Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

x1

Шифр 116032
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника МАРУСЕВ ЕГОР АЛЕКСАНДРОВИЧ

Город, № школы (образовательного учреждения) Волжский, МОУ СШ №30

Регистрационный номер 7152

Вариант задания 9

Дата проведения «02» марта 2019 г.

Подпись участника

(пятьдесят девять)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

116032

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
12	12	Ø	20	15	Ø					59

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 9

№ 2

$$\sin x - \sqrt{\cos y} - \sqrt{\cos y - \cos^2 x} \geq 1$$

Заметим, что $\begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \cos y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \sqrt{\cos y} \leq 1 \\ 0 \leq \sqrt{\cos y - \cos^2 x} \leq 1 \end{cases}$

Тогда:

$-1 \leq \sin x \leq 1$; $-1 \leq -\sqrt{\cos y} \leq 0$; $-1 \leq -\sqrt{\cos y - \cos^2 x} \leq 0$

~~Единственным возможным~~

Если взять максимальные значения каждого выражения, то их сумма будет равняться 1

=> Существует всего одно решение неравенства, когда

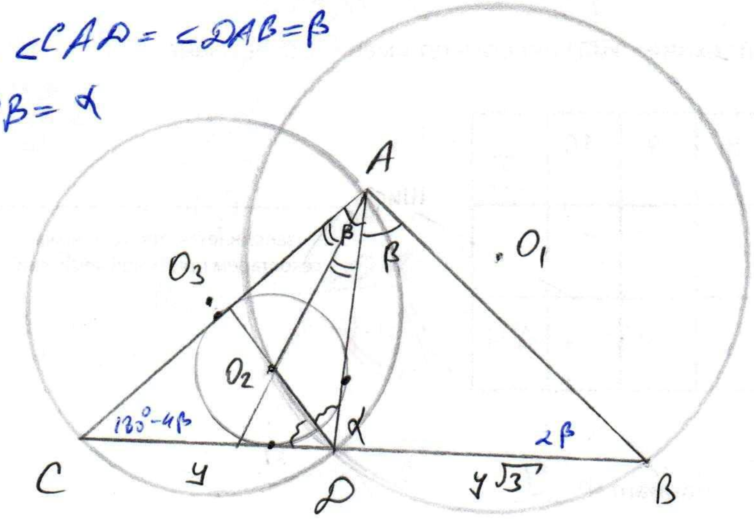
$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \text{ где } n \in Z \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ где } n \in Z \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $n \in Z$; $y = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$

№4

Пусть $\angle CAD = \angle DAB = \beta$

$\angle ADB = \alpha$



$\triangle ABC$

AD – бисс.

$BC = 2$

$(O_1; R_1)$ – опис. вокруг $\triangle AD$

$(O_2; r)$ – впис. в $\triangle ACD$

$(O_3; R_2)$ – опис. вокруг $\triangle AC$

$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{3}$

$S_{\triangle ABD} = ?$

1) Р-м $\triangle ACD$ и $\triangle ADB$ по т. синусов

$$\frac{CD}{\sin\beta} = 2R_2 \qquad \frac{DB}{\sin\beta} = 2R_1$$

$$\frac{2R_1}{2R_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{DB}{CD} = \sqrt{3} \Rightarrow \quad CD = y, \quad DB = y\sqrt{3}$$

$$CB = CD + DB = y + y\sqrt{3} = 2$$

$$y(1+\sqrt{3}) = 2$$

$$y = \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \frac{2(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{2(1-\sqrt{3})}{1-3} = \sqrt{3}-1$$

$$CD = y = \sqrt{3}-1$$

$$DB = y\sqrt{3} = 3 - \sqrt{3}$$

2) AO_2 – биссектриса $\angle CAD$, т.к. $(O_2; r)$ – вписанная окруж

DO_2 – биссектриса $\angle CDA$, т.к. $(O_2; r)$ – вписанная окруж

$\Downarrow$

$$\angle O_3AO_2 = \angle O_2AD = \frac{\angle O_3AD}{2} = \frac{\beta}{2}$$

$$\angle CDA = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - \alpha; \quad \angle O_2DA = \frac{\angle CDA}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 116032

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 9

Тогда уравнение принимает вид:

$$n - m = m^3 - n^3$$

$$(n-m) - (m^3 - n^3) = 0$$

$$(n-m) + (n^3 - m^3) = 0$$

$$(n-m) + (n-m)(n^2 + nm + m^2) = 0$$

$$(n-m)(1 + n^2 + nm + m^2) = 0$$

$n = m$ или $n^2 + nm + m^2 = -1$

это выражение – неполный квадрат, которое никогда не равно 0.

