Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1 АрА

Шифр 418013

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Володин Михаил Владимирович

Город, № школы (образовательного учреждения) Волжский, МОУ СШ №30

Регистрационный номер 8797

Вариант задания 7

Дата проведения «2» марта 2019 г.

Подпись участника Володин

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
15	15	15	15	20	X					80б.
15	15	15	15	20	0					

Шифр 418013

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

$\Sigma = 80$

Вариант № 7

№1

Пусть для определённости $a \geq b$.

$a+b=\sqrt{2019}$, т.е. $a+b>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ b>0\end{cases}\\ \begin{cases}a\geq 0\\ b<0\end{cases}\end{array}\right.$

$ab=248{,}75$, т.е. $ab>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ b>0\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ b<0\end{cases}\end{array}\right.$

У этих двух совокупностей 1 общий вариант: $\begin{cases}a>0\\ b>0\end{cases}$

Тогда расстояние от a до b на числовой оси равно $a-b$.

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=a^2+2ab+b^2-4ab=(a+b)^2-4ab=$

$=(\sqrt{2019})^2-4\cdot 248{,}75=2019-995=1024$

$a-b=\sqrt{1024}=32$

Ответ: 32

№2

$$\left(\frac{y^2+6y-4x-7}{4x^2+12x}-1\right)^2+(x^2+4x-y-2)^2=0$$

По смыслу задачи $4x^2+12x\neq 0$

$\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq -3\end{cases}$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{y^2+6y-4x-7}{4x^2+12x}-1\right)^2\geq 0\\ (x^2+4x-y-2)^2\geq 0\\ \left(\dfrac{y^2+6y-4x-7}{4x^2+12x}-1\right)^2+(x^2+4x-y-2)^2=0\end{cases}, \text{ т.к. } a^2\geq 0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{y^2+6y-4x-7}{4x^2+12x}-1\right)^2=0\\ (x^2+4x-y-2)^2=0\end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2+6y-4x-7}{4x^2+12x} - 1 = 0 \\ x^2+4x-y-2=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y^2+6y-4x-7 = 4x^2+12x \\ x^2+4x-2=y \end{cases} ; \quad \begin{cases} y^2+6y+9 = 4x^2+16x+ \\ x^2+4x+4 = y+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+3)^2 = (2x+4)^2 \\ (x+2)^2 = y+6 \end{cases}$$

$$4(x+2)^2 = (2x+4)^2 = 4(y+6) = (y+3)^2$$

$$4(y+6) = (y+3)^2$$

$$4y+24 = y^2+6y+9$$

$$y^2+2y-15=0$$

$$\left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-5 \end{array}\right.$$

15

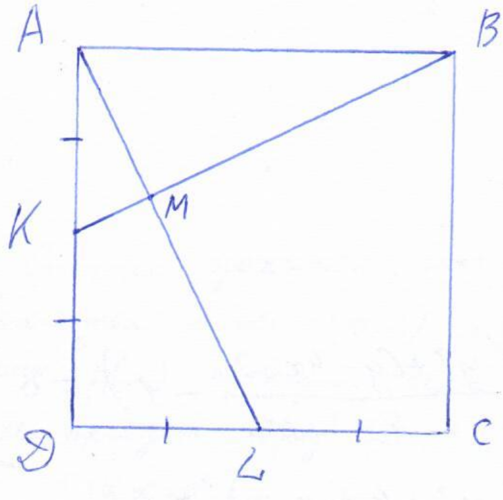
$$y=3 \Rightarrow (x+2)^2=9 \quad \left[\begin{array}{l} x+2=3 \\ x+2=-3 \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$$

$$y=-5 \Rightarrow (x+2)^2=1 \quad \left[\begin{array}{l} x+2=1 \\ x+2=-1 \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Однако в начале решение мы указали, что $x \neq -3$.
Таким образом, имеем 3 точки, которые являются решениями исходного уравнения: $(1;3)$, $(-5;3)$, $(-1;-5)$

Ответ: $(1;3)$, $(-5;3)$, $(-1;-5)$.

№3



Дано:

$S_{ABCD} = 100$, $AB=BC=CD=AD$

Найти:

S_{KMLD} - ?

Решение:

$S_{ABCD}=100 \Rightarrow AB=BC=CD=AD=10$

$AK=KD=DL=CL=\frac{1}{2}AD=5$

$AB = AD$ (по усл.)
$AK = DL$ (половины равных отрезков)
$90° = \angle KAB = \angle LDA$ (по усл.)

