Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

116024

x1 Ay

Шифр ______________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету Математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Юрова Полина Михайловна

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Волжский, МОУ СШ N 30

Регистрационный номер 4302

Вариант задания 8

Дата проведения «02» марта 2019 г.

Подпись участника ______

62 (шестьдесят два) Кац

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

024

116024

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
12	9	16	5	20	—					62

Кац

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 8

№1.

Пусть само число – x, а его два простых делителя – a и b.
Тогда 8 делителей числа x (помимо x и 1) получаются, как различные сочетания чисел a и b, например, a^2, ab, ab^2 и т.п.
Значит, и само число x – это произведение чисел a и b в какой-то степени. Пусть $x = a^m b^n$. Тогда
Количество делителей числа находится по ~~в~~ формуле:
$k = (m+1)(n+1)\cdot(p+1)\cdots(q+1)$, где m, n, p, q – ~~4~~ степени простых чисел в составе числа. Например, $12 = 2\cdot2\cdot3 = 2^2\cdot3^1$
$k_{12} = (2+1)(1+1) = 3\cdot2 = 6$. Делители: $\underbrace{1, 2, 3, 4, 6, 12}_{6 \text{ чисел}}$.
Тогда, для числа x, количество делителей будет: $k = (m+1)(n+1) = 10$.
$10 = 1\cdot10 = 2\cdot5$. Но числа m или ~~не~~ n не могут быть равны 0, значит $(m+1)$ или $(n+1)$ не равно $1 \Rightarrow$ единственный вариант, когда $10 = 2\cdot5$. Пусть $m+1 = 2$, $n+1 = 5$, тогда $m = 1$, $n = 4$.
Число x представляется в виде: $a\cdot b^4$
Все делители числа x: $\underbrace{1, a, b, ab, b^2, ab^2, b^3, ab^3, b^4, ab^4}_{10 \text{ делителей}}$.
По условию:
$1 + a + b + ab + b^2 + ab^2 + b^3 + ab^3 + b^4 + ab^4 = 186$
$(1+a) + b(1+a) + b^2(a+1) + b^3(a+1) + b^4(a+1) = 186$.
$(a+1)(b^4 + b^3 + b^2 + b + 1) = 186$.

12

Рассмотрим делители 186.

$186 = 2\cdot3\cdot31$.
Заметим, что $2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31 \Rightarrow b = 2$
$a + 1 = \frac{186}{31} = 2\cdot3 = 6$. $a + 1 = 6 \Rightarrow a = 5$.
$x = ab^4 = 5\cdot2^4 = 5\cdot16 = 80$.

Ответ: 80.

8) Второе уравнение системы принадлежит ...

№2.

$\cos x - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 1$

$\cos x - 1 \geq \sqrt{\sin y} + \sqrt{\sin y - \sin^2 x}$,

Область допустимых значений выражения: $\begin{cases} \sin y \geq 0 \\ \sin y - \sin^2 x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin y \geq 0 \\ \sin y \geq \sin^2 x. \end{cases}$

При выполнении данных условий, $\sqrt{\sin y}$ и $\sqrt{\sin y - \sin^2 x}$ всегда ≥ 0, (если они входят в ОДЗ, иначе выражение не имеет смысла).

$\sqrt{\sin y} \geq 0$ (т. к. корень чётной степени всегда ≥ 0)

$\sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\sin y} + \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 0$

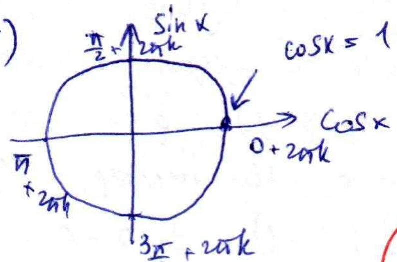
$\cos x - 1 \geq \sqrt{\sin y} + \sqrt{\sin y - \sin^2 x}$, $\sqrt{\sin y} + \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x - 1 \geq 0$

$\cos x \geq 1$

Тригонометрическая функция $\cos(x)$ может принимать значения $[-1; 1]$

$\Rightarrow$ единственным вариантом решения является $\cos x = 1$ (т. к. больше 1 быть не может)



$\cos x = 1 \Rightarrow \sin x = 0$

$\sin^2 x = 0$

Подставим значения $\cos x = 1$ и $\sin^2 x = 0$ в неравенство.

