Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1' +1'

116028

Шифр ________________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА

(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Короткова Елизавета Андреевна

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Волжский МОУ СШ № 30

Регистрационный номер 6092

Вариант задания 8

Дата проведения «02» марта 2019 г.

Подпись участника ________________

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

семьдесят (Пиб)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
12	12	16	20	10	0					70

Пиб

116028

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

6028

Вариант № 8

Задача № 1

По условию у числа только 2 простых делителя, значит мы можем представить его в виде $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}$

Тогда кол-во натуральных делителей равно

$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)=10=2\cdot5 \Rightarrow$ возможно только $\alpha_1=1$ и $\alpha_2=4$

Тогда искомое число равно $p_1\cdot p_2^4$

Также по условию $1+p_1+p_1p_2^4+p_1p_2^3+p_1p_2^2+p_1p_2+$
$+p_2+p_2^2+p_2^3+p_2^4=186$

Разложив на множители, получим

$(1+p_1)(1+p_2+p_2^2+p_2^3+p_2^4)=186=2\cdot3\cdot31$

И следовательно подходит только случай

$1+p_1=6$ и $1+p_2+p_2^2+p_2^3+p_2^4=31$

Откуда $p_1=5$ и $p_2=2$

А значит искомое число равно $5\cdot2^4=5\cdot16=80$

Ответ: 80

Задача № 2

$$\cos x - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 1$$

Исходя из того, что $\cos x \leq 1$

$\sqrt{\sin y} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{\sin y} \leq 0$

$\sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{\sin y - \sin^2 x} \leq 0$

Получаем, что $\cos x - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \leq 1$

А значит получаем систему:

$$\begin{cases} \cos x - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 1 \\ \cos - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \leq 1 \end{cases}$$

Решением которой будет только

$$\cos x - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x} = 1$$

только при $\cos x = 1$

$\sqrt{\sin y} = 0$

$\sqrt{\sin y - \sin^2 x} = 0$

Откуда получаем систему:

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin y = 0 \\ \sin y = \sin^2 x \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

Ответ: $y = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 116028

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 8

~~Задача №3~~

Задача №3

$$f(x) = \log_2 \frac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{1-\sin 3x}$$

$$\cos 2x + 2\sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x + 2\sin^2 x = 1$$

$$\log_2 \frac{1}{1-\sin 3x} = -\log_2(1-\sin 3x)$$

По определению $-1 \le \sin 3x \le 1$ $\Rightarrow$ максимальное значение $\log_2(1-\sin 3x) = \log_2 2 = 1$, а потом $\log_2(1-\sin 3x)$ становится меньше $\Rightarrow$ минимальное значение $f(x) = -\log_2(1-\sin 3x) = -1$

Откуда получим, что $f(x) \in [-1; +\infty)$

Запишем, что $-1 \le \sin 3x \le 1$

$$\begin{cases} -\sin 3x \le 1 \\ -\sin 3x \ge -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-\sin 3x \le 2 \\ 1-\sin 3x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 1-\sin 3x \in [0; 2]$$

Откуда $\log_2(1-\sin 3x) \le \log_2 2 \Rightarrow \log_2(1-\sin 3x) \le 1$

и $-\log_2(1-\sin 3x) \ge -1 \Rightarrow \boxed{f(x) \ge -1}$

Если $f(x) \geq -1$, то $f(f(x)) = -\log_2(1-\sin 3(f(x)))$ и

значит $1-\sin 3(f(x))$ принимает все возможные значений какие будут у $\sin 3(f(x))$ и у $f(f(x))$ опять же область ~~определения~~ значений будет такой же и $f(f(x)) \geq -1$

И подставив $f(f(x))$ в $f(f(f(x)))$ получим такую же область значений, а значит и для

$f^{[2019]}(x) \geq -1$

Ответ: $[-1;+\infty)$

Задача №5

$$\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}-\sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}=$$

$$=\cos 2x+8\sin x+9-(6a\sin x+4a^2-6a)$$

Откуда получаем

$$\left(\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}-\sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}\right)\left(1+\sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}^{\,2}+\right.$$

$$\left.+\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}^{\,2}+\sqrt[3]{(\cos 2x+8\sin x+9)(6a\sin x+4a^2-6a)}\right)=0$$

Вторая скобка не может равняться 0, т.к мы можем представить ее как

$1+b^2+a^2+ab$ и если $ab \geq 0$, то выражение бол

0, а если $ab<0$, то $1+(b+a)^2-ab$ опять будет больше

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 116028
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Продолжение 5 задачи

Вариант № 8

А значит $\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a} = \sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}$

