Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

116033

+1 [illegible]

Шифр ____________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Ксенофонтова Юлия Владимировна

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Волжский, МОУ СШ № 30

Регистрационный номер 8900

Вариант задания 9

Дата проведения «02» марта 2019 г.

Подпись участника Ксеноф[illegible]

пятьдесят пять

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
12	12	16	10	5	–					55

116033

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

033

Вариант № 9

Задача 1

Любое натуральное число можно представить в виде формулы разложения произведения простых чисел в каких-то различных степенях. (канонический вид числа).

Тогда пусть исходное число – x.

Так в нем всего два простых делителя, то его можно представить в виде:

$x = p^n \cdot k^m$, где p, k – простые числа.

Тогда так как всего 10 делителей, то

$(n+1)(m+1) = 10$ т.к $m, n \in N$

$nm + m + n + 1 = 10$ подбором получаем, что

$nm + m + n = 9$ $n = 1$; $m = 4$.

Заметим, что сумма делителей 363 кратна 3, тогда и само число будет кратно 3.

Тогда наше число имеет вид

$x = p^1 \cdot k^4$, где p или k равно 3.

Подберем такое число, чтобы выполнялось условие. Заметим, что при $p = 2$; $k = 3$ найдется такое число.

$x = 2^1 \cdot 3^4 = 81 \cdot 2 = 162$.

Делители числа 162: 1; 162; 2; 3; 6; 18; 18·3; 18· 81; 27.

Тогда искомое число равно $162 = 2^1 \cdot 3^4$

Ответ: $162 = 2^1 \cdot 3^4$. 12

1

Задача 2

Рассмотрим неравенство:

$$\sin x - \sqrt{\cos y} - \sqrt{\cos y - \cos^2 x} \geq 1$$

Область допустимых значений:

$$\begin{cases} \cos y \geq 0 \\ \cos y - \cos^2 x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos y \geq 0 \\ \cos y \geq \cos^2 x \end{cases}$$

✓

Преобразуем данное неравенство:

$$\sin x - \sqrt{\cos y} - \sqrt{\cos y - \cos^2 x} \geq 1$$

$$(\sin x - \sqrt{\cos y})^2 \geq (1 + \sqrt{\cos y - \cos^2 x})^2$$

(можем возвести в квадрат, т.к каждая часть больше 0)

$$\sin^2 x - 2\sin x\sqrt{\cos y} + \cos y \geq 1 + 2\sqrt{\cos y - \cos^2 x} + \cos y - \cos^2 x$$

$$\sin^2 x - 2\sin x\sqrt{\cos y} + \cancel{\cos y} - 1 - 2\sqrt{\cos y - \cos^2 x} - \cancel{\cos y} + \cos^2 x \geq 0$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin x\sqrt{\cos y} - 2\sqrt{\cos y - \cos^2 x} - 1 \geq 0$$

$$-2\sin x\sqrt{\cos y} - 2\sqrt{\cos y - \cos^2 x} \geq 0$$

$$((\sin x)\sqrt{\cos y})^2 \leq (\sqrt{\cos y - \cos^2 x})^2$$

$$\sin^2 x \cos y - \cos y + \cos^2 x \leq 0$$

$$(\sin^2 x - 1)\cos y \leq -\cos^2 x$$

Оценим каждую часть

$\cos^2 x \in [0;1] \Rightarrow -\cos^2 x \in [-1;0]$

$\cos y \in [0;1]$ (из области допуст. знач)

$\sin^2 x \in [0;1] \Rightarrow (\sin^2 x - 1) \in [-1;0]$

Тогда:

$$\underbrace{(\sin^2 x - 1)}_{[-1;0]}\underbrace{\cos y}_{[0;1]} \leq \underbrace{-\cos^2 x}_{[-1;0]}$$

✓

Заметим, что данное неравенство имеет решение, если

$0 = 0$ (т.к ~~при~~ если правая часть равна 0, то левая часть должна быть отрица

Тогда $\sin^2 x - 1 = -1$; $\cos^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 0$, $\cos^2 x = 0$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 116033

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 9

О - центр вписанной окружности в $\triangle ADC$

Т.к О - точка пересечения биссектрис,

то $\angle AOD = 90 + \frac{\beta}{2}$.

2) Рас-м четырехугольник AODB - все точки лежат на окружности

$\Downarrow$

сумма противолежащих углов равна

$\alpha + 90 + \frac{\beta}{2} = 180$

$\boxed{\beta + \frac{\alpha}{2} = 180}$ (1).

$\alpha = \frac{\beta}{2}$ из рассмотрения вписанных треугольников.

