+1

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1

+1 217442

Шифр ____________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету Математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Минустин Александр Михайлович

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва НОЧУ СОШ «ЮДЖИН ЦЕНТР»

Регистрационный номер 1408

Вариант задания 2

Дата проведения «17» Марта 2019 г.

Подпись участника ____________

70 (семьдесят) 8/л

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12	16	20	—	10					70

Ма

Шифр 217442

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 2

442 Задача 1

Выпишем последовательность по которой считал компьютер.

0	3
1	7
2	19
3	91
4	53
5	23
6	83
7	37
8	55
9	19.

$129 - 38 = 91$ $\quad 182 - 129 = 53$ $\quad 129 - 106 = 23$

$129 - 46 = 83$ $\quad 166 - 129 = 37$

$129 - 74 = 55$ $\quad 129 - 110 = 19$

Мы можем видеть, что цикл повторяется.

Из 2019 вычтем первый просчёт так как он повторяется 1 раз

длина цикла 7

$2018 : 7 = 288$ $\quad 288 \times 7 = 2016$

-14, 61, -56

(1)

На конец 2016 раза будет 55 (т.к цикл повторяется, тогда в 2017 раз будет 19, а в 2018 будет 91.

Ответ: 91 Фиолетовый

12

Задание 2.

Пусть $3tgx = a$ $\sqrt[4]{\cos y} = b$

$b \in [0;1]$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad | : \cos^2 x$

$tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \quad | \cdot 9$

$9tg^2 x + 9 = \frac{9}{\cos^2 x}$

$9tg^2 x = a^2$

$a^2 + 9 = \frac{9}{\cos^2 x}$

$a - b - \sqrt{a^2 + 9 + b^2 - 12} \geq \sqrt{3}$

$a - b \geq \sqrt{3} + \sqrt{a^2 + b^2 - 3}$

возведем обе части в квадрат

$a - b > 0$ (т.к еще $+\sqrt{3}$)

$a > b$

$\cancel{a^2} - \cancel{2}ab + \cancel{b^2} \geq \cancel{3} + \cancel{2}\sqrt{3a^2+3b^2-9} + \cancel{a^2+b^2-3}$

$-ab \geq \sqrt{3a^2+3b^2-9}$

Т.к a положительное ($b > a$, a $b[0;1]$)
то единственно когда это возможно $b=0$.

$0 \geq \sqrt{3a^2-9}$ корень не может быть $< 0 \Rightarrow$ корень $=0$.

$0 = \sqrt{3a^2-9}$

$3a^2 = 9$

$a^2 = 3$

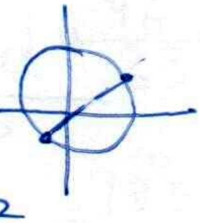
$a = \pm\sqrt{3}$ $a > 0$

$a = \sqrt{3}$.

$a = \sqrt{3}$

$3\,tg\,x = \sqrt{3}$

$tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$



$x = \frac{\pi}{6} + \pi n \quad n \in Z$

$b = 0$

$\sqrt[4]{\cos y} = 0$

$\cos y = 0$.

$y = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n \; n \in Z$; $y = \frac{\pi}{2} + \pi k \; k \in Z$.

12

Задание 3

Пусть k — натуральное число

③ $a+2b=4k \Rightarrow a=4k-2b$

Подставим 3 в 4.

④ $4k-2b+6b=4k+4b=4(k+b)$ — Не простое число (дел на 4)

Или 3 или 4 не верно, но т.к не верно только 1 (по усл)

1, 2 — верны.

② $a^2+a(b-4)-(6b^2+17b+5)=0$

$D=(b-4)^2+4\cdot(6b^2+17b+5)=$

$=\underline{b^2}\underline{-8b}+16+\underline{24b^2}+\underline{68b}+20=25b^2+60b+36=$

$=(5b+6)^2$

$a_1=\dfrac{-b+4+5b+6}{2}=\dfrac{4b+10}{2}=\cancel{3b+1}=2b+5$

$a_2=\dfrac{-b+4-5b-6}{2}=<0.$

② $a=2b+5$

подставим ② в ③.