9

$\cos x - 1 \geq \sqrt{\sin y} + \sqrt{\sin y - \sin^2 x}$

$1 - 1 \geq \sqrt{\sin y} + \sqrt{\sin y - 0}$

$0 \geq 2\sqrt{\sin y}$

$\sqrt{\sin y} \geq 0$ (если $\sin y$ входит в область допустимых значений) $\Rightarrow$ единственное решение при $\sin y = 0 \Rightarrow y = \cancel{2}\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \pi + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z};\ y = \cancel{2}\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

№3.

$f(x) = \log_2 \dfrac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{1 - \sin 3x}$

$y = f^{[2019]}(x) \Rightarrow y = \underbrace{f(f(f(f \ldots (x))}_{2019}$

Найдём множество значений y.

$f(x) = \log_2 \dfrac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{1 - \sin 3x}$

$\cos 2x + 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(основное тригонометрическое тождество)

$f(x) = \log_2 \dfrac{1}{1 - \sin 3x}$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 116024

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 8

№5.

$$\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}-\sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}=\cos 2x+(8-6a)\sin x-4a^2+6a+9$$

$$\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}-\sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}=(\cos 2x+8\sin x+9)-(6a\sin x+4a^2-6a)$$

Произведём замену.

$$\begin{cases}\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}=t\\ \sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}=y\end{cases}$$

Тогда:

$t-y=y^3-t^3$

$t-y=(y-t)(y^2+yt+t^2)$

$(y-t)(y^2+yt+t^2)+y-t=0$

$(y-t)(y^2+yt+t^2+1)=0$

$y-t=0$ или $y^2+yt+t^2+1=0$

Но неполный квадрат всегда больше 0. Докажем это.

Выразим y через t в выражении $y^2+yt+t^2=0$

$D=y^2-4\cdot y^2=-3y^2$ $D<0\Rightarrow$ решений нет

Коэффициент при $y^2>0\Rightarrow$ наименьшее значение находится выше $0\Rightarrow$ y^2+yt+t^2 всегда >0,

при любых числах

$\Rightarrow$ $y^2+yt+t^2+1>0\Rightarrow$

$y^2+yt+t^2+1=0$ не имеет решений.

$\Rightarrow$ Единственный вариант решения при $y=t$.

Вернёмся к обратной замене.

$y = t$

$$\sqrt[3]{6a\sin x + 4a^2 - 6a} = \sqrt[3]{\cos 2x + 8\sin x + 9}$$

Степень корня нечётная $\Rightarrow$ не имеет ограничений в области допустимых значений.

Возведём обе части в 3 степень.

$$6a\sin x + 4a^2 - 6a = \cos 2x + 8\sin x + 9.$$

$$\cos 2x + 8\sin x - 6a\sin x - 4a^2 + 6a + 9 = 0.$$

$$\cos 2x + (8-6a)\sin x - 4a^2 + 6a + 9 = 0.$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

$$1 - 2\sin^2 x + (8-6a)\sin x - 4a^2 + 6a + 9 = 0$$

$$-2\sin^2 x + (8-6a)\sin x - 4a^2 + 6a + 10 = 0.$$

$$2\sin^2 x + (6a-8)\sin x + 4a^2 - 6a - 10 = 0.$$

Разделим почленно на 2.

$$\sin^2 x + (3a-4)\sin x + 2a^2 - 3a - 5 = 0$$

Выразим $\sin x$ через a.