Т.к. ветви вверх, то $n^2 + nm + m^2 \neq -1$ всегда.

$n = m$

$$\sqrt[3]{6a\sin x + 4a^2 + 2a} = \sqrt[3]{\cos 2x + 2\sin x + 11}$$

$$6a\sin x + 4a^2 + 2a = \cos 2x + 2\sin x + 11$$

$$6a\sin x + 4a^2 + 2a = 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x + 11$$

$$\sin^2 x + \sin x(3a-1) + (2a^2 + a - 6) = 0$$

$$D = (3a-1)^2 - 4(2a^2 + a - 6) = 9a^2 - 6a + 1 - 8a^2 - 4a + 24 =$$

$$= a^2 - 10a + 25 = (a-5)^2$$

Пусть $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$

$t^2 + t(3a-1) + (2a^2 + a - 6) = 0$

$D = (a-5)^2$

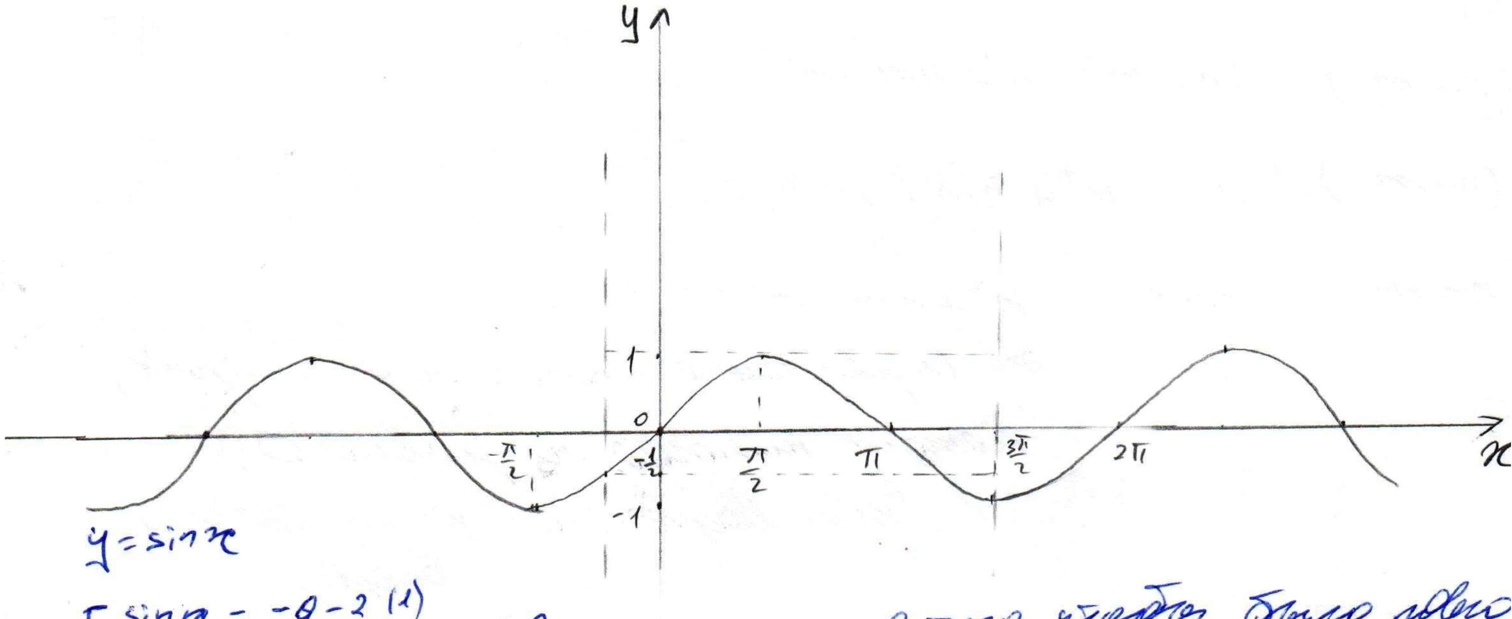
$t = \dfrac{1-3a \pm (a-5)}{2}$

$t_1 = -a-2$

$t_2 = -2a+3$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = -a-2 \\ \sin x = -2a+3 \end{array}\right.$

