Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

217046

+1
+1
+1
+1

Шифр ____________
(заполняется ответственным
секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Горшков Александр Сергеевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва
Школа N 1502 при МЭИ.

Регистрационный номер 944

Вариант задания 1

Дата проведения «17» марта 2019 г.

Подпись участника ГАС

(сто)

217046

7046

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

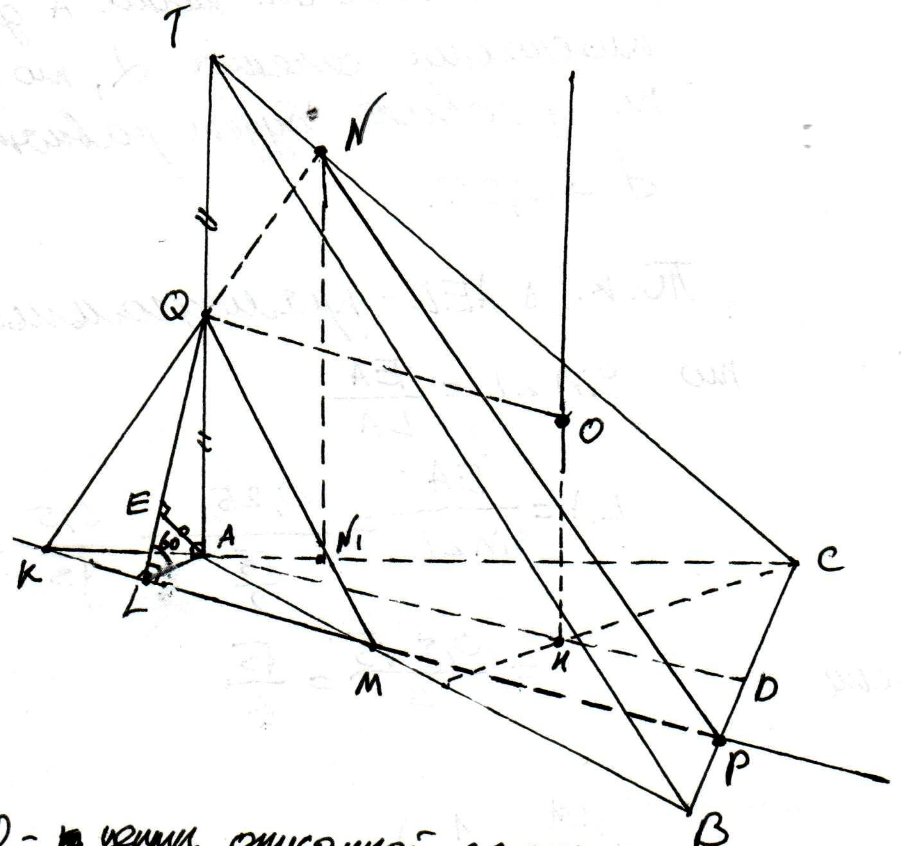
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
12	12	16	20	20	20					100

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 1

№6.



Дано:

$AC = AB = CB = \sqrt{3}$

$(\widehat{\alpha; (ABC)}) = 60^\circ$

$MB = 2AM$

$d = 0{,}25$

Найти:

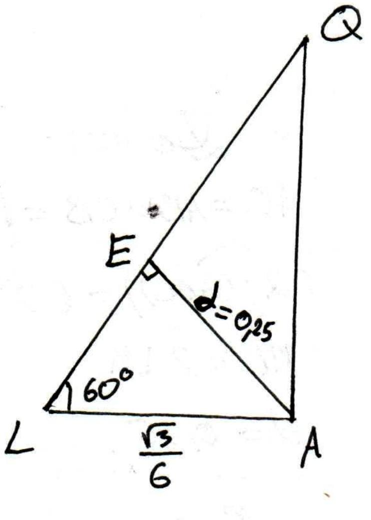
$S_{сечения} = ?$

О - центр описанной сферы около пирамиды TABC.
Опустим перпендикуляр в точку К пересечения медиан △ABC, т.к. △ABC - равносторонний, то точка К - центр △ABC, и значит данный перпендикуляр будет являться Г.М.Т, равноудалённых от вершин △ABC, поэтому точка O будет лежать где-то на этом перпендикуляре.