$\Downarrow$

③ $2b+5+6b=8b+5$. На 4 не делится $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 3 не верно, а 1 2 4 верны

$2\Rightarrow1$ $(2b+5)^2+2(2b+5)$

$4b^2+20b+25+4b+10=4b^2+24b+35 \vdots b$

④

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 217442

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 2

$$\frac{\cancel{4b^2}}{\cancel{b}} + \frac{\cancel{2b}\,\cancel{5}}{\cancel{b}} + \frac{35}{b} \Rightarrow \frac{35}{b}.$$

$b = 1 \quad b = 5 \quad b = 7 \quad b = 35.$

$2 \Rightarrow 4$

$2b + 5 + 6b = 8b + 5$

$8 + 5 = 13$ - простое $\quad 8 \cdot 5 + 5$ - дел на 5

$7 \cdot 8 + 5 = 56 + 5 = 61$ - простое

$8 \cdot 35 + 5$ - дел на 5.

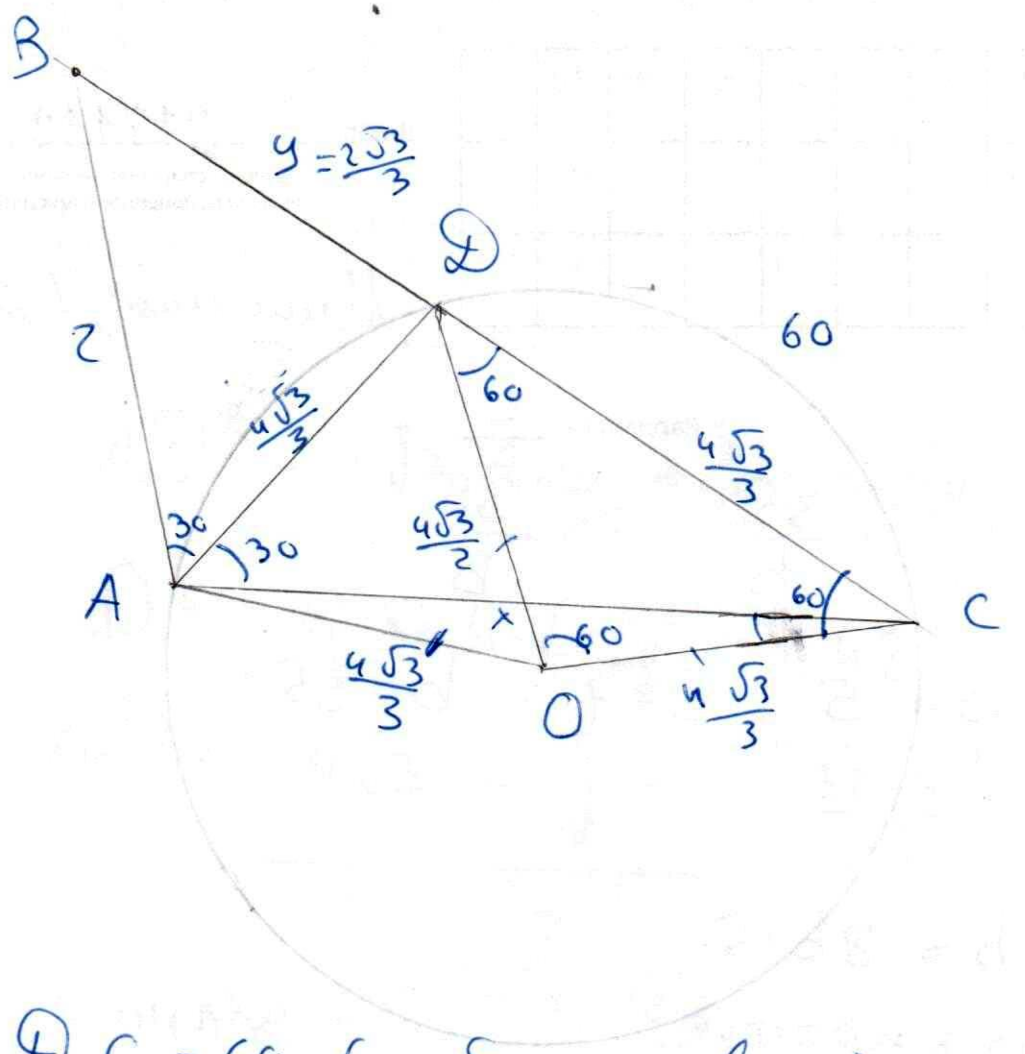
$b = 1 \quad b = 7$

2 $\quad a = 2b + 5$

Ответ: $\begin{cases} a = 7 \\ b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 19 \\ b = 7. \end{cases}$

16

Задание 4.



$\smile DC = 60$ ($\angle DAC$ - внутр)

DOC - цнтр угол $= 60$
$DO = OC$ (как радиусы) } т. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle DOC$ р/б с углом при осн. $= 60 \Rightarrow$
он р/с.