Р-м график $y = \sin x$



$y = \sin x$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = -a-2 \ (1) \\ \sin x = -2a+3 \ (2) \end{array}\right.$

Заметим, что для того, чтобы было ровно два решения:

То есть одна прямая имеет ровно два решения, а другая не имеет никаких общих точек

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \le -a-2 < 1 \\ \left[\begin{array}{l} -2a+3 > 1 \\ -2a+3 < -\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \le -2a+3 < 1 \\ \left[\begin{array}{l} -a-2 > 1 \\ -a-2 < -\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3<a\le -\frac{3}{2}\\ \left[\begin{array}{l}a<1\\ a>\frac{7}{4}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}1<a\le\frac{7}{4}\\ \left[\begin{array}{l}a<-3\\ a>-\frac{3}{2}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.
\qquad
\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3\le a\le -\frac{3}{2}\\ a<1\end{cases}\\ \begin{cases}1<a\le\frac{7}{4}\\ a>-\frac{3}{2}\end{cases}\end{array}\right.
\qquad
\left[\begin{array}{l}-3<a\le -\frac{3}{2}\\ 1<a\le\frac{7}{4}\end{array}\right. =\ \checkmark$$

при $-3\le a\le -\frac{3}{2}$: $\sin x = -a-2$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \arcsin(-a-2)+\cancel{2\pi k, \text{где } k\in\mathbb{Z}}\\ x=\pi-\arcsin(-a-2)+\cancel{2\pi k, \text{где } k\in\mathbb{Z}}\end{array}\right.$$

?

при $(-)1<a\le\frac{7}{4}$: $\sin x = -2a+3$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \arcsin(-2a+3)+\cancel{2\pi k, \text{где } k\in\mathbb{Z}}\\ x=\pi-\arcsin(-2a+3)+\cancel{2\pi n, \text{где } n\in\mathbb{Z}}\end{array}\right.$$

Ответ: при $a\in\left(-3; -\frac{3}{2}\right]$ $\left[\begin{array}{l}x \overset{\checkmark}{=} \arcsin(-a-2)+2\pi k, \ldots\\ x\overset{\checkmark}{=}\pi-\arcsin(-a-2)+2\pi k, \ldots\end{array}\right.$

?

при $a\in\left((-)1; \frac{7}{4}\right]$ $\left[\begin{array}{l}x = \arcsin(-2a+3)^{\checkmark}+2\pi n, \ldots\\ x=\pi-\arcsin(-2a+3)^{\checkmark}+2\pi n, \ldots\end{array}\right.$

15

$\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $-\frac{\pi}{6}$

$\pi-\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\frac{5\pi}{6}$

№1

Из всех возможных делителей числа только две являются простыми => в разложении числа только 2 простых числа: $\cancel{Q}\,N = K_1^{n_1} \cdot K_2^{n_2}$, где $\cancel{Q}\,N$ - искомое число

=> кол-во натур. делителей: $N = (n_1+1)(n_2+1) = 10 = 5 \cdot 2 = 1 \cdot 10$

1 и 10 не подходят, т.к. $n_1, n_2 \neq 0$ => $n_1, n_2 = 5, 2$

$n_1 + 1 = 5 \Rightarrow n_1 = 4$

$n_2 + 1 = 2 \Rightarrow n_2 = 1 \Rightarrow N = K_1^{n_1} \cdot K_2^{n_2} = K_1^1 \cdot K_2^4$

При $K_1 = 2,\ K_2 = 3 \Rightarrow$ ~~$N = 3^1 \cdot 2^4 = 162$~~ $N = 2^1 \cdot 3^4 = 2 \cdot$

