Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1

217014

Шифр ____________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Вакицкая Екатерина Сергеевна

Город, № школы (образовательного учреждения) „Инженерная школа" и 1581, 11 „М" класс, г. Москва.

Регистрационный номер 1665

Вариант задания 3

Дата проведения «17» марта 2019 г.

Подпись участника Вак

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12.	16.	5	5	5					55

217014

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

014

Вариант № 3

Задание №2

Решение:

$$tg\,x - \sqrt[4]{\cos y} - \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{\cos y} - 4} \geq \sqrt{3}$$

$$tg\,x - \sqrt[4]{\cos y} - \sqrt{\frac{1 + \cos^2 x \cdot \sqrt{\cos y} - 4\cos^2 x}{\cos^2 x}} \geq \sqrt{3}$$

$$tg\,x - \sqrt[4]{\cos y} - \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x\sqrt{\cos y} - 4\cos^2 x}{\cos^2 x}} \geq \sqrt{3}$$

$$tg\,x - \sqrt[4]{\cos y} - \sqrt{\frac{\cos^2 x(\sqrt{\cos y} - 3) + \sin^2 x}{\cos^2 x}} \geq \sqrt{3}$$

$$tg\,x - \sqrt[4]{\cos y} - \sqrt{\sqrt{\cos y} - 3 + tg^2 x} \geq \sqrt{3}$$

12

$$tg\,x - \sqrt[4]{\cos y} - \sqrt{3} \geq \sqrt{\sqrt{\cos y} - 3 + tg^2 x}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\cos y} - 3 + tg^2 x \geq 0 \\ (tg\,x - \sqrt[4]{\cos y})^2 - 2\sqrt{3}\,(tg\,x - \sqrt[4]{\cos y}) + 3 \geq \sqrt{\cos y} - 3 + tg^2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\cos y} \geq 3 - tg^2 x \\ \cancel{tg^2 x} - 2tg\,x\sqrt[4]{\cos y} + \cancel{\sqrt{\cos y}} - 2\sqrt{3}\,tg\,x + 2\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{\cos y} + 3 - \cancel{\sqrt{\cos y}} + 3 - \cancel{tg^2 x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \geq 0 \\ \frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{\cos y} - 4 \geq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим 3-е неравенст

$\sqrt{\cos y}$ максимальное

зн-ием принимает 1

Подставим его:

$$\frac{1}{\cos^2 x} + 1 - 4 \geq 0$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} \geq 3$$

$$\cos^2 x \leq \frac{1}{3}$$

$$\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{\cos y} \geq 4$, когда $\cos x = \pm\frac{1}{2}$, $\cos y = 1$

$$\begin{cases}\sqrt{\cos y} \geq 3-\operatorname{tg}^2 x\\ 6 - 2\operatorname{tg} x\sqrt[4]{\cos y} - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 2\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{\cos y} \geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{\cos y} \geq 3-\operatorname{tg}^2 x\\ 3 - \operatorname{tg} x\sqrt[4]{\cos y} - \sqrt{3}\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{\cos y} \geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{\cos y} \geq 3-\operatorname{tg}^2 x\\ \sqrt[4]{\cos y}\,(\sqrt{3}-\operatorname{tg} x) + \sqrt{3}(\sqrt{3}-\operatorname{tg} x) \geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{\cos y} \geq 3-\operatorname{tg}^2 x\\ (\sqrt[4]{\cos y}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\operatorname{tg} x) \geq 0\end{cases}$$ ✓

Рассмотрим две совокупности, вытекающие из нашей системы:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos y \geq (3-\operatorname{tg}^2 x)^2\\ 3-\operatorname{tg}^2 x \geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}\cos y \geq 0\\ 3-\operatorname{tg}^2 x \leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$\rightarrow$ не подходит, т.к. max зн-ние $\operatorname{tg} = \sqrt{3}$ и $(3-\operatorname{tg}^2 x)$ не может быть меньше 0.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[4]{\cos y}+\sqrt{3} \geq 0\\ \sqrt{3}-\operatorname{tg} x \geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[4]{\cos y}+\sqrt{3} \leq 0\\ \sqrt{3}-\operatorname{tg} x \leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$\rightarrow$ не подходит, т.к. $\sqrt[4]{\cos y} \leq -\sqrt{3}$ не может быть, потому что у корня чётная степень.

