Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

116019

Шифр ________________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Соколов Никита Валерьевич

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Волжский, МОУ СШ №30

Регистрационный номер 7165

Вариант задания 8

Дата проведения «2» марта 2019 г.

Подпись участника

63 (шестьдесят три)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12	4	20	15	–					
										63

116019

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

019

(чистовик №1)

Вариант № 8

№1

Допустим нам дано число N, ~~выполнит~~ представим его в каноническом виде, разложив на простые множители:

$N = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma} \cdot 7^{\delta} \ldots$

Тогда заметим, что общее кол-во натуральных делителей будет равно:

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(\delta+1)(\ldots) = 10$, следуя из условий задачи.

Заметим, что 10 можно разложить на множители ~~не~~ большие 1, только 1 способом $10 = 2 \cdot 5$ (т.к. 2 и 5 – простые числа). Тогда исходное число N можно представить в виде $N = a^{2-1} \cdot b^{5-1} = a \cdot b^4$, где a и b – простые числа.

В условиях сказано, что ~~кол~~ сумма всех натуральных делителей равна 186.

$a+b+a^2+a^3+a^4+ab+a^2b+a^3b+a^4b+1=186$

Заметим, что $a<3$, т.к. ~~$a^2+a^3+a^4=9+27+81=117$~~ при $a=3$

~~Взав~~ т.к. при $a=3$ и наименьшем $b=2$, ~~***~~ сумма двух множителей будет больше 186: $a^4+a^4\cdot b=81+162=243>186$, значит $a=2$. Тогда:

$2+b+4+8+16+2b+4b+8b+16b+1=186$

$31b=155$

$b=5 \Rightarrow N=2^4\cdot 5=16\cdot 5=80$

Ответ: 80. V

12

№2

$\cos(x)-\sqrt{\sin y}-\sqrt{\sin y-\sin^2 x}\geq 1$

$\cos(x)-\left(\sqrt{\sin y}+\sqrt{\sin y-\sin^2 x}\right)\geq 1$

Рассмотрим ~~в~~ отдельно $\cos(x)$ и $\left(\sqrt{\sin y}+\sqrt{\sin y-\sin^2 x}\right)$.

Известно, что $\cos(x)$ принимает значения от -1 до 1, так же отметим, что $\sqrt{\sin y}\geq 0$ и $\sqrt{\sin y-\sin^2 x}\geq 0$ тогда и их сумма будет ≥ 0. ~~ага~~

V

Т.к. $-1\leq\cos(x)\leq 1$, а $\left(\sqrt{\sin y}+\sqrt{\sin y-\sin^2 x}\right)\geq 0$, а их разность ≥ 1, то очевидно, что такое возможно тогда и только тогда, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 116019

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

(черновик №2)

Вариант № 8

1) если $D=0$, то есть $a=6$, тогда:

$t = \frac{-3a+4}{2} = \frac{-18+4}{2} = -7$, не удовлетворяет

области допустимых значений t: $(-1 \le t \le 1)$

2) при $D>0$ $a>6$ и $a<-6$

$t_1 = \frac{-3a+4-a+6}{2} = -2a+5$

$t_2 = \frac{-3a+4+a-6}{2} = -a-1$ V

$-1 \le t_1 \le 1$	$-1 \le t_2 \le 1$
$-1 \le -2a+5 \le 1$	$-1 \le -a-1 \le 1$
$-6 \le -2a \le -4$	$0 \le -a \le 2$
$2 \le a \le 3$	$-2 \le a \le 0$
$\sin x = -2a+5$	$\sin x = -a-1$

См. условие!

15

При $a=2$ и $a=3$ уравнение будет иметь 1 решение

при $2<a<2,5$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = -\arcsin(-2a+5)+2\pi n, n\in z \\ x_2 = \pi + \arcsin(-2a+5)+2\pi n, n \in z \end{array}\right.$

при $2,5<a<3$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = \arcsin(-2a+5)+2\pi n, n\in z \\ x_2 = \pi - \arcsin(-2a+5)+2\pi n, n \in z \end{array}\right.$

При $a=-2$ и 0 уравнение имеет одно решение

при $-2<a<-1$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = -\arcsin(-a-1)+2\pi k, k\in z \\ x_2 = -\pi+\arcsin(-a-1)+2\pi k, k \in z \end{array}\right.$

при $-1<a<0$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = \arcsin(-a-1)+2\pi k, k\in z \\ x_2 = \pi - \arcsin(-a-1)+2\pi k, k \in z \end{array}\right.$

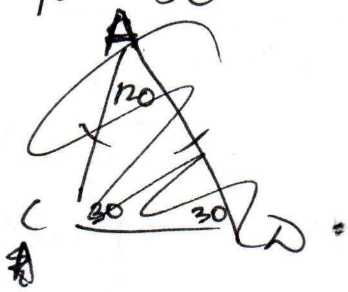
составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha = 180 - 2\beta \\ \sin\alpha = \sqrt{3}\cdot\sin\beta \end{cases}$$

$\sin(180 - 2\beta) = \sqrt{3}\sin\beta$

$\alpha = 120$

$\beta = 30$



треугольник ACD равнобедр.

т.к $\angle CAB = 30°$ т.к $(180 - 120 - 30)$

т.к. AD − биссектриса, то

$\angle CAD = \frac{30}{2} = 15° \Rightarrow \angle CDA = 45°$

по теореме синусов

$$\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2AD}{\sqrt{3}} \Rightarrow AD = \sqrt{3}$$ ✓

$\cancel{\cos}\ \sin(15) = \sin(45 - 30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30 =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ✓

$S = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{8} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$

Ответ: $S = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$ (+).

20

№ 3

$$f(x) = \log_2 \frac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{1 - \sin 3x}$$

рассмотрим:

$$\log_2 \frac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{1 - \sin 3x} =$$

$$= \log_2 \left(\frac{1 - 2\sin^2 x + 2\sin^2 x}{1 - \sin 3x} \right) =$$

$$= \log_2 \left(\frac{1}{1 - \sin 3x} \right) = -\log_2 (1 - \sin 3x)$$

~~если $\sin 3x = \pm 1$ то~~ [illegible]

~~$f(1) = -\log_2 (1 - \sin 3)$ ≈ -1~~

Ответ: от -1 до $+\infty$

$[-1; +\infty)$?

обоснование?

4

Совершим обратную подстановку:

$$x-y=(y-x)(y^2+yx+x^2)$$

$$(x-y)-(y-x)(y^2+yx+x^2)=0$$

$$(x-y)+(x-y)(y^2+yx+x^2)=0$$

$$(x-y)(y^2+yx+x^2+1)=0$$

Заметим, что $y^2+yx+x^2>0$, так как является не полным квадратом прибавив к нему еденицу, значение данного выражения станет $(y^2+yx+x^2+1)>1 \Rightarrow$ оно точно не равно 0, а значит для выполнения условия необходимо, чтобы $x-y=0$.

$$\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}-\sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}=0$$

$$\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}=\sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}$$

$$6a\sin x+4a^2-6a=\cos 2x+8\sin x+9$$

$$\sin x(6a-8)-9+4a^2-6a=1-2\sin^2 x$$

$$2\sin^2 x+2\sin x(3a-4)+4a^2-6a-10=0$$

$$\sin^2 x+\sin x(3a-4)+2a^2-3a-5=0$$

$$\sin(x)=t$$

$$|t|\le 1$$

$$t^2+t(3a-4)+2a^2-3a-5=0$$

$$D=9a^2-24a+16-8a^2+12a+20=$$

$$=a^2-12a+36=(a-6)^2$$