Допустим, что плоскость сечения α пересекает (ABC) по некой прямой MP, где P ∈ BC. Продолжим прямую MP за точку M и опустим на неё перпендикуляр из точки A. Данный перпендикуляр будет пересекать MP в точке L.

Восстановим перпендикуляр QL, принадлежащий плоскости сечения α, тогда угол $\angle QLA = 60^\circ$, как угол между двумя плоскостями по условию. QL будет являться перпендикуляром по теореме о трёх перпендикулярах $(TA \perp (ABC)); (AL \subset (ABC)) \Rightarrow TA \perp AL$

Рассмотрим ΔQLA:



Проведём перпендикуляр из точки A в ΔQLA.

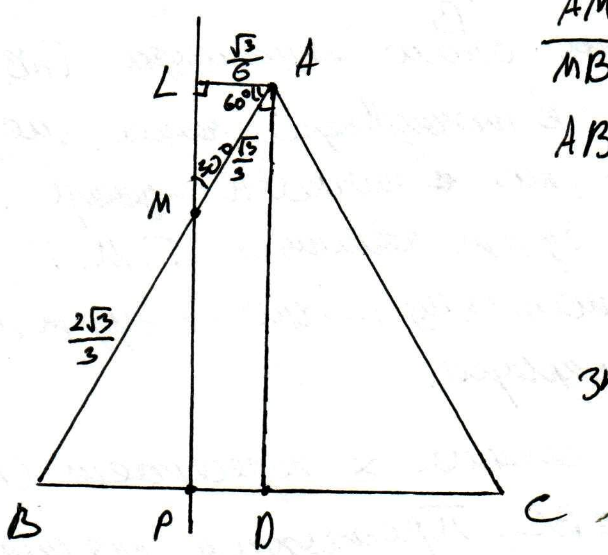
Данный перпендикуляр будет расстоянием от точки A до плоскости сечения α, то есть по условию будет равняться $d = 0{,}25$.

Т.к. ΔAEL - прямоугольный, то $\sin\angle L = \frac{EA}{LA}$

$$LA = \frac{EA}{\sin\angle L} = \frac{0{,}25}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{3}} = $$

$$= \frac{0{,}5\cdot\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Рассмотрим плоскость основания TABC:



$$\left.\begin{array}{l}\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}\\ AB = \sqrt{3}\end{array}\right\} \Rightarrow 3AM = \sqrt{3}$$

$$AM = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$MB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ΔALM - прямоугольный, значит AM - гипотенуза.

Т.к. $AM = 2AL$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{6}_3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

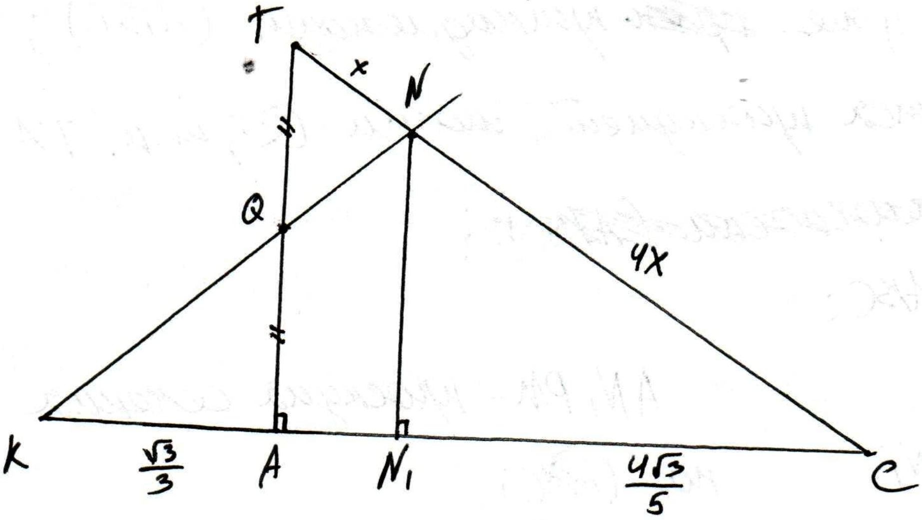
217046

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 1

Рассмотрим KQTC:



По теореме Менелая:

$$\frac{TN}{NC}\cdot\frac{CK}{KA}\cdot\frac{AQ}{QT}=1$$

$$\frac{TN}{NC}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{1}=1$$

$$\frac{TN}{NC}=\frac{1}{4}$$

Для того, чтобы найти площадь сечения QNPM, необходимо найти площадь проекции данного сечения на (ABC), а ~~что~~ потом поделить площадь проекции на косинус угла между (ABC) и ~~площадь~~ плоскостью сечения α.