и $6a\sin x+4a^2-6a=-2\sin^2 x+8\sin x+10$

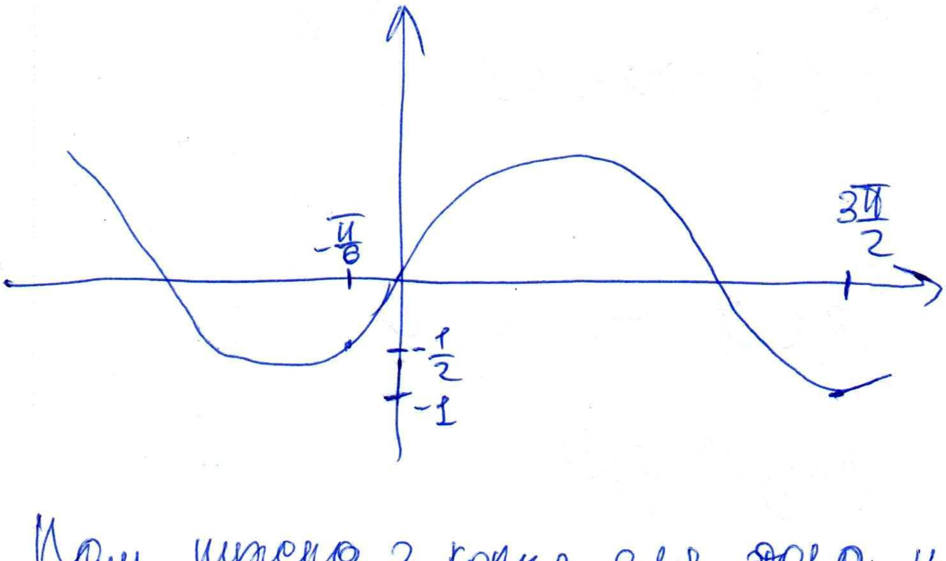
Пусть $\sin x = t$

$t^2+t(3a-4)+2a^2-3a-5=0$

$D=(a-6)^2 \Rightarrow t_1=-a-2$

$t_2=-2a+5$

Построим график синуса:



Нам нужно 2 корня для этого подходит следующие 2 случаев:

$\begin{cases} -\frac{1}{2} \le -a-2 < 1 \\ 1 > -2a+5 \ge -1 \end{cases}$??

$\begin{cases} -\frac{1}{2} \le -2a+5 < 1 \\ 1 > -a-2 \ge -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} -1 < -a-2 < -\frac{1}{2} \\ -1 < -2a+5 < -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -a-2 = -1 \\ -1 < -2a+5 < -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -a-2 = 1 \\ -1 < -2a+5 < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 < -a-2 < -\frac{1}{2} \\ -2a+5 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} -2a+5 = 1 \\ -1 < -a-2 < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

1. $a \leq -\frac{3}{2}$
   $a > -3 \Rightarrow \varnothing$
   $a > 2$

2. $a \leq \frac{5{,}5}{2}$
   $a > 2$
   $a > -3 \Rightarrow \varnothing$
   $a < -1$

3. $a < -1$
   $a > -\frac{3}{2}$
   $a < 3$ $\Rightarrow \varnothing$
   $a > \frac{5{,}5}{2}$

4. $a = -1$ $\varnothing$

5. $a = -3 \Rightarrow \varnothing$

6. $a = 3 \Rightarrow \varnothing$

7. $a = 2 \Rightarrow \varnothing$

Из всех решений получили, что такого a не существует

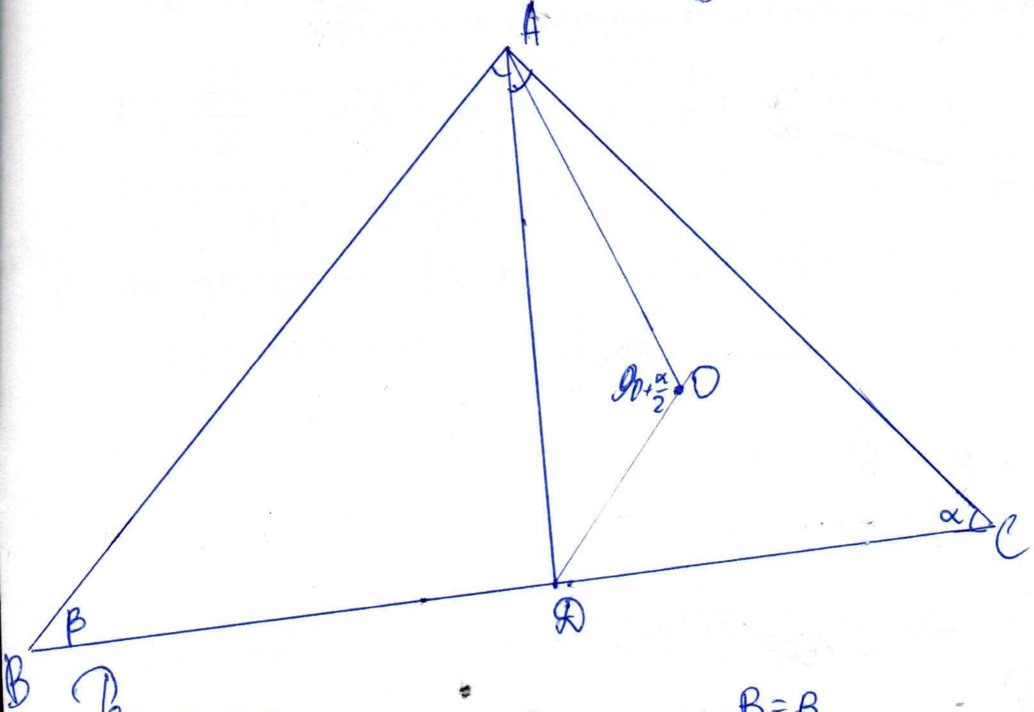
Также помним из того что $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$\begin{cases} -1 \leq -a-2 \leq 1 \\ -1 \leq -2a+5 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