$$D = (3a-4)^2 - 4(2a^2 - 3a - 5) =$$

$$= 9a^2 - 24a + 16 - 8a^2 + 12a + 20 =$$

$$= a^2 - 12a + 36 = (a-6)^2$$

$$\sin x = \frac{4 - 3a \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$\sin x_1 = \frac{4 - 3a + a - 6}{2} = \frac{-2a - 2}{2} = -a - 1$$

$$\sin x_2 = \frac{4 - 3a - a + 6}{2} = \frac{-4a + 10}{2} = 5 - 2a.$$ Получаем совокупность решений.

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -a - 1 \\ \sin x = 5 - 2a. \end{array}\right.$$

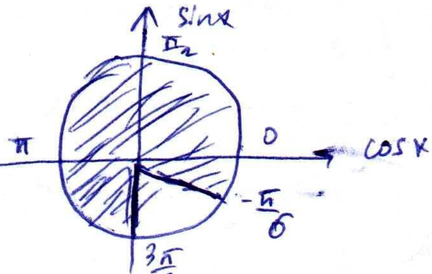
При этом $\sin x \in [-1; 1]$.

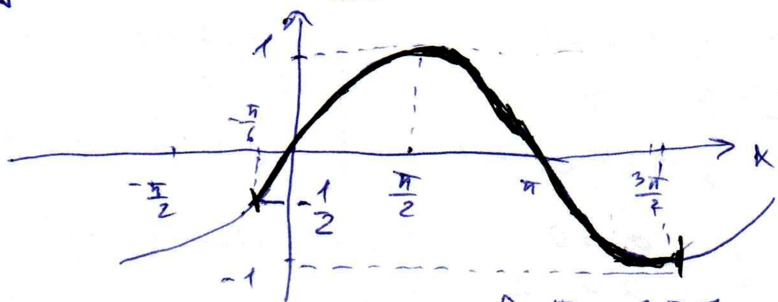
Необходимо, чтобы выражение имело 2 решение на промежутке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -a - 1 \\ \sin x = 5 - 2a. \end{array}\right.$$

Рассмотрим, какие выражения может принимать $\sin x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$

Построим график $f(x) = \sin x$





Заметим по графику, что на промежутке $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$, значения функции $\left[-\frac{1}{2}; 1\right)$ встречаются по 2 раза, а выражения $\left[-1; \frac{1}{2}\right)$ $\{1\}$ – по 1 разу; на остальных промежутках значений нет решений

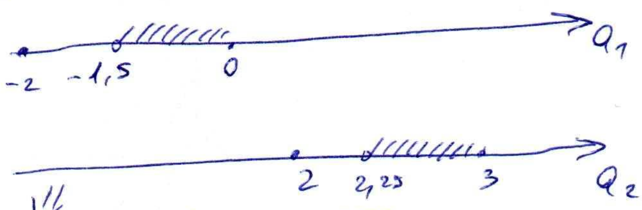
Таким образом, совместно с совокупностью решений $\left[\begin{array}{l}\sin x = -a-1; \\ \sin x = 5-2a;\end{array}\right.$ уравнение будет иметь 2 решения, если:

а) Обе части совокупности принадлежат промежутку, в котором данный $\sin x$ встречается по 1 разу ($\sin x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right)\{1\}$). Решим систему и найдем такие a.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} -1 \le -a-1 < \frac{1}{2} \\ -a-1=1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -1 \le 5-2a < \frac{1}{2} \\ 5-2a=1 \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 1 \ge a+1 > -\frac{1}{2} \\ -a = 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 1 \ge 2a-5 > -\frac{1}{2} \\ 2a = 4 \end{array}\right. \end{cases}$$

Решим на числовом луче

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 \ge a > -\frac{3}{2} \\ a = -2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 6 \ge 2a > 4,5 \\ a = 2 \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right] \\ a = -2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a \in (2,25; 3] \\ a = 2 \end{array}\right. \end{cases}$$