Спроецируем все вершины QNPM на (ABC), для этого опустим перпендикуляры из данных точек на (ABC)

N_1 – проекция N на (ABC) ($\angle NN_1C = 90°$)

$\Delta NN_1C \sim \Delta TAC$ (по 2 углам).

17. $\angle C$ - обтуит

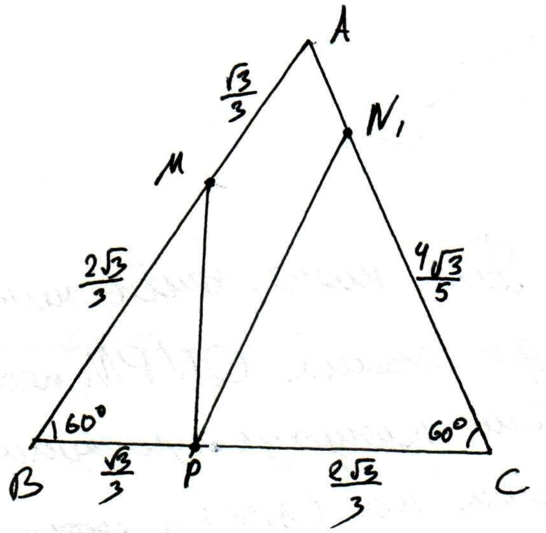
21. $\angle NN_1C = \angle TAC = 90°$ (т.к. TA - высота пирамиды TA

Значит:

$$\frac{CW}{CT} = \frac{CN_1}{CA}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{CN_1}{CA} = \dfrac{4}{5} \\ CA = \sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow CN_1 = \frac{4}{5}AC = \frac{4}{5}\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{5}$$

Точки M и P уже ~~прин~~ принадлежат (ABC);
Точка A является проекцией точки Q, т.к. TA - выс
~~Рассмотрим плоскость (ABC)~~.
Рассмотрим ΔABC:



AN_1PM - проекция сечения QNP на (ABC).

$$S_{AN_1PM} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta N_1CP} - S_{\Delta BMP}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin\angle C = $$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\Delta N_1CP} = \frac{1}{2}\cdot N_1C \cdot PC \cdot \sin\angle C = $$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{10} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$S_{\Delta BMP} = \frac{1}{2}\cdot BM \cdot BP \cdot \sin\angle B = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$S_{AN_1PM} = \frac{3\sqrt{3}}{4}^{\backslash 15} - \frac{2\sqrt{3}}{5}^{\backslash 12} - \frac{\sqrt{3}}{6}^{\backslash 10} = \frac{45\sqrt{3} - 24\sqrt{3} - 10\sqrt{3}}{60} = \frac{11\sqrt{3}}{60}$$

29

$$S_{сечения} = \frac{S_{AN_1PM}}{\cos\angle QLA} = \frac{\frac{11\sqrt{3}}{60}}{\frac{1}{2}} = \frac{11\sqrt{3}\cdot 8}{60_{30}} = \frac{11\sqrt{3}}{30}$$

Ответ: $\frac{11\sqrt{3}}{30}$

√

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 217046

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 1

$$\frac{-3\sqrt{3}-4\cos a}{\sqrt{\cos^2 a+9\sin^2 a}} \geq -1$$

$-3\sqrt{3}-4\cos a \geq -\sqrt{\cos^2 a+9\sin^2 a} \quad | :(-1)$

$3\sqrt{3}+4\cos a \leq \sqrt{\cos^2 a+9\sin^2 a}$

Т.к. $3\sqrt{3}+4\cos a > 0$ из выше доказанного, то можно возвести данное неравенство в квадрат:

$(3\sqrt{3}+4\cos a)^2 \leq \cos^2 a+9\sin^2 a$

$27+24\sqrt{3}\cdot\cos a+16\cos^2 a \leq \cos^2 a+9\sin^2 a$

$27+24\sqrt{3}\cdot\cos a+16\cos^2 a \leq 9-8\cos^2 a$

$24\cos^2 a+24\sqrt{3}\cos a+18 \leq 0 \quad | :6$

$4\cos^2 a+4\sqrt{3}\cos a+3 \leq 0$

$(2\cos a+\sqrt{3})^2 \leq 0$

$(2\cos a+\sqrt{3})^2 = 0$

$2\cos a+\sqrt{3}=0$

$\cos a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) $a = \frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z$

2) $a = -\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z$

Найдём x при $a=\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z$:

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}+9\cdot\frac{1}{4}}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{3\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = -\frac{1}{2}\\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-3\sqrt{3}-4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -1$$

$$x-\frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ k\in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{2}^{\backslash 3}+\frac{2\pi}{3}^{\backslash 2}+2\pi k = \frac{-3\pi+4\pi}{6}+2\pi k = \frac{\pi}{6}+2\pi k;\ k\in Z$$

Найдём значение x при $a = -\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z$:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\\ \sin\varphi = \frac{3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{4\pi}{3}$$

$$\sin\left(x-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{-3\sqrt{3}-4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{3}} = -1$$

$$x-\frac{4\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}+2\pi l;\ l\in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{2}^{\backslash 3}+\frac{4\pi}{3}^{\backslash 2}+2\pi l = \frac{-3\pi+8\pi}{6}+2\pi l = \frac{5\pi}{6}+2\pi l;\ l\in Z$$

Ответ: при $a = \frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z$

$x = \frac{\pi}{6}+2\pi k;\ k\in Z$

при $a = -\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z$

$x = \frac{5\pi}{6}+2\pi l;\ l\in Z$

при $a \neq \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z$

$x = \varnothing$

20

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 217046

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 1

По теореме Пифагора в ΔABD:

$AD^2 = AB^2 + BD^2$

$AD = \sqrt{1+\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Значит $AD = AO = OD \Rightarrow \Delta ADO$ – равносторонний.

$\angle DAO = 60^\circ$

Поэтому $\angle BAO = \angle BAD + \angle DAO = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta BAO$ – прямоугольный.

По теореме Пифагора $BO = \sqrt{AB^2 + AO^2} = \sqrt{1+\frac{4}{3}} =$

$= \sqrt{\frac{7}{3}}$

Т.к. $\angle ABD = \angle BAO = 90^\circ$, то $BD \parallel AO$.

$\Delta AMO \sim \Delta BMD$ (по 2 углам):

1). $\angle AMO = \angle BMD$ (как вертикальные)

2). $\angle MBD = \angle MOA$ (как накрест лежащие при $BD \parallel AO$)

Значит: $\frac{BM}{MO} = \frac{BD}{AO}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{BM}{MO} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\cancel{\sqrt{3}} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 2\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \\ BO = \sqrt{\frac{7}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow BM = \frac{1}{3} BO = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} =$$

$= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3} \cdot 3} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{21}}{9}$

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{9}$

20

V

№2. $\sqrt{3}\,tg\,x - \sqrt[4]{\sin y} - \sqrt{\frac{3}{\cos^2 x} + \sqrt{\sin y} - 6} \geq \sqrt{3}$

$\sqrt{3}\,tg\,x - \sqrt[4]{\sin y} - \sqrt{3(tg^2 x + 1) + \sqrt{\sin y} - 6} \geq \sqrt{3}$

$\sqrt{3}\,tg\,x - \sqrt[4]{\sin y} - \sqrt{3tg^2 x + \sqrt{\sin y} - 3} \geq \sqrt{3}$

$t = tg\,x$

$g = \sqrt[4]{\sin y}$; $g \in [0; +\infty)$

$\sqrt{3}t - g - \sqrt{3t^2 + g^2 - 3} \geq \sqrt{3}$

$\sqrt{3}t - g \geq \sqrt{3} + \sqrt{3t^2 + g^2 - 3}$

т.к $\sqrt{3t^2+g^2-3} \geq 0$, то $\sqrt{3} + \sqrt{3t^2+g^2-3} > 0$, значит $\sqrt{3}t - g > 0$, поэтому мы можем возвести в квадрат всё неравенство.