Рассмотрим окончательную систему:

$$\begin{cases}\cos y \geq (3-\operatorname{tg}^2 x)^2\\ 3-\operatorname{tg}^2 x \geq 0\\ \sqrt[4]{\cos y}+\sqrt{3} \geq 0\\ \sqrt{3}-\operatorname{tg} x \geq 0\end{cases}$$ ✓

$$\begin{cases}\cos y \geq (3-\operatorname{tg}^2 x)^2\\ \operatorname{tg}^2 x \leq 3 \rightarrow \operatorname{tg}^2 x \in [0;3]\\ \sqrt[4]{\cos y} \geq -\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos y \in [0;1]\\ \operatorname{tg}^2 x \in [0;3]\end{cases}$$ ✓

$\cancel{\cos y \geq 0}$

$$\begin{cases}\cos y \in [0;1]\\ \operatorname{tg} x \in [-\sqrt{3};\sqrt{3}]\end{cases}$$

т.к. $\cos x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \setminus \{0\}$, то $\sin x \in \left[-\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$ $\cancel{k\in Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, $y = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$

Ответ: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n \in Z$, $x \in \left[-\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}+\pi k; \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}+\pi k\right], k \in Z.$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

217014

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 3

Задание №3

Решение:

$a^2 - 2a \vdots b$

$a + 2b - 2 \vdots 4$

$a^2 + ab - 6b^2 - 8a - 19b + 7 = 0$ $\cancel{a^2 + ab - 6b^2}$

$a + 6b - 2$ – простое

16

$a^2 + a(b-8) + 7 - 19b - 6b^2 = 0$

$D = (b-8)^2 - 4(7 - 19b - 6b^2) = b^2 - 16b + 64 - 28 + 76b + 24b^2 =$

$= 25b^2 + 60b + 36 = (5b+6)^2$

$a_1 = \frac{8 - b + 5b + 6}{2} = \frac{14 + 4b}{2} = 7 + 2b$

$a_2 = \frac{8 - b - 5b - 6}{2} = \frac{2 - 6b}{2} = 1 - 3b$

$a + 6b - 2$ – простое

Подставим найденные зн-ния

$7 + 2b + 6b - 2$ – простое

$5 + 8b$ – простое

$1 - 3b + 6b - 2$ – простое

$3b - 1$ – простое

$\cancel{49 + 28b + 4b^2 \vdots b}$

$\cancel{7 + 2b + 2b - 2 = 5 + 4b \vdots 4}$

Рассмотрим 2 случая

$$\begin{cases} 5+8b - \text{простое} \\ 49+28b+4b^2-14-4b \,\vdots\, b \\ 7+2b+2b-2 \,\vdots\, 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3b-1 - \text{простое} \\ 1-\cancel{6b}+9b^2\cancel{6b}-2+\cancel{6b} \,\vdots\, b \\ 1-3b+2b-2 \,\vdots\, 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5+8b - \text{простое} \\ 4b^2+24b+35 \,\vdots\, b \\ 4b+5 \,\vdots\, 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3b-1 - \text{простое} \quad 1,2,4,6,8 \\ 9b^2-1 \,\vdots\, b \\ -1-b \,\vdots\, 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5+8b - \text{простое} \\ 35 \,\vdots\, b \\ 4b+5 \,\vdots\, 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3b-1 - \text{простое} \\ 1 \,\vdots\, b \\ -1-b \,\vdots\, 4 \end{cases}$$

~~Проверим $b = 5; 1; 7; 35$~~

~~5 - не подходит~~

~~1 - не подходит~~

Утверждение 3 - ложно, т.к. не могут значения a и b удовлетворять ему.