общих точек системы нет

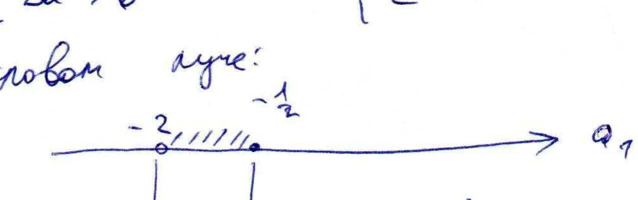
Ответ: Решений нет

б) Первое уравнение совокупности принадлежит промежутку, в котором $\sin x$ встречается 2 раза ($\sin x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right)$), а второе уравнение не имеет решений.

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \le -a-1 < 1 \\ \left[\begin{array}{l} 5-2a > 1 \\ 5-2a < -1 \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \ge a+1 > -1 \\ \left[\begin{array}{l} 2a < 4 \\ 2a > 6 \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \ge a > -2 \\ \left[\begin{array}{l} a < 2 \\ a > 3. \end{array}\right. \end{cases}$$

покажем решение на числовом луче:

$a \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right]$



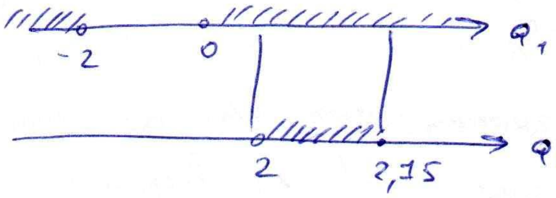
~~$a \in \left[-2\frac{1}{2}\right.$~~

$\sin x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right) \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$

в) Второе уравнение системы принадлежит промежутку, в котором $\sin x$ встречается 2 раза ($\sin x \in [-\frac{1}{2}; 1)$), а первое не имеет решений.

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-a-1<-1\\ -a-1>1\end{array}\right.\\ -\frac{1}{2}\leq 5-2a<1\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}-a<0\\ -a>2\end{array}\right.\\ \frac{1}{2}\geq 2a-5>-1\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a>0\\ a<-2\end{array}\right.\\ 5{,}5\geq 2a>4\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a>0\\ a<-2\end{array}\right.\\ 2<a\leq 2{,}75\end{cases}$$



20

$a \in (2; 2{,}75]$

$\sin x \in [-\frac{1}{2}; 1)$; $x \in [-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2})$

Ответ: $a \in (-2; -\frac{1}{2}]$ $(2; \cancel{2}\,2{,}75]$.

при $a \in (-2; -\frac{1}{2}]$, $\sin x = -a-1$, и уравнение имеет 2 решения: $x_1 = \arcsin(-a-1)$ $\cancel{+2\pi n}$ и $x_2 = \pi - \arcsin(-a-1)$, $\cancel{+2\pi n}$ при этом, $x \in [-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2})$

при $a \in (2; \cancel{2{,}275}\ 2{,}75]$, $\sin x = 5-2a$, и уравнение имеет 2 решения: $x_1 = \arcsin(5-2a)$ $\cancel{+2\pi n}$ и $x_2 = \pi - \arcsin(5-2a)$, $\cancel{+2\pi n}$ каждое из которых принадлежит промежутку $x \in [-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2})$

$\sin 3x \in [-1;1] \Rightarrow 1-\sin 3x \in [0;2]$.

при $1-\sin 3x \to 0$, $\frac{1}{1-\sin 3x} \to +\infty$.

16

при $1-\sin 3x = 2$, $\frac{1}{1-\sin 3x} = \frac{1}{2}$.

$f(x) = \log_2 \frac{1}{1-\sin 3x}$

$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, $\log_2(\infty) = \infty \Rightarrow f(x) \in [-1;+\infty)$

При этом, можно однозначно определить $f^{[2019]}(x)$ для $x=0$.