П/о св-ву медианы

$\frac{2}{y} = \frac{x}{\left(\frac{4\sqrt3}{3}\right)} \Rightarrow \frac{2 \cdot 4\sqrt3}{x \cdot 3} = y$

Запишем теор. cos для $\triangle BAC$.

$\begin{cases} y = \frac{8\sqrt3}{3x} \\ \cancel{y^2 + \frac{8\sqrt3 y}{3} + \frac{16}{3} = 4} \end{cases}$

$\left(y + \frac{4\sqrt3}{3}\right)^2 = 4 + x^2 - 2 \cdot \cancel{2} \cdot x \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$

$$\left(\frac{8\sqrt{3}}{3x}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=4+x^2-2x$$

$$\frac{64\cdot\cancel{3}}{3\,\cancel{9}x^2}+\frac{16\cdot\cancel{3}}{3\,\cancel{9}}+\frac{2\cdot 8\cancel{\sqrt{3}}\cdot 4\cancel{\sqrt{3}}}{3\,\cancel{9}x}=4+x^2-2x$$

$$\frac{64}{x^2\cdot 3}+\frac{16}{3}+\frac{16\cdot 4}{3x}=4+x^2-2x \quad |\cdot x^2\cdot 3$$

$$64+\underline{16x^2}+64x=\underline{12x^2}+3x^4-6x^3$$

$$3x^4-6x^3-4x^2-64x-64=0$$

$$3\cdot4^4-6\cdot4^3-4\cdot4^2-64\cdot4-64=0$$

$$3\cdot4^4-6\cdot4^3-4^3-64\cdot5=0$$

$$768-384-64-64\cdot5=0$$

$$768-384-384=0$$

Верно

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-6x^3-4x^2-64x-64 & x-4 \\ \hline -\;3x^4-12x^3 & 3x^3+6x^2+20x+16 \\ 0\quad 6x^3-4x^2 & \\ -\;6x^3-24x^2 & \\ 20x^2-64x & \\ -\;20x^2-80x & \\ 16x-64 & \\ -\;16x-64 & \\ 0 & \end{array}$$

$$3x^3+6x^2+20x+16>0$$

$$x=4$$

$$y=\frac{\overset{2}{\cancel{8}}\sqrt{3}}{3\cdot\cancel{4}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

7

Запишем теорему cos для $\triangle ADC$.

$$\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = AD^2 + 4^2 - \cancel{2}\cdot 4AD\,\cancel{\cos(30)}\,\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$\frac{16\cdot\cancel{3}}{3\,\cancel{9}} = AD^2 + 16 - 4\sqrt{3}AD$$

$$AD^2 - 4\sqrt{3}AD + \frac{32}{3} = 0$$

$$D = 16\cdot 3 - 4\cdot\left(\frac{32}{3}\right) = 48 - \frac{32\cdot 4}{3}$$

$$AD_1 = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{48 - \frac{32\cdot 4}{3}}}{2} \qquad \cancel{\sqrt{\frac{144-32\cdot 4}{3}}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{\frac{144-128}{3}}}{2} = \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{\frac{16}{3}}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{12\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$AD_2 = \frac{\frac{12\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3\cdot 2} = \frac{16\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

~~$\triangle ABD$.~~

~~$\frac{32\sqrt{3}}{3} < \frac{6+2\sqrt{3}}{3} =$~~

$\frac{8\sqrt{3}}{3}$ — не подходит т.к. $\triangle ABD$ не получается.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 217 442

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 2

Применим обр теор Пиф к $\triangle ABD$.

$$2^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$4 + \frac{4\cdot\cancel{3}}{3\cancel{9}} = \frac{16\cancel{3}}{\cancel{9}\,3}$$

$$\frac{12}{\cancel{9}} + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$ – верно $\Rightarrow \triangle ABD$ - прямоуг.

$\boxed{S = p\cdot r}$ $\quad S_{ABD} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$S_{ABD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$p = \frac{\frac{6}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{6+6\sqrt{3}}{6} = 1+\sqrt{3}.$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} = (1+\sqrt{3})\,r \quad |: 1+\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3(1+\sqrt{3})} = r.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3+3\sqrt{3}}$. $= \frac{2}{3+\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

20

9.