Перепишем новое условие:

$$\begin{cases} 5+8b - \text{простое} \\ 35 \,\vdots\, b \end{cases} \qquad \begin{cases} 3b-1 - \text{простое} \\ 1 \,\vdots\, b \end{cases}$$

Проверим делители 35:

1 - подходит

5 - не подходит

7 - подходит

35 - не подходит

$1 \,\vdots\, 1 \Rightarrow 1$ - подходит. ($3-1$ - простое).

при $b = 1$ $a = 9$

при $b = 7$ $a = 21$

при $b = 1$ $a = -2$

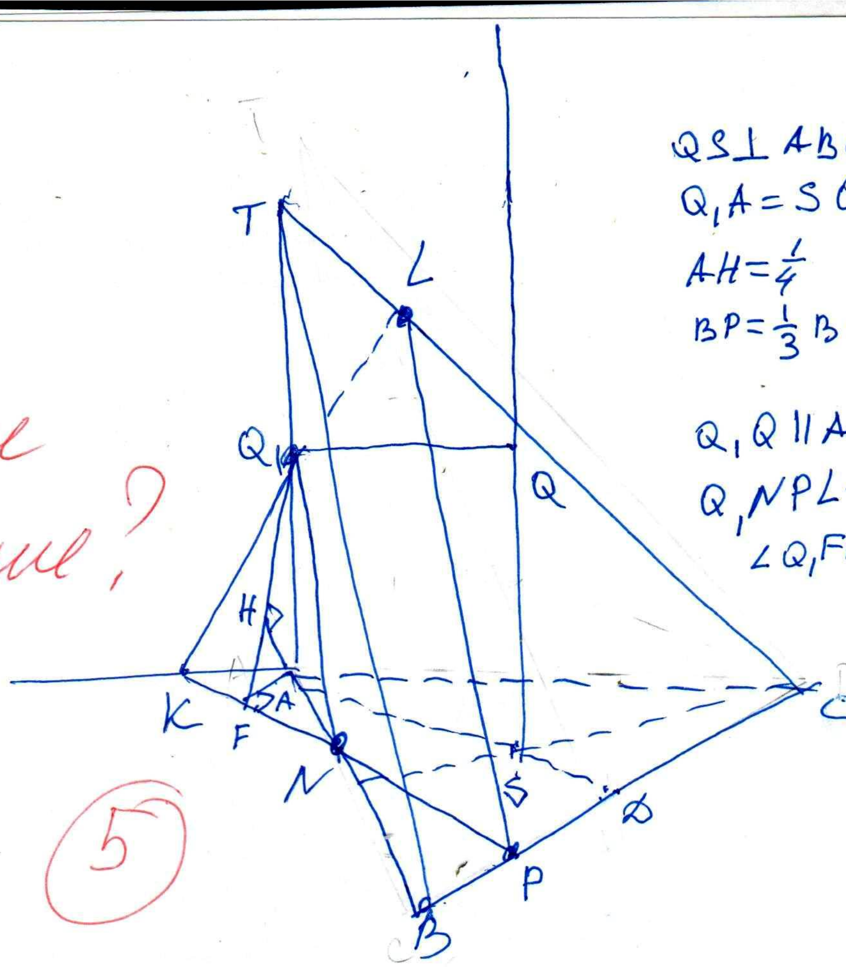
Проверим все условия: $81-18 \,\vdots\, 1$, $9+6-2$ - простое

$81+9-6-72-1\ 9+7=0$

Ответ: $a=1; 9=b$; $b=7$, $a=21$

Задание №6

Решение:



$QS \perp ABC$

$Q_1A = SQ$

$AH = \frac{1}{4}$

$BP = \frac{1}{3} BC$

$Q_1Q \parallel AS$

Q_1NPL – иск. S

$\angle Q_1FA = 30^0$

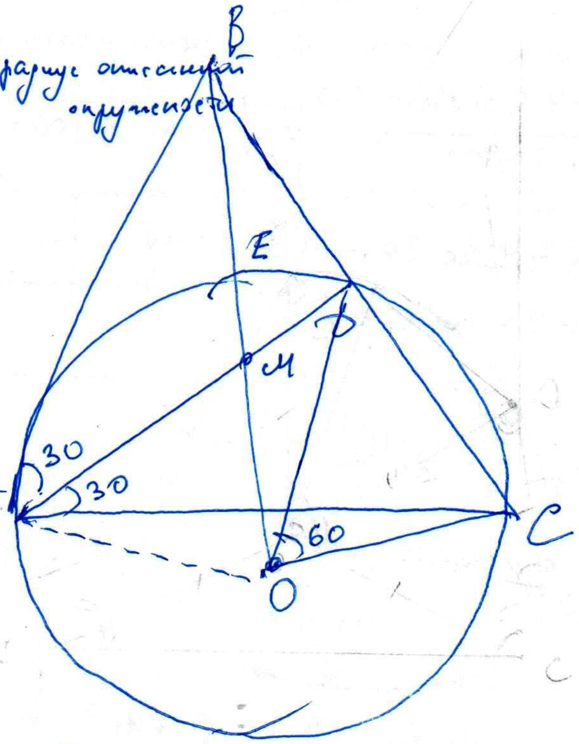
решение дальше?

5

Задание №4

Решение:

$R = \frac{\sqrt{3}}{3}$ R – радиус описанной окружности



1) По св-ву биссектрисы $AB = 0{,}5$

$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$ V

2) $S_{ADC} = \frac{AD \cdot DC \cdot AC}{4R}$

3) $\frac{DC}{\sin 30^\circ} = 2R$ (теорема синусов)

$DC = \frac{2R \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ V.

Значит, $\triangle ODC$ – р/ст со стороной $\frac{\sqrt{3}}{3}$ V. и углами по 60°.

$\angle EOD = 60^\circ$, как центральный, потому что вписанный угол $\angle EAD = 30^\circ$

$EO \parallel DC$ (т.как н/л углы при этих прямых равны) => $EDCO$ – ромб (т.к. у этого чет-ка все стороны равны)

$EC = 2R \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.$

Задание №5.

Решение:

$$\log_5 \frac{(\sin x - 4)\cos 2a - 3\sqrt{3}}{3\sin 2a \cos x} = |3\sin 2a \cos x| - |(4-\sin x)\cos 2a + 3\sqrt{3}|$$

$\exists$ $\sin x - 4\cos 2a - 3\sqrt{3} = m$

$3\sin 2a \cos x = b$

Тогда:

$\log_5 \frac{m}{b} = |b| - |-m|$ $\frac{m}{b} > 0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > 0 \\ b > 0 \end{cases} \quad b = m \text{ (возр. ф.)} \\ \begin{cases} m < 0 \\ b < 0 \end{cases} \quad \varnothing. \end{array}\right.$

Рассмотрим 2 случая:

$m > 0$
$b > 0$
$\log_5 \frac{m}{b} = b - m$

$m < 0$
$b < 0$
$\log_5 \frac{m}{b} = -b + m$

5

Задание №1.

Решение:

if $n \le 19$, $n = n + 4$

if $n \geq 20$, $n = |129 - 2n|$

$n_0 = 7$ — красный.

$n_1 = 11$

$n_2 = 15$

$n_3 = 19$ — оранжевый

$n_4 = 23$ — желтый

$n_5 = 129 - 46 = 83$ — синий

$n_6 = |129 - 166| = 37$ — зеленый

$\cancel{n_7} = |129 - 37| = 92$ $n_7 = |129 - 74| = 55$ — голубой.

$n_8 = |129 - 110| = 19$ — оранжевый

$n_9 = 23$ — желтый — Отв.

Далее идёт закономерность: оранжевый, желтый, синий, зеленый, голубой.

$n_{2015} = n_7$

Отв: голубой