\,x-\sqrt[4]{\sin y}-\sqrt{\frac{3}{\cos^2 x}+\sqrt{\sin y}-6}\geq\sqrt{3}$$

$$tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$$

$$\sqrt{3}\,tg\,x-\sqrt[4]{\sin y}-\sqrt{3tg^2x+\sqrt{\sin y}-3}\geq\sqrt{3}$$

$\sin y\geq 0$ $y\in[0+2\pi\cdot n;\pi+2\pi\cdot n]$ $n\in Z$

$\cos^2x\neq 0$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k$ $k\in Z$

$$\sqrt{3tg^2x}-\sqrt[4]{\sin y}-\sqrt{3}\geq\sqrt{3tg^2x+\sqrt{\sin y}-3}$$

3

$\sqrt{\sin y}\in[0;1]$

$3tg^2x+\sqrt{\sin y}-3\geq 0$

Возьмем минимальной $\sqrt{\sin y}$

$3tg^2x - 3 \geq 0$

$tg^2 x \geq 1$

$tg\,x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

т.к. $\sqrt{\sin y} \in [0; 1]$

$\sqrt{3tg^2x + \sqrt{\sin y} - 3} \in [0; 1]$

Возьмем его минимальное значение.

$\sqrt{3tg^2x}$ $\sqrt{3}\,tg\,x \geq \sqrt{3}$

$tg\,x \geq 1$

$tg\,x \in [1; +\infty)$

$x \in [\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot m; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot m)$ $m \in Z$

~~Возьмем мак. значение $\sqrt{\sin y}$~~

$\cancel{\sqrt{3tg\,x + 1 - 3} = \sqrt{3tg\,x - 2}}$

$\cancel{3tg\,x - 2 \geq 0}$

$\cancel{tg\,x \geq \frac{2}{3}}$

$\cancel{\sqrt{3}\,tg\,x - 1 - \sqrt{3}}$

Ответ: $x \in [\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot m; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot m)$ $m \in Z$?

$y \in [0 + 2\pi \cdot n; \pi + 2\pi \cdot n]$ $n \in Z$

Задача 5

$$\log_2 \frac{3\sqrt{3} + (5\sin x + 4)\cos a}{3\sin a \cos x} = |3\sin a \cos x| - (5\sin x + 4)\cos a + 3\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} \sin a \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \dfrac{3\sqrt{3} + (5\sin x + 4)\cos a}{3\sin a \cos x} > 0 \end{cases}$$

$3\sqrt{3}+(\sin x+4)\cos a=u$

$3\sin a\cos x=v$

$\log_2\frac{u}{v}=|v|-|u|$

$\frac{u}{v}=2^{|v|-|u|}=\frac{2^{|v|}}{2^{|u|}}$

$u\cdot 2^{|u|}=v\cdot 2^{|v|}$

$f(u)=f(v)\Rightarrow u=v$, т. к. ?

$3\sqrt{3}+(\sin x+4)\cos a=3\sin a\cos x$

5

~~$3\sqrt{3}+4\cos a=3\sin a\cos x-\sin x\cos a$~~

~~$3\sqrt{3}+4\cos a=2\sin a\cos x+\sin(a-x)$~~

$a=\frac{5\pi}{6}$ $\cos a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

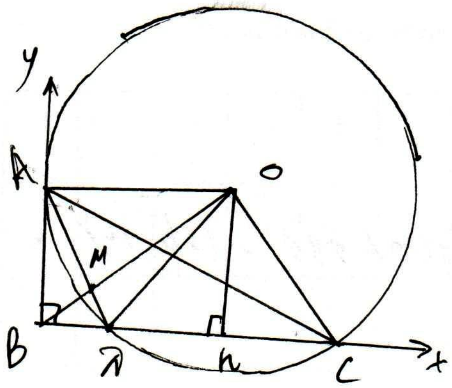
$\sin a=\frac{1}{2}$ $\sin x=\frac{1}{2}$ $x=\frac{\pi}{6}$ подбор?

$3\sqrt{3}+(\frac{1}{2}+4)\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$?

$3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ верно.

Ответ: $a=\frac{5\pi}{6}$; $x=\frac{\pi}{6}$.



~~По т. косинусов.~~

Пусть $OH \perp DC$. т.к. $\triangle DOC$ - равнобедр.

$DH = HC = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $OH = 1$.

$BH = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\begin{cases} AO = BC = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ BO - \text{общая} \\ AB = OH = 1 \end{cases} \Rightarrow \triangle AOB = \triangle BOH \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle OAB = \angle OHB = 90°$,

тогда BA - касательная.

Поместим рисунок в систему координат.

$B(0;0)$; $A(0;1)$; $O(\frac{2}{\sqrt{3}};1)$; $D(\frac{1}{\sqrt{3}};0)$

BO: $\begin{cases} 0 = 0k + b \\ 1 = \frac{2}{\sqrt{3}}k + b \end{cases}$ $\begin{cases} b = 0 \\ k = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $y_{BO} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

AD: $\begin{cases} 1 = 0k + b \\ 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}k + b \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1 \\ k = -\sqrt{3} \end{cases}$ $y_{AD} = -\sqrt{3}x + 1$

$y_{BO} = y_{AD}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}x = -\sqrt{3}x + 1$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}x = 1$

$x_M = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

$y_M = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$

20

$BM = \sqrt{(x_M - 0)^2 + (y_M - 0)^2} = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{\frac{4}{9 \cdot 3} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{7}{9 \cdot 3}}$

$BM = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{9}$

Ответ: $BM = \frac{\sqrt{21}}{9}$

Задача 3

Заметим, что $a + 6b + 1$ – простое и $a + 6b + 1 = a + 2b + 1 + 4b$.

Если $(a + 2b + 1)$ делится на 4, то и $(a + 2b + 1 + 4b)$ делится на 4.

Тогда оба эти условия не могут выполняться одновременно.

Соответственно верные или 1, 2, 3 или 1, 2, 4.
Выберем, чтобы 1 и 2 были верными.

$a^2+ab-6b^2-2a-16b-8=0$

$a^2+(b-2)a-6b^2-16b-8=0$

$D=b^2-4b+4+24b^2+64b+32=25b^2+60b+36=(5b+6)^2$

$a_1=\frac{-b+2+5b+6}{2}=\frac{4b+8}{2}=2b+4$

$a_2=\frac{-b+2-5b-6}{2}=\frac{-6b-4}{2}=-3b-2$

$a^2+4a+3 \vdots b$

$a_1^2+4a_1+3=4b^2+16b+16+8b+16+3=4b^2+24b+35$
Чтобы это делилось на b, 35 должно делиться на b.
Тогда $b=1; 5; 7; 35$. Соответственно $a=6; 14; 18; 74$.

$a_2^2+4a_2+3=9b^2+12b+4-12b-8+3=9b^2-1$
Чтобы это делилось на b, b должен равняться одному
соответственно $a=-3-2=-5$.
Образовались пары решений $(a;b)$: $(6;1)$; $(14;5)$; $(18;7)$;
$(74;35)$; $(-5;1)$
Выберем из них те, которые подходят под 3е или 4ое
утверждение.
Под 3. ($a+2b+1$ делится на 4)
$(6;1)$ $6+2+1=9$ ✗
$(14;5)$ $14+10+1=25$ ✗
$(18;7)$ $18+14+1=33$ ✗
$(74;35)$ $74+70+1=145$ ✗
$(-5;1)$ $-5+2+1=-2$ ✗
Под 4. ($a+6b+1$ – простое число)
$(6;1)$ $6+6+1=13$ ✓