Тогда $f(x) = \log_2 \frac{1}{1-\sin 3\cdot 0} = \log_2 \frac{1}{1-\sin 0} = \log_2 \frac{1}{1-0} = \log_2 1 = 0$.

$f^{[2]}(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$

$f^{[3]}(x) = f(f(f(x))) = f(f(0)) = 0 \Rightarrow$ при $x=0$, $f^{[2019]}(x) = 0$.

Ответ: множество значений $y = f^{[2019]}(x)$

$y \in [-1;+\infty)$; при $x=0$, $y=0$.

№4.

Дано: $\triangle ABC$

AD — биссектриса

$AC = \sqrt{2}$

(O_1, R_1) — опис $\triangle ABD$

(O_2, R_2) — опис $\triangle ACD$

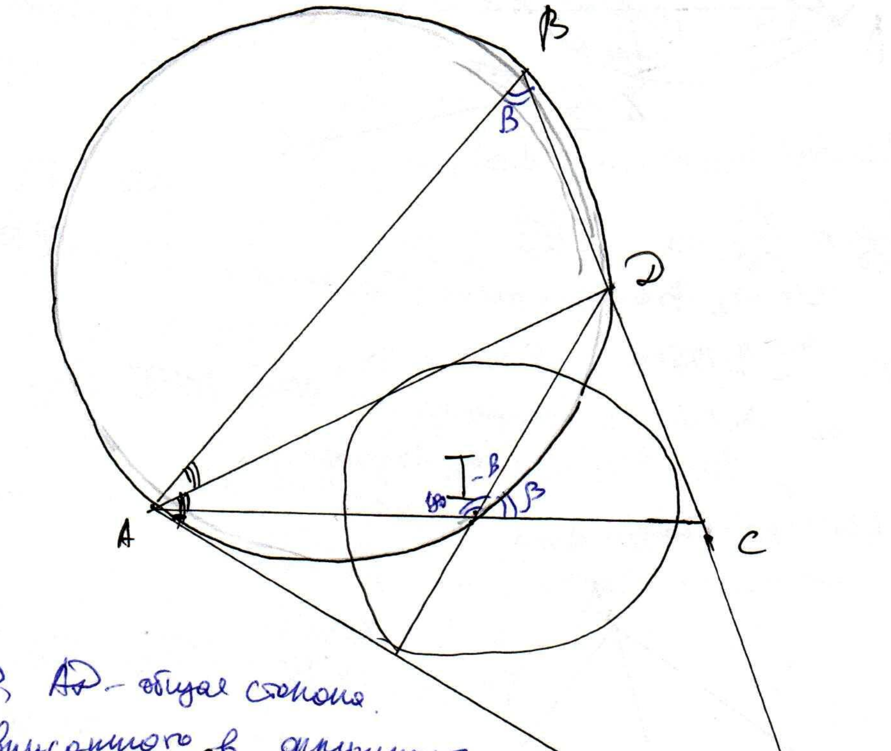
$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{3}$

(I, r) — впис $\triangle ACD$.

$I \in (O_1; R_1)$

$S_{ACD} = ?$

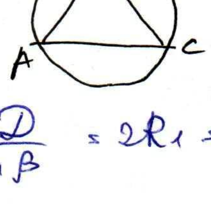
Решение:



$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{3}$.

Для $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$, AD — общая сторона.

Для треугольника, вписанного в окружность, по теореме sin.



$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$.

Для $\triangle ABD$: $\frac{AD}{\sin \beta} = 2R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{AD}{2\sin\beta}$

Для $\triangle ACD$: $\frac{AD}{\sin C} = 2R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{AD}{2\sin C}$.

