Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

116029

Шифр ______

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету Математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Бондаренко Виктория Игоревна

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Волжский, МОУ СШ №30

Регистрационный номер 6423

Вариант задания 8

Дата проведения «2» марта 2019 г.

Подпись участника ВБонд

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

шестьдесят один (подпись)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
12	12	12	10	15	0					61

(подпись)

116029

6029

Шифр ____________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 8

Задание №1

Пусть дано натуральное число n, оно по условию имеет десять натуральных делителей (включая единицу и само число), два из них простые, сумма равна 186.

Воспользуемся формулой для делителей числа
$n = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \cdot d^{m}$ и т.д.

В нашем случае всего два простых делителя то есть оно примет вид:
$p = a^{\alpha} \cdot b^{\beta}$.

Всего делителей число n $((\alpha+1)(\beta+1))$ или 10.

$(\alpha+1)(\beta+1) = 10$

Нужно подобрать два таких числа.
Им подходят $\alpha = 1$ и $\beta = 4$ произведение
числа 10 можно получить как (5 и 2).

$a = 5$ $b = 2$ Оба числа являются простыми.

Таким образом имеем:
$x = 2^4 \cdot 5^1 = 16 \cdot 5 = 80$

Ответ: Натуральное число, которое имеет 10 делителей, два из которых простые является число 80.

Задание №2

$\cos x - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 1$

Рассмотрим возможное значение $\sqrt{\sin y - \sin^2 x}$.

$-1 \leq \sin y \leq 1$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$\sin^2 x \leq 1$

Таким образом $\sqrt{\sin y - \sin^2 x}$ принимает значение 0. Достигает равенства 1 в случае когда:

Тогда $\cos x \leq 1$.

$1 - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \leq 0$

$\Downarrow$

$\cos x = 1$

$x = 2\pi k,\ k \in Z.$

$- \sqrt{\sin y} - \underbrace{\sqrt{\sin y - \sin^2 x}}_{=0} = 0$

тогда

$\sqrt{\sin y} = 0$

$\sin y = 0$

$y = \pi n,\ n \in Z.$

Таким образом, получаем, что

$x = 2\pi k,\ k \in Z$

$y = \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $x = 2\pi k,\ k \in Z$
$y = \pi n,\ n \in Z$

Задание №3

$y = f^{[2019]}(x)$

$f(x) = \log_2 \dfrac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{1 - \sin 3x}$

$f^{[n]}(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f(x)\ldots)}_{n\ \text{раз}}$

Рассмотрим значение функции $f(x)$.

$\log_2 \dfrac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{1 - \sin 3x} =$

$= \log_2 \dfrac{1-2\sin^2 x + 2\sin^2 x}{1-\sin 3x} =$

$= \log_2 \dfrac{1}{1-\sin 3x} =$

$= -\log_2(1-\sin 3x).$

Рассмотрим значение $\sin 3x$

$-1 \le \sin 3x \le 1$

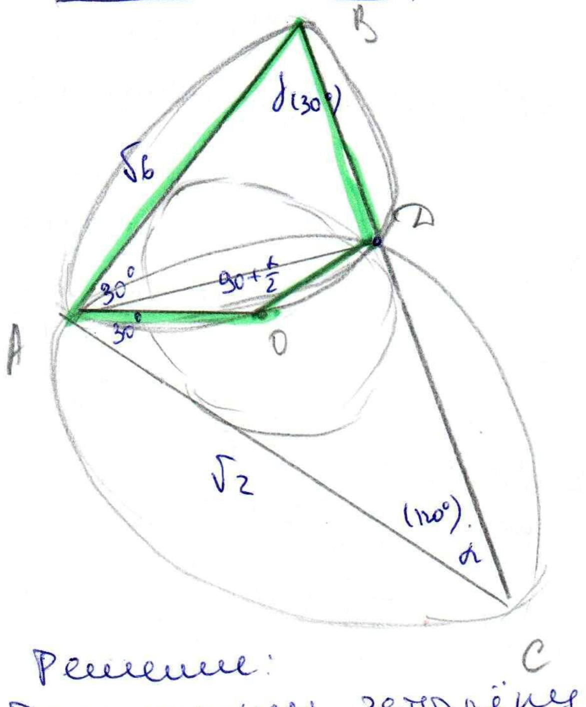
Пусть $\sin 3x = -1$ Тогда $f(x) = \log_2(1-1) =$
$= -1.$

Если $\sin 3x < 1$ то оно примет значение при $n > 0$ ~~$f(x) = 2n$~~ Запишем в виде $\frac{2^n-1}{2^n} < 1$, тогда получим $f(x) = -\log_2 2^{-n}$ то есть $f(x) = n$)

Имеем при $n > 0$ $-1 < f(x) < +\infty$.

Получаем ответ: ~~при~~ множество значений функции $y = f^{[2015]}(x)$ равно $[-1; +\infty)$.

Задание №4



Дано:
$\triangle ABC$
AD - биссектриса
$AC = \sqrt{2}$
$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{3}$ (радиус R_1 - окружность описанной около $\triangle ABD$, R_2 - радиус окружности описанной около $\triangle ACD$)

S_{ACD} - ?

Решение:
Рассмотрим четырёхугольник $ABDO$, он является вписанным тогда, если угол $BCA = \alpha$, то угол DOA равен $90 + \frac{\alpha}{2}$.

Пусть угол $ABC = \gamma$. Тогда имеем соотношение

$90 + \frac{\alpha}{2} + \gamma = 180$ (1)

Запишем теорему синусов в треугольнике ABD и ADC

$$\begin{cases} \frac{AD}{\sin\gamma} = 2R_1 \\ \frac{AD}{\sin\alpha} = 2R_2 \end{cases}$$

Поделим одно на другое получим $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{R_1}{R_2}$ (воспользуемся соотношением данным в условии).