Ответ: таких a не существует

??

Задача № 4



Дано:

$AC=\sqrt{2}$

$R_1=\sqrt{3}R_2$

S_{ACD} - ?

AD - биссектриса

Решение: Пусть $\angle C=\alpha$, а $\angle B=\beta$

Пусть O - центр вписанной в ACD окружности, тогда O - точка пересечения биссектрис $\triangle ACD$ по определению и $\angle AOD = 90+\frac{\alpha}{2}$, т.к. $\angle CAD+\angle ADC=180-\alpha$ и $\angle OAD+\angle ADO=90-\frac{\alpha}{2}$

Но условию т. O лежит на окружности, описанной около ABD, а значит точки A, B, D и O лежат на одной окружности и по свойству четырехугольника вписанного в окружность $\angle ABD+\angle AOD=180 \Rightarrow$

$\beta+90+\frac{\alpha}{2}=180 \Rightarrow \alpha=180-2\beta$ (1)

Напишем т. синусов для т. ADC: $R_2=\frac{AD}{2\sin\alpha}$

А для т. ABD: $R_1=\frac{AD}{2\sin\beta}$

Но условию $R_1=\sqrt{3}R_2 \Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{3}\sin\beta$ (2)

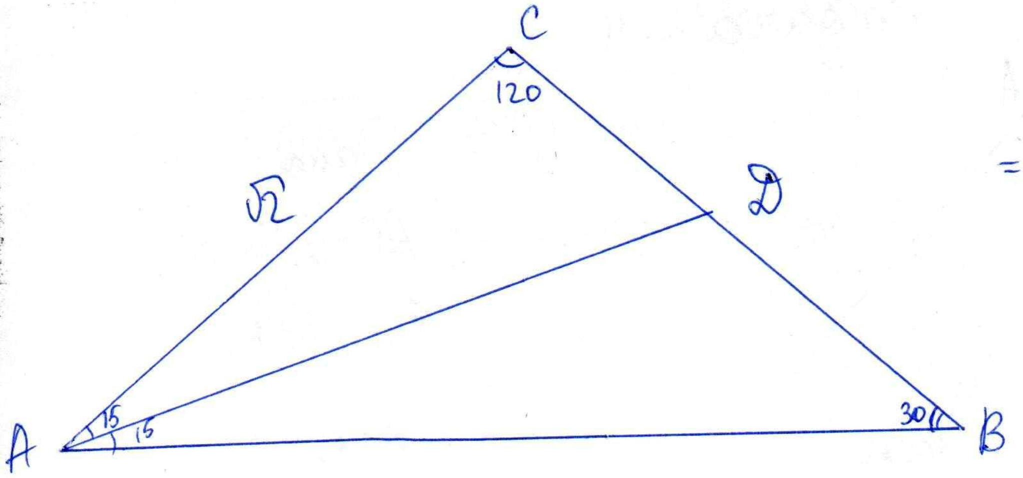
Из 1 и 2 выражений выходит, что $\sin 2\beta=\sqrt{3}\sin\beta \Rightarrow$

$2\cos\beta\cdot\sin\beta=\sqrt{3}\sin\beta$

если $\sin\beta=0$, то $\beta=\pi k, k\in Z$, что невозможно $\Rightarrow \cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и

$\beta=30°$, откуда $\alpha=120$ и получаем, что $\angle A=30$ и

треугольник ABC - равнобедренный



$S_{ABC} = \frac{AC^2}{2}\cdot\sin 120 =$

$= \frac{2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

AD - биссектриса $\Rightarrow$

$\angle CAD = \angle DAB = 15^\circ$

Из т. cos для ABC: $AB = \sqrt{6}$

$S_{ACD} = \frac{\sin 15}{2}\cdot AD\cdot\sqrt{2}$

$S_{ABD} = \frac{\sin 15}{2}\cdot AD\cdot\sqrt{6}$ $\Rightarrow S_{ABD} = \sqrt{3}\, S_{ACD}$

$S_{ABD} + S_{ACD} = S_{ABC} \Rightarrow$ $S_{ACD} + \sqrt{3}\, S_{ACD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{ACD} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$

Ответ: $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$