$\frac{R_1}{R_2} = \frac{AD}{2\sin\beta} : \frac{AD}{2\sin C} = \frac{\sin C}{\sin\beta} \rightarrow \frac{\sin C}{\sin\beta} = \sqrt{3}$

Для $\triangle ABC$ (по теореме синусов)

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B}$$

$$AB = AC \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = AC \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}. \ V$$

I - центр вписанной окружности $\triangle ACD$

$I \in (O_1; R_1) \Rightarrow ABDI$ - вписанный многоугольник

$\Rightarrow$ сумма противоположных углов равна $180°$.

$\angle B = \beta \Rightarrow \angle AID = 180 - \beta$

$\angle DIC = 180 - \angle AID = 180 - (180 - \beta) = \beta$ (смежные углы)

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle IDC$.

$\angle C$ - общий

$\angle ABC = \angle DIC = \beta$

$\triangle ABC \sim \triangle DIC$ (по 2 углам)

$$\Rightarrow \frac{AB}{ID} = \frac{BC}{IC} = \frac{AC}{DC}.$$

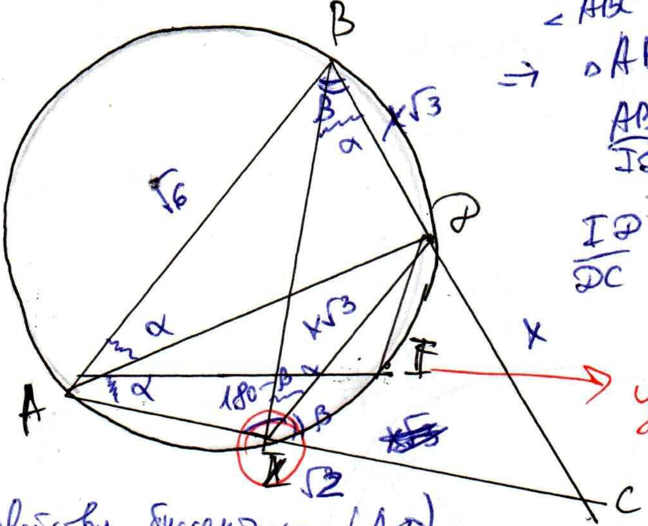
$$\frac{ID}{DC} = \frac{AB}{AC} = \sqrt{3}. \quad ID = x\sqrt{3}$$

~~ID = √3~~ x

$CD = x \Rightarrow$

центр впис-ной окр-ти почему на AC?

5



По свойству биссектрисы (AD)

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow BD = x\sqrt{3}$$

$(BD = ID = x\sqrt{3})$

$\Rightarrow \triangle BID$ - равнобедренный.

Тогда. $\angle IBD = \angle DIB = \alpha$

$\angle BAD = \alpha$ (опираются на одну дугу с $\angle BID$)

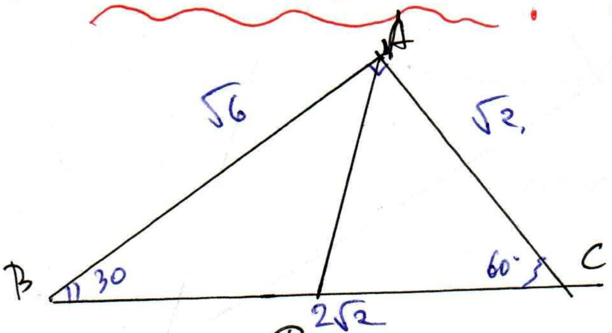
$\angle DAC = \alpha$ (AD - биссектриса)

$\triangle ABC$ - прямоугольный. ? нет!

$AC = \sqrt{2}$

$AB = \sqrt{6}$

$\Rightarrow BC = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$



$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle B = 30°$$

$\angle C = 60°$

$BD = x\sqrt{3}$, $CD = x \Rightarrow$ $x + x\sqrt{3} = 2\sqrt{2}$

$x(\sqrt{3}+1) = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$

$$S_{ACD} = \frac{AC \cdot DC \cdot \sin C}{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$