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \sqrt{3}$$

$\sin\alpha = \sqrt{3}\sin\gamma$ (2)

Объединим (1) и (2)

$$\begin{cases} 90 + \frac{\alpha}{2} + \gamma = 180 \\ \sin\alpha = \sqrt{3}\sin\gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 180 - 2\gamma \\ \sin(180 - 2\gamma) = \sqrt{3}\sin\gamma \end{cases}$$

$$\sin 2\gamma = \sqrt{3}\sin\gamma$$

$$2\sin\gamma\cos\gamma = \sqrt{3}\sin\gamma$$

$$2\sin\gamma\cos\gamma - \sqrt{3}\sin\gamma = 0$$

$$\sin\gamma(2\cos\gamma - \sqrt{3}) = 0$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\gamma = 30^\circ.$$

$$\begin{cases} \gamma = 30^\circ \\ \alpha = 180 - 2\cdot 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 30^\circ \\ \alpha = 120^\circ. \end{cases}$$

Воспользуемся теоремой синусов для треугольника ABC.

$$\frac{AC}{\sin 30} = \frac{AB}{\sin 120^\circ}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{1/2} = \frac{AB}{\sqrt{3}/2}$$

$$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{2}$$

$AB = \sqrt{6}$ (аналогично вычислим все остальные стороны по теореме синусов.) как?

Тогда $S_{\triangle ACD} = S_{ABD} + S_{ADC} =$ решение?

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{3-\sqrt{3}}{4} = S_{\triangle ACD}$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 116029

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Задание №5

Вариант № 8

$\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}-\sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}=\cos 2x+(8-6a)\sin x-4a^2+6a+9$

имеют два корня на отрезке $[-\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{6}]$.

Пусть. $\cos 2x+8\sin x+9=a$, а $6a\sin x+4a^2-6a=b$.

Тогда данное выражение можно записать в виде

плохо обозначать, т.к. буква а занята

$a-b=b^3-a^3$.

Распишем полученную формулу получим:

$(a-b)(1+b^2+a^2+ab)=0$

вторая скобка всегда больше 0. Тогда единственный возможный вариант когда.

$a=b$

$\cos 2x+8\sin x+9=6a\sin x+4a^2-6a$.

$\cos 2x+8\sin x+9-6a\sin x-4a^2+6a=0$

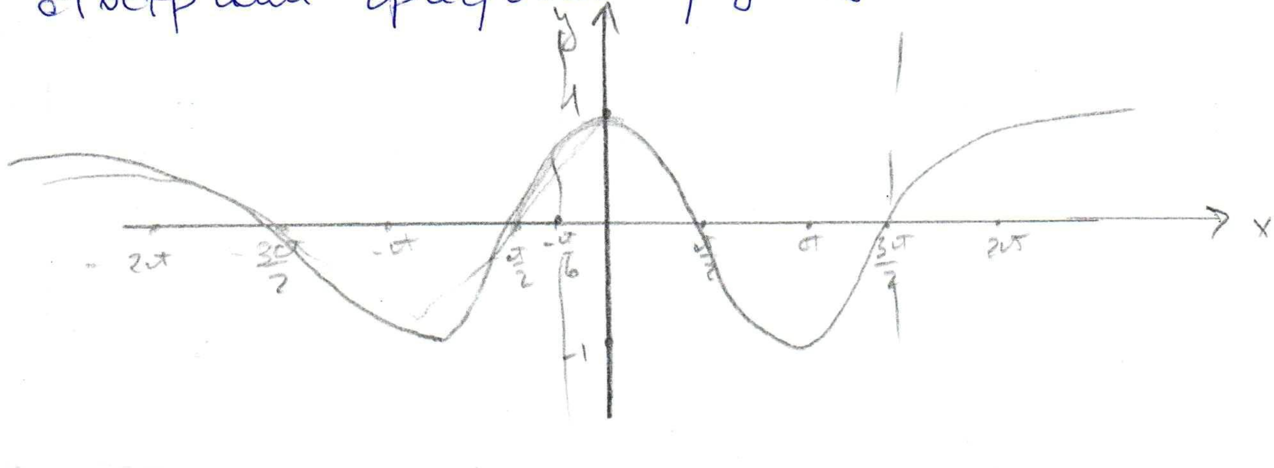
$2\sin x\cos x+8\sin x=4a^2-6a-9$.

$2\sin x\cos x+(8-6a)\sin x=4a^2-6a-9$. $2\sin^2 x+(6a-8)\sin x$

$\sin x(2\cos x+8-6a)=4a^2-6a-9$ $+4a^2-6a-10=0$

$\cancel{\sin x=\frac{4a^2-6a-9}{2\cos x+8-6a}}$ $D=4(a-6)^2$.

построим графики функции $\sin x$.



$D = 4(a-6)^2$

$\sin x = \frac{(4-3a) \pm (a-6)}{2}$

$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = -a-1 \\ \sin x = 5-2a \end{array} \right.$ $\quad \left\{ -\frac{\pi}{6} ; \frac{3\pi}{2} \right\}$

$-1 \le \sin x \le 1$

$\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \le a-1 \le 1 \\ -\frac{1}{2} \le 5-2a \le 1 \end{array} \right.$

$\sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\sin 0 = 0$

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$

$x = \arcsin x + 2\pi k$

$x = \pi - \arcsin x + 2\pi k$

отсюда

$a \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(2; \frac{11}{4}\right)$.

Ответ: $a \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right] \left(2; \frac{11}{4}\right]$

$\left.\begin{array}{l} x = \arcsin(5-2a) \\ x = \arcsin(-a-1) \end{array}\right\}$ второе решение