Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

116027

Шифр ____________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Карпов Егор Витальевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Волжский, МОУ СШ №30

Регистрационный номер 7154

Вариант задания 8

Дата проведения «02» марта 2019 г.

Подпись участника ____________________

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

шестьдесят (Таб)

116027

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
12	12	16	5	15	0					60

Таб

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 8

Задание 1.

Разложив число на множители и использовав комбинаторику можно понять, что в числе будет 5 множителей, чтобы было 10 делителей. Т.к. два из них простые, то множителей будет 2 "вида": $a^n \cdot b^k$, где $n+k=5$. Допустим $a=5$, $b=2$, $n=1$, $k=4$.

$5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 80$

Делители числа 80:

1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80

$1+2+4+5+8+10+16+20+40+80 = 186.$

Ответ: 80.

Задание 2.

$$\cos x - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 1$$

Рассмотрим область доп. значений:

$$\begin{cases} \sin y \geq 0 \\ \sin y - \sin^2 x \geq 0 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases}$$

Так как $\sqrt{\sin y}$ и $\sqrt{\sin y - \sin^2 x}$ всегда больше или равны нуля, то $-\sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x}$ всегда меньше, либо равно нуля. Так как $\cos x$ может принимать значения от -1 до 1, то вычитая из него положительное число, его значение уменьшается. Если левая часть $\cos x - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 1$, а максимально $\cos x = 1$, то $-\sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x}$ обязательно должна равняться нулю. При $\cos x = 1$ $\sin x = 0$. Поэтому $-\sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - 0} = 0$

$-2\sqrt{\sin y} = 0$, получается $\sin y = 0$ $y = \pi k, k \in Z$. $\cos x = 1$ $x = 2\pi m$, m

Ответ: $x = 2\pi m, m \in Z$;

$y = \pi k, k \in Z$.

Задание 3.

Рассмотрим функцию $f(x)$:

$$f(x) = \log_2 \frac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{1 - \sin 3x}$$

$$\cos 2x + 2\sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x + 2\sin^2 x = 1.$$

$$f(x) = \log_2 \frac{1}{1-\sin 3x} = \log_2 2^0 - \log_2(1-\sin 3x) = -\log_2(1-\sin 3x)$$

Так как $-1 \le \sin 3x \le 1$, а область доп. значений логарифма $1 - \sin 3x > 0$
$\sin 3x < 1$

Поэтому $-1 \le \sin 3x < 1$. Логарифм $\log_2(1-\sin 3x)$ будет принимать значения $-\infty < \log_2(1-\sin 3x) \le 1$,

$\log_2(1-\sin 3x) > -\infty$, так как $\sin 3x$ может принять значение $\frac{2^n - 1}{2^n}$, при $n > 0$

Так как $\frac{2^n-1}{2^n} < 1$. Поэтому $\log_2\left(1 - \frac{2^n-1}{2^n}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^n}\right) = \log_2 2^{-n}$, где ~~n любое~~ положительное ~~число~~. $n > 0$.

Так как $-\infty < \log_2(1-\sin 3x) \le 1$, то $-1 \le -\log_2(1-\sin 3x) < +\infty$,

значит $f(x)$ принадлежит промежутку $[-1; +\infty)$ при любом x.

Поэтому при любом x, $y \in [-1; +\infty)$.

Ответ: $y \in [-1; +\infty)$.

Задание 5

$$\sqrt[3]{6a\sin x + 4a^2 - 6a} - \sqrt[3]{\cos 2x + 8\sin x + 9} = \cos 2x + (8-6a)\sin x - 4a^2 + \ldots$$

Рассмотрим правую часть

$$\cos 2x + 8\sin x - 6a\sin x - 4a^2 + 6a + 9$$

Пусть $\sqrt[3]{6a\sin x + 4a^2 - 6a} = c$ $\quad \sqrt[3]{\cos 2x + 8\sin x + 9} = d$

$c - d = d^3 - c^3$ $\quad d - c = c^3 - d^3$

$d - c = (d-c)(d^2 + d\cdot c + c^2)$

Перейдем к обратной замене. решение при $d = c$

$$6a\sin x + 4a^2 - 6a = \cos 2x + 8\sin x + 9$$

$$6a\sin x + 4a^2 - 6a = 1 - 2\sin^2 x + 8\sin x + 9$$

$2\sin^2x+(6a-8)\sin x+4a^2-6a-9-1=0 \quad |:2$

$\sin^2x+(3a-4)\sin x+(2a^2-3a-5)=0$

$D=(3a-4)^2-4(2a^2-3a-5)=9a^2-24a+16-8a^2+12a+20=$

$=a^2-12a+36=(a-6)^2$

$\sin x=\dfrac{4-3a\pm(a-6)}{2}$

$\left[\begin{array}{l}\sin x_1=\dfrac{4-3a+a-6}{2}=\dfrac{-2a-2}{2}=-a-1\\ \sin x_2=\dfrac{4-3a-a+6}{2}=\dfrac{-4a+10}{2}=5-2a\end{array}\right.$

В промежутке $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$ $-\frac{1}{2}\le\sin x<1$

$-\frac{1}{2}\le -a-1<1;\ \frac{1}{2}\le -a<2;\ -2<a\le-\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}\le 5-2a<1;\ -5\frac{1}{2}\le -2a<-4;\ -\frac{11}{4}\le -a<-2$

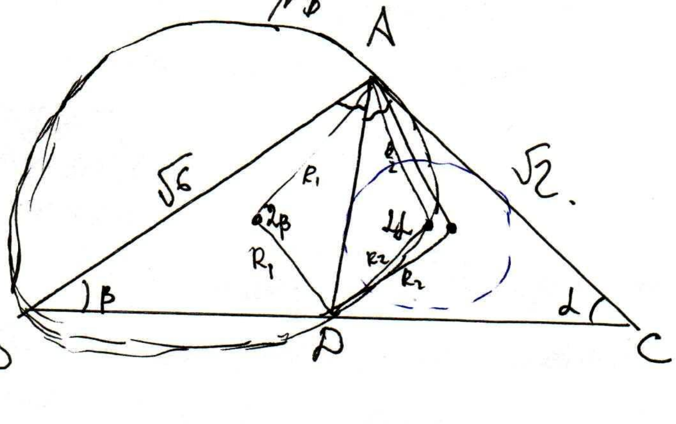
$2<a\le\frac{11}{4}$

Ответ: При $a\in\left(-2;-\frac{1}{2}\right]$ $x=\arcsin(-a-1)$

При $a\in\left(2;\frac{11}{4}\right]$ $x=\arcsin(5-2a)$

Второе решение?

№4



$a+9$

S_{ACD} −?

$S_{ACD}=\dfrac{AB\cdot AD\cdot BD}{4R_1}$

по т. sin.

$\dfrac{AC}{\sin\beta}=\dfrac{AB}{\sin\alpha}$ $\quad AB=\dfrac{AC\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}=\sqrt2\cdot\sqrt3=\sqrt6$

$\dfrac{AD}{\sin\alpha}=2R_2$ $\quad 2R_2\sin\alpha=2R_1\sin\beta$ $\quad 2\alpha=180-2\beta$

$\dfrac{AD}{\sin\beta}=2R_1$ $\quad \sin\alpha=\sqrt3\cdot\sin\beta$

$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\sqrt3$

Ответ: $S_{ACD}=\dfrac{3-\sqrt3}{4}$

Как получен ответ?