$\Rightarrow$ $\triangle AKB = \triangle DLA$ по 2 сторонам и углу между ними

Тогда $\angle ABK = \angle LAD = \alpha$

Тогда $\angle BAM = 90° - \alpha$, $\angle AMB = 180° - (90° - \alpha) - \alpha = 90°$

$\angle AMK = 90°$ (смежный с $\angle AMB$) $= \angle BAK$
$\angle MAK = \alpha = \angle ABK$

$\Rightarrow$ $\triangle AMK \sim \triangle BAK$ по 2 углам с коэффициентом подобия $\frac{KB}{AK} = \frac{\sqrt{AB^2 + AK^2}}{AK} = \frac{\sqrt{125}}{5} = \sqrt{5}$

$$AM = \frac{AB}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

$$KM = \frac{AK}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$S_{AMK} = \frac{AM \cdot MK}{2} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{2} = 5$$

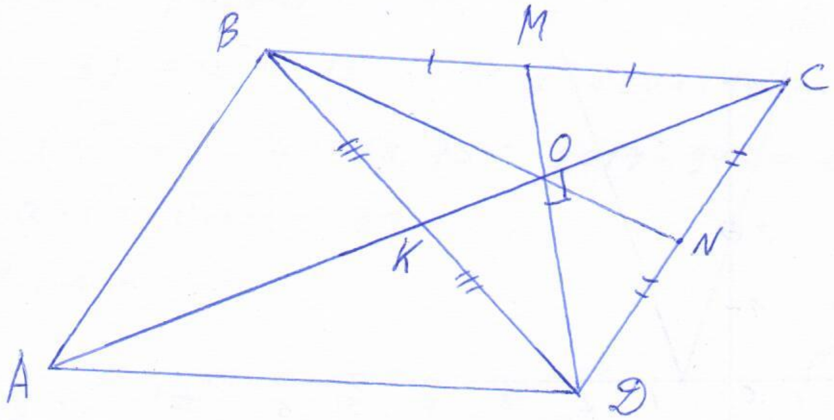
$$S_{ADL} = \frac{AD \cdot DL}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25$$

$$S_{KMLD} = S_{ADL} - S_{AMK} = 25 - 5 = 20$$

Ответ: 20

15

N 5



Дано:
$DM \perp AC$
$ABCD$ - параллелограмм
$BM = MC$
$CN = ND$
$CD = 6$

Найти:
BN - ?

Решение:

Проведём диагональ BD. По св-ву параллелограмма $BK = KD$, где K - точка пересечения диагоналей AC и BD.

В $\triangle BCD$ оказались проведены 3 медианы: DM, BN и CK. По теореме о трёх медианах, DM, BN и CK пересекаются в одной точке. Обозначим её за точку O.

$\angle COD = 90°$ (по усл.)
ON - медиана к гипотенузе

$\Rightarrow$ $ON = CN = ND = \frac{1}{2} CD = 3$

По теореме о трёх медианах, $\frac{BO}{ON} = \frac{2}{1}$

$BO = 2\,ON = 2 \cdot 3 = 6$

20

$BN = BO + ON = 6 + 3 = 9$

Ответ: 9

№4

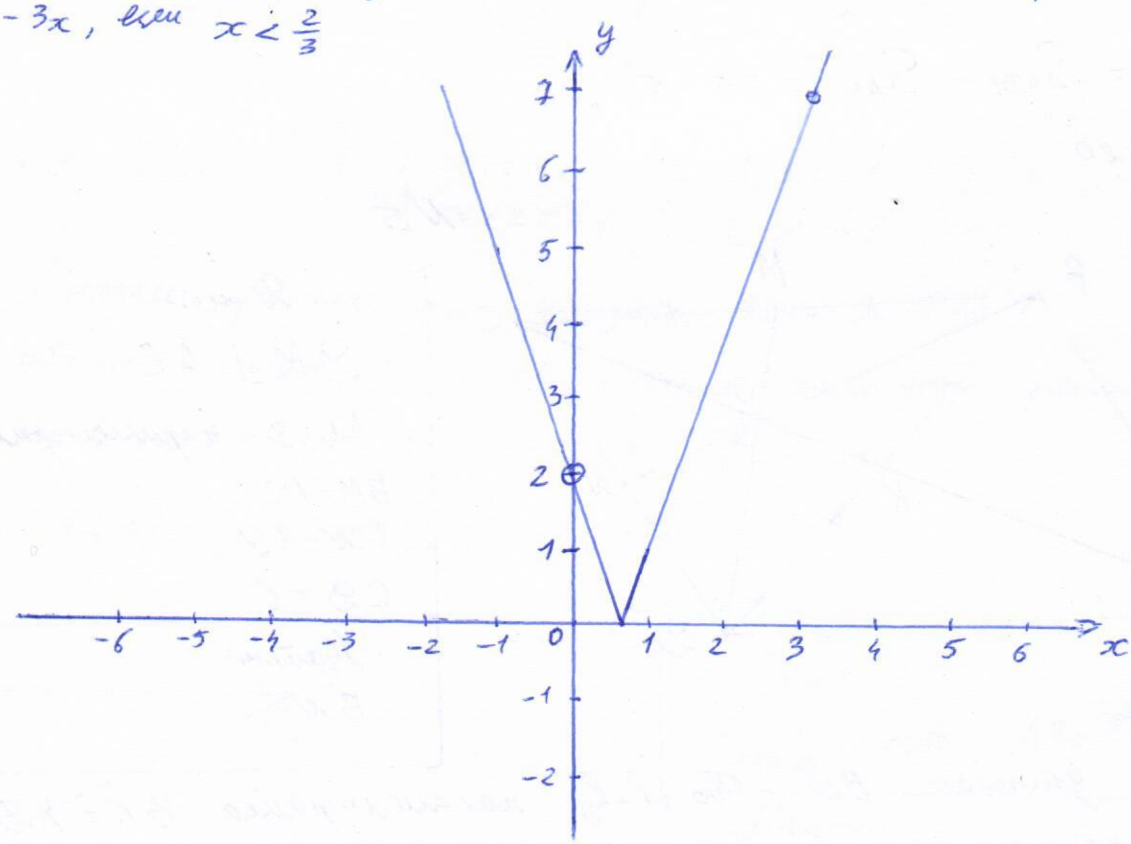
$f(x) = \left| \frac{x^2 - 6x + 9}{3 - x} + \frac{4x^2 - 5x}{x} \right|$ По смыслу задачи $\begin{cases} 3 - x \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$p(x) = |x + a|$