$N = 162$: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 81, 162 – 10 шт

$1+2+3+6+9+18+27+54+81+162 = 363$

Ответ: 162 V 12

№3

$$f(x) = \log_2 \frac{\cos 4x + 2\sin^2 2x}{1 - \cos 5x} = \log_2 \left(\frac{1 - 2\sin^2 2x + 2\sin^2 2x}{1 - \cos 5x} \right)$$

$$= \log_2 \left(\frac{1}{1 - \cos 5x} \right)$$

? ∅

Р-м O_2ABD

т.к. O_2ABD – вписан в $(O_1; R_1)$, то $\angle O_2AB + \angle O_2DB = $

$$\frac{\beta}{2} + \beta + 90 - \frac{\alpha}{2} + \alpha = 180^\circ$$

$$\frac{3}{2}\beta + 90 + \frac{\alpha}{2} = 180$$

$$\frac{3}{2}\beta + \frac{\alpha}{2} = 90$$

$$3\beta + \alpha = 180$$

$$\alpha = 180^\circ - 3\beta \quad (1)$$

3) Р-м $\triangle ADB$

$$\angle ABD = 180^\circ - \angle DAB - \angle ADB = 180^\circ - \alpha - \beta \quad (2)$$

(1) в (2):

$$\angle ABD = 180^\circ - (180^\circ - 3\beta) - \beta = 180^\circ - 180 + 3\beta - \beta = 2\beta$$

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle CAB - \angle ABC = 180^\circ - 2\beta - 2\beta = 180^\circ - 4\beta$$

по т. синусов: (в $\triangle ACD$ и $\triangle ADB$)

$$\frac{AD}{\sin(180^\circ - 4\beta)} = 2R_2 \qquad \frac{AD}{\sin 2\beta} = 2R_1$$

$$\frac{2R_1}{2R_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin 4\beta}{\sin 2\beta} = \sqrt{3}$$

$$\frac{2 \cdot \cancel{\sin 2\beta} \cdot \cos 2\beta}{\cancel{\sin 2\beta}} = \sqrt{3}$$

$$2\cos 2\beta = \sqrt{3}$$

$$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2\beta = 30^\circ$$

$$\beta = 15^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45 - 30^\circ) = \sin 45 \cdot \cos 30 - \cos 45 \cdot \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$$

Т-м $\triangle$ ADB

по т. синусов

$\cancel{\frac{AB}{\sin\alpha}}$ $\frac{DB}{\sin\beta} = 2R_1$

$R_1 = \frac{DB}{2\sin\beta} = \frac{3-\sqrt{3}}{2\cdot\sin 15} = \frac{\sqrt{3}(\cancel{\sqrt{3}-1})\cdot 4}{2\cdot\sqrt{2}(\cancel{\sqrt{3}-1})} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{6}$

$\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R_1$, где $\alpha = 180° - 3\beta = 180° - 45°$

$AB = 2R_1 \cdot \sin 45° = 2\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{12}}{2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}\cdot DB\cdot AB\cdot\sin 2\beta = \frac{1}{2}\cdot(3-\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} =$

$= \frac{3\sqrt{3}-3}{2} = \frac{3}{2}(\sqrt{3}-1)$

Ответ: $S = \frac{3}{2}(\sqrt{3}-1)$ V 20

№5

$\sqrt[3]{6a\sin x + 4a^2 + 2a} - \sqrt[3]{\cos 2x + 2\sin x + 11} =$

$= \cos 2x + (2-6a)\sin x - 4a^2 - 2a + 11$

$\sqrt[3]{6a\sin x + 4a^2 + 2a} - \sqrt[3]{\cos 2x + 2\sin x + 11} = \cos 2x + 2\sin x - 6a\sin x -$

$- 4a^2 - 2a + 11$

$\sqrt[3]{6a\sin x + 4a^2 + 2a} - \sqrt[3]{\cos 2x + 2\sin x + 11} = (\cos 2x + 2\sin x + 11) -$

$- (6a + \sin x + 4a^2 + 2a)$

Пусть $\sqrt[3]{6a\cdot\sin x + 4a^2 + 2a} = n$, а $\sqrt[3]{\cos 2x + 2\sin x + 11} = m$