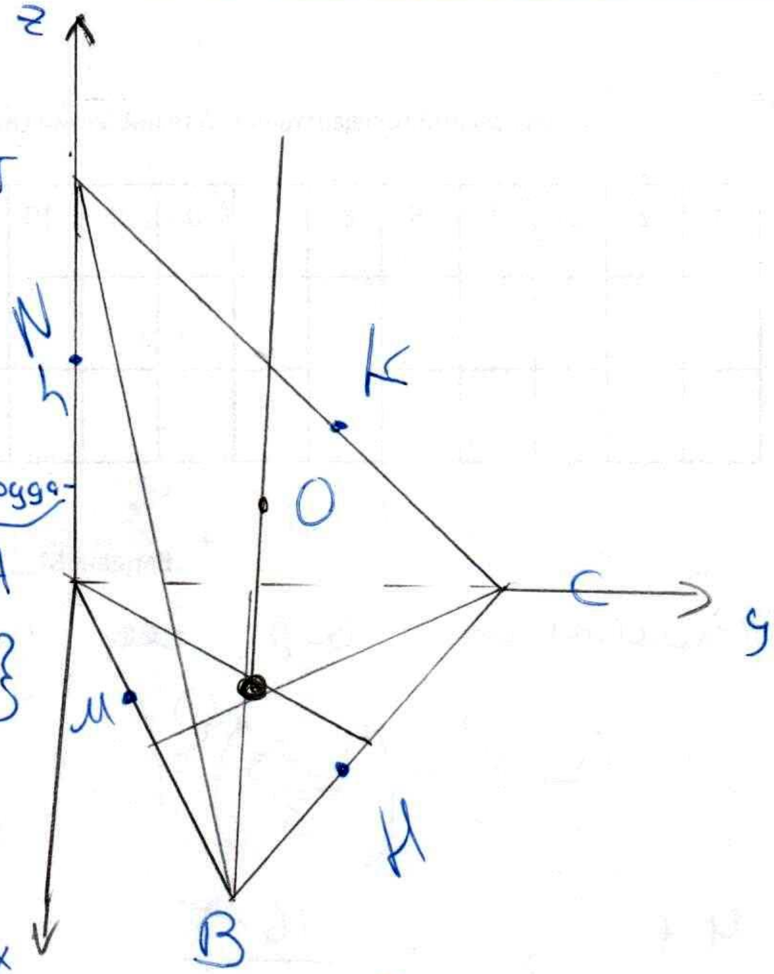
Задание 6.

Введем прямоуг. сист

$M\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

$O\left(\cancel{\frac{9}{2}}\,3; \frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{h}{2}\right)$ т.к O равноудалена

$\triangle AOT$ р/б.



Пусть $\bar{n}$ сечения $\{a; b; c\}$

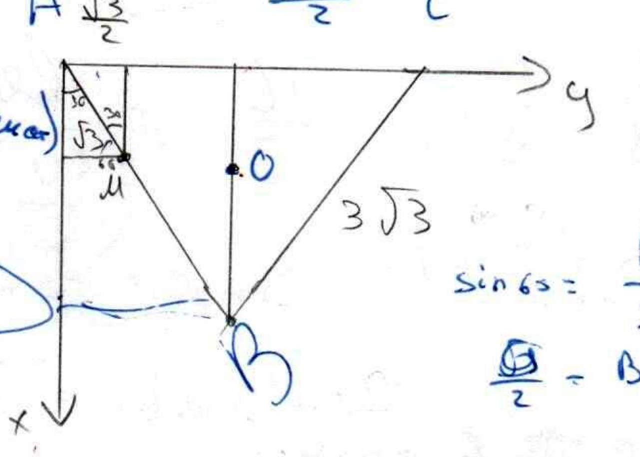
$\bar{n}_{ABC}\{0; 0; 1\}$.

$MO\{\cancel{3}; \sqrt{3}; \frac{h}{2}\}$.

$\overline{MO} \perp \bar{n}_{сеч}$ (т.к $\in$ плоск)

1е ур.

$\cancel{3a} + \sqrt{3}b + \frac{hc}{2} = 0$



$\sin 60 = \frac{B\sim}{3\sqrt{3}}$

$\frac{9}{2} = B\sim$

Угол между $\bar{n}_{ABC}$ и $\bar{n}_{сеч}$ = углу между пл.

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{1}}$ +.

$\sqrt{3a^2+3b^2+3c^2} = 2|c|$

$3a^2+3b^2+3c^2 = 4c^2$

$3a^2+3b^2-c^2=0$

2е ур.

Составим уравнение плоскости

$ax+by+cz+d=0$ - общий вид.