$f(x) = \left| \frac{x^2 - 6x + 9}{3 - x} + \frac{4x^2 - 5x}{x} \right| = \left| \frac{(3-x)^2}{3-x} + \frac{(4x-5)x}{x} \right| = |3 - x + 4x - 5| =$

$= |3x - 2|$

$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, \text{ если } x \geq \frac{2}{3} \\ 2 - 3x, \text{ если } x < \frac{2}{3} \end{cases}$ Построим график $f(x)$:



Сначала докажем, что $p(x)$ график никогда не пройдёт через обе выколотые точки $(0;2)$ и $(3;7)$ сразу. Пусть $p_1(x) = |Kx + a|$. Если график $p_1(x)$ проходит через $(0;2)$ и $(3;7)$ при $K \neq 1$, то график $p(x)$ никогда не пройдет через $(0;2)$ и $(3;7)$ вместе.

$\begin{cases} |Kx + a| = 2 \\ x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $|a| = 2$ $\left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -2 \end{array}\right.$ При $a = 2$, $K = \frac{5}{3}$ или $K = -3$

При $a = -2$, $K = 3$ или $K = -\frac{5}{3}$

$\begin{cases} |Kx + a| = 7 \\ x = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} |3K + a| = 7 \\ x = 3 \end{cases}$

K никогда не равно 1

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 418013

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 7

№4 (продолжение)

I. График $p(x)$ пересекает графика $f(x)$ в точке $(0;2)$.

$\begin{cases} p(x)=2 \\ x=0 \end{cases}$; $\begin{cases} |x+a|=2 \\ x=0 \end{cases}$; $\begin{cases} |a|=2 \\ x=0 \end{cases}$ => $\left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-2 \end{array}\right.$

В обоих случаях ($a=2$ и $a=-2$) пересечение будет не только в точке $(0;2)$, ~~т.к. угловые коэффициенты обеих ветвей графика $f(x)$ больше угловых коэффиц~~ обе ветви графика $f(x)$ более крутые, чем соответствующие ветви графика $p(x)$. Т.к. $(0;2) \notin f(x)$, решение будет одно.

II. График $p(x)$ пересекает график $f(x)$ в точке $(3;7)$

$\begin{cases} p(x)=7 \\ x=3 \end{cases}$; $\begin{cases} |x+a|=7 \\ x=3 \end{cases}$; $|3+a|=7$; $\left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-10 \end{array}\right.$

В обоих этих случаях ($a=4$ и $a=-10$) таким же образом будет одно решение.

III. Графики $p(x)$ и $f(x)$ пересекаются в точке $(\frac{2}{3};0)$

$\begin{cases} p(x)=0 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$ $|\frac{2}{3}+a|=0$ $a=-\frac{2}{3}$

Т.к. обе ветви графика $p(x)$ более пологие, чем соответствующие ветви графика $f(x)$, решение будет только одно.

Ответ: при $\left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-2 \\ a=4 \\ a=-10 \\ a=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$

+