3) По теореме синусов $\triangle ADB$

$\frac{AD}{\sin\alpha} = 2R_1 \Rightarrow AD = \sin\alpha \cdot 2R_1$

по теореме синусов для $\triangle ACD$

$\frac{AD}{\sin\beta} = 2R_2 \Rightarrow AD = \sin\beta \cdot 2R_2$

$\Downarrow$

$AD = AD$

$\sin\alpha \cdot 2R_1 = \sin\beta \cdot 2R_2$

$\boxed{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{R_1}{R_2}} = \sqrt{3}$ (2)

✓

4) Составим систему из (1) и (2)

$\begin{cases} \cancel{\alpha + \frac{\beta}{2} = 90} \\ \frac{\sin\beta\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{3} \end{cases}$ заметим, что решением является

$\alpha = 30$

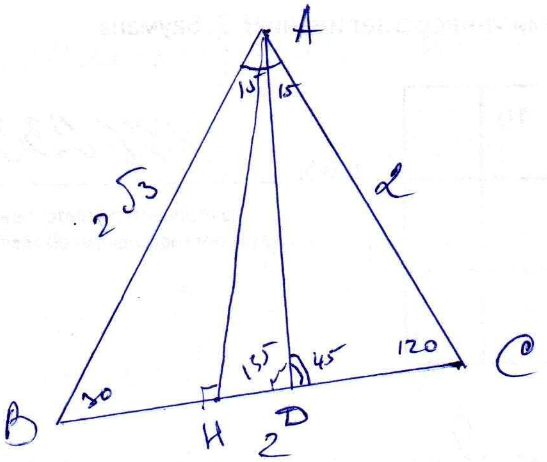
$\beta = 120$.

$\alpha = 30^\circ$

$\beta = 60^\circ$

дальнейшее решение с ошибкой.

Тогда расставим углы в $\triangle ABC$



$\angle ABC$ – равнобедренный

$(\angle CAB = \angle ABC = 30^\circ)$

$\Downarrow$

$AC = BC = 2$ (по условию)

5) по теореме синусов

$$\frac{AB}{\sin 120} = \frac{AC}{\sin 30} \Rightarrow AB = \frac{\sin 120 \cdot AC}{\sin 30} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sin 30 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 = \sqrt{3}$$

~~по~~ по свойству биссектрисы

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

6) Рас-м $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC}$$ (т.к. общая высота AH)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC} - S_{ABD}} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Leftrightarrow \frac{S}{\sqrt{3} - S} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$S = \sqrt{3}(\sqrt{3} - S)$$

$$S = 3 - \sqrt{3}S$$

$$(S + 3\sqrt{S}) = 3$$

$$S = \frac{3}{\sqrt{3}+1}$$

$$S_{ABD} = \frac{3}{\sqrt{3}+1}$$

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{3}+1}$

10

Задача 5

Рассмотрим уравнение:

$$\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2+2a}-\sqrt[3]{\cos 2x+2\sin x+11}=\cos 2x+(2-6a)\sin x-4a^2-2a+11$$

Преобразуем правую часть уравнения:

$$\cos 2x+2\sin x-6a\sin x-4a^2-2a+11=$$

$$=\underbrace{(\cos 2x+2\sin x+11)}_{d}-(\underbrace{6a\sin x+4a^2+2a}_{e})\Rightarrow$$

$$=(\sqrt[3]{d}-\sqrt[3]{e})(\sqrt[3]{d^2}+\sqrt[3]{d\cdot e}+\sqrt[3]{e^2})$$

Получаем, что $d=e$.

Тогда

$$\cos 2x+2\sin x+11=6a\sin x+4a^2+2a$$

$$4a^2+2a+6a\sin x-\cos 2x-2\sin x-11=0$$

$$\underbrace{4a^2}_{ax^2}+\underbrace{(2+6\sin x)a}_{bx}\underbrace{-\cos 2x-2\sin x-11}_{c}=0$$

Получаем квадратное уравнение относительно a, которое должно иметь два различных корня, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$

$$D=(2+6\sin x)^2-4(-\cos 2x-2\sin x-11)=$$

$$=2^2+2\cdot 2\cdot 6\sin x+36\sin^2 x+4\cos 2x+8\sin x+44$$

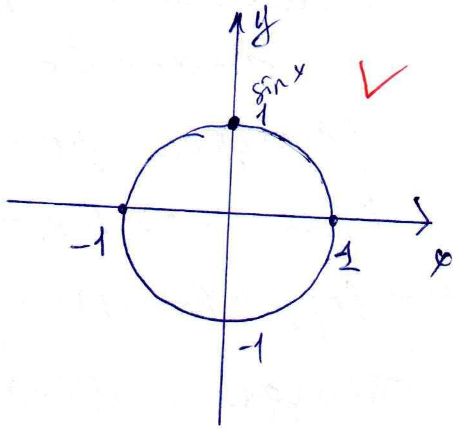
5

4

Тогда данное условие выполняется при

$$\begin{cases} \cos y = 0 \\ \cos y - \cos^2 x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos y = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Проверим полученное значения, оценив левую часть неравенства



$\sin x \in [-1; 1]$

$\sqrt{\cos y} \geq 0$; $\sqrt{\cos y - \cos^2 x} \geq 0$.