Подставим коорд М (т.к $\in$ плоскости)

$\frac{a\cdot 3}{2}+\frac{b\sqrt{3}}{2}+d=0$

$d=-\left(\frac{3a}{2}+\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$

ур. плоскости.

$$ax+by+cz-\left(\frac{3a}{2}+\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

+

Найдем расстояние от точки А до пл

$A(x_0\ y_0\ z_0)$

$$\rho=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

3е уравнение

$$\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\left|\frac{3a}{2}+\frac{b\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ (3)

$$\begin{cases} 3a+\sqrt{3}b+\frac{hc}{2}=0 & \ominus \\ 3a^2+3b^2-c^2=0 & \oplus \\ 33a^2+9b^2-3c^2+24\sqrt{3}ab=0 & \oplus \end{cases}$$

Так ка вектор нормали не привязан к одной точке (он плавает) ?

Пусть $a=1$

$$\begin{cases} 3+\sqrt{3}\,b+\frac{hc}{2}=0 & (1) \\ 3+3b^2-c^2=0 \Leftrightarrow c^2=3+3b^2 \\ 33+9b^2-3c^2+24\sqrt{3}\,b=0. \end{cases}$$

$$33+\cancel{9b^2}-9-\cancel{9b^2}+24\sqrt{3}\,b=0$$

$$24\sqrt{3}b+24=0$$

$$\cancel{24}\sqrt{3}b=-\cancel{24}$$

$$b=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Найдем c.

$$c^2=3+3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$c^2=3+\frac{9}{9}=4$$

$$c=\pm 2.$$

(1) $\cancel{3}-1+\frac{hc}{2}=0$

$\frac{hc}{2}=\cancel{-2}\ 1$ т.к $h>0$, то c отрицательное

$$c=-2.$$

$a=1$ $\quad b=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad c=-2$ $\quad 3-\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3}-\frac{2h}{2}=$

$\cancel{2=h}$ $h=1$

(12)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 217442

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 2

Ур. плоскости имеет ур

$$x - \frac{\sqrt{3}}{3} y - 2z - \left(\frac{3}{2} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

!!!

$$x - \frac{\sqrt{3}}{3} y - 2z - 1 = 0.$$

Пусть плоскость ∩ сторону TA в N.

$N(x_1\ y_1\ z_1)$ $\quad AT \cdot \lambda = AN \quad A(0\,0\,0)$ $T(0\,0\,2)$

$\bar{AN}\{x_1; y_1\ z_1\}$ $\quad AN\{0; 0; 2\lambda\}.$

$x_1 = 0 \quad y_1 = 0 \quad z_1 = 2\lambda$

Подст в ур плоскости

$-4\lambda - 1 = 0.$

$\lambda = -\frac{1}{4}.$

coopg

Пусть пл $\cap AT = N$.

$N(x_1, y_1, z_1)$

$AT\{0\ 0\ 2\}$. $\quad AT \cdot \lambda = AN$

$AN\{x_1; y_1; z_1\}$. $\quad AN\{0; 0; 2\lambda\}$

$x_1 = 0 \quad y_1 = 0 \quad z_1 = 2\lambda$.

подст в ур. пл.

$-4\lambda = 1$

$\lambda = -\frac{1}{4}$ — возьмём по модулю

$x_1 = 0 \quad y_1 = 0 \quad z_1 = \frac{1}{2}$

Пусть $H(x_2\ y_2\ z_2)$

$BH\{x_2 - \frac{9}{2}; y_2 - \frac{\sqrt{3}\cdot 3}{2}; z_2\}$ $\quad B(\frac{9}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 0)$ $\quad C(0; 3\sqrt{3}; 0)$

$x_2 - \frac{9}{2} = -\frac{9}{2}\lambda$ $\quad BC \cdot \lambda = BH$

$y_2 = \frac{27}{2}\lambda + \frac{\sqrt{3}\cdot 3}{2} \quad z_2 = 0$ $\quad \{\frac{9}{2}\lambda; \frac{27}{2}\lambda; 0\}$

~~Подст в ур. пл~~

~~Также находим для TC и имея точки пересечения нужно составить векторы KM и NH через $|i\ j\ k|$ и их~~

14

~~Нужно найти вектор нормали (коэффициенты при a_1 b_1 c_1, далее~~

~~$\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}$ — его длина~~

~~$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ — будет площадь сечения.~~

Для ТС нужно сделать тоже самое т. когда будут найдены коорд

N

K

H

M

Нужно написать вектора $\overline{NH}(x_4\,y_4\,z_4)$ $\overline{KM}(x_5\,y_5\,z_5)$

$$\begin{matrix} i & j & k & i & j \\ x_4 & y_4 & z_4 & x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & x_5 & y_5 \end{matrix}$$

по саррюсу найти коэффициента при i j k.

$$a_1 i + b_1 j + c_1 k$$

Площадь сеч. $= \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}$