Если $\sqrt{\cos y} + \sqrt{\cos y - \cos^2 x} > 0$

$\Downarrow$

$\sin x - (\sqrt{\cos y} + \sqrt{\cos y - \cos^2 x}) < 1$

Противоречие.

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sqrt{\cos y} + \sqrt{\cos y - \cos^2 x} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos y = 0 \\ \cos y - \cos^2 x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos y = 0 \\ \cos^2 x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n. \end{array}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $y = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 12

Задача 3

Рассмотрим функцию $f(x) = \log_2 \frac{\cos 4x + 2\sin^2 2x}{1 - \cos 5x}$

Сделаем преобразования, которые не влияют на область допустимых значений.

$$\frac{\cos 4x + 2\sin^2 2x}{1 - \cos 5x}$$

$$2\sin^2 2x = \frac{2 \cdot (1 - \cos 4x)}{2} = 1 - \cos 4x$$

Тогда

$$\frac{\cos 4x + 1 - \cos 4x}{1 - \cos 5x} = \frac{1}{1 - \cos 5x}$$

$f(x) = \log_2 \frac{1}{1 - \cos 5x} \Rightarrow$ Область допустимых значений:

$$\begin{cases} \frac{1}{1 - \cos 5x} > 0 \\ 1 - \cos 5x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow 1 - \cos 5x > 0$$

Тогда:

$\log_2 \frac{1}{1-\cos 5x} = \log_2 1 - \log_2 (1-\cos 5x) = -\log_2 (1-\cos 5x)$

Оценим подлогарифмическое выражение

$\cos 5x \in [-1; 1]$

$-\cos 5x \in [-1; 1]$

$1-\cos 5x \in [0; 2]$

Учитывая область допуст. знач.

$1-\cos 5x \in (0; 2]$.

Тогда рассмотрим крайние варианты

при $\cos 5x = -1$

$-\log_2 1-(-1) = -\log_2 2 = -1$.

Тогда $f(x) = -1$

$f(f\ldots f(x))\ldots) = -1$.

при $\cos 5x$ максимально близком к 0

$f(x)$ будет стремиться к бесконечности.

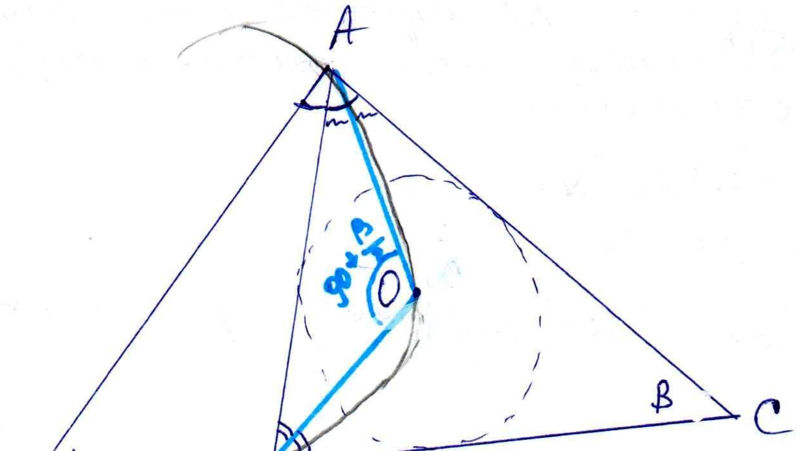
Тогда $f(f\ldots f(x)))\ldots) = \infty$.

Ответ: $y = f^{[2019]}$ принадлежит промежутку $[-1; +\infty)$

16

Задача 4

Дано:
$\triangle ABC$
AD - биссектр.
$BC = 2$
R_1, R_2 - радиусы опис.
$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{3}$
S_{ABD} - ?



Решение:

1.) Рассмотрим $\triangle ABD$.

Пусть $\angle ABC = \alpha$; $\angle ACB = \beta$.

$\Downarrow$ продолжение