$(\sqrt{3}t - g)^2 \geq \left(\sqrt{3} + \sqrt{3t^2+g^2-3}\right)^2$

$\cancel{3t^2} - 2\sqrt{3}tg + \cancel{g^2} \geq \cancel{3} + 2\sqrt{3(3t^2+g^2-3)} + \cancel{3t^2} + \cancel{g^2} - \cancel{3}$

$-2\sqrt{3}tg \geq 2\sqrt{9t^2 + 3g^2 - 9}$

т.к. $2\sqrt{9t^2+3g^2-9} \geq 0$, то $-2\sqrt{3}t \cdot g \geq 0$, но

$\sqrt{3}t - g > 0$

$\sqrt{3}t > g$

$t > \frac{g}{\sqrt{3}}$; т.к. $g \in [0; +\infty)$, то $t > 0$

неравенство $-2\sqrt{3}tg \geq 0$ может иметь решения при $t > 0$ и $g \in [0; +\infty)$ тогда и только тогда, когда $g = 0$.

Значит: $0 \geq 2\sqrt{9t^2 + 0 - 9}$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 217076

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 1

№3. Рассмотрим утверждения 3). и 4).
Если $a+2b+1 \vdots 4$ - истина, то a - нечётное число, т.к. $2b+1$ - всегда нечётное, а на 4 делятся только чётные числа, поэтому a - нечётное.
Но тогда утверждение $a+6b+1$ - простое число ложно: a - нечётное; $6b+1$ всегда нечётное, сумма 2 нечётных чисел даёт нам чётное. А чётное число не может быть простым.
Точно так же и наоборот:
Если $a+6b+1$ - простое число - истина, то a - чётное, но это обращает третье утверждение в ложь. Значит 1 из них точно ложно, поэтому 1). и 2). утверждения точно истины.
Рассмотрим 1). утверждение: $a^2+4a+3 \vdots 6$ - истина
$a^2+4a+3 = (a+3)(a+1) \vdots 6$.

Рассмотрим 2) утверждение $a^2+ab-6b^2-2a-16b-8=0$ истина

$$a^2+ab-6b^2-2a-16b-8=0$$

~~$a^2+a(b-2)-6b^2-16b-8=0$~~

~~$D=(b-2)^2+4(6b^2+16b+8)=$~~

~~$=b^2-4b+4+24b^2+64b+32=25b^2+60b+36=(*)$~~

~~$25b^2+60b+36=0$~~

~~$D=3600-36\cdot25\cdot4=0$~~

~~$b=\frac{-60}{50}=-\frac{6}{5}$~~

~~$(*)=(b+\frac{6}{5})^2$; $\sqrt{D}=|b+\frac{6}{5}|$~~

~~$a=\frac{-(b-2)\pm|b+\frac{6}{5}|}{2}$; т.к. $b\in N$, то $|b+\frac{6}{5}|=b+\frac{6}{5}$~~

~~$a_1=\frac{-b+2+b+\frac{6}{5}}{2}=\frac{2+\frac{6}{5}}{2}=\frac{\frac{16}{5}}{2}=\frac{16}{10}=1,6$~~

~~$a_2=\frac{-b+2-b-\frac{6}{5}}{2}=\frac{-2b+\frac{4}{5}}{2}$ | при $b\in N$ $\frac{-2b+\frac{4}{5}}{2}$~~

$$6b^2+16b-ab-a^2+2a+8=0$$

$$6b^2-b(a-16)-(a^2-2a-8)=0$$

$$D=(a-16)^2+24(a^2-2a-8)=a^2-32+256+24a^2-48a-192$$

$$=25a^2-80a+64=(a-\tfrac{8}{5})^2\cdot 25\ ;\ \sqrt{D}=5|a-\tfrac{8}{5}|$$

$b=\frac{a-16\pm5|a-\frac{8}{5}|}{12}$ При $a=1$: $b\notin N$

При $a>1$: $|a-\frac{8}{5}|=a-\frac{8}{5}$

$$b=\frac{a-16+5a-8}{12}=\frac{6a-24}{12}=\frac{1}{2}a-2$$

$b=\frac{a-16-5a+8}{12}$; $b=\frac{-4a-8}{12}$; при $a\geq1$ $b<0$

$b=\frac{1}{2}a-2$ – истина

$b=\frac{a-4}{2}$

$2b=a-4$

$a=2b+4$ подставим его в 1). утверждение

$(2b+4+3)(2b+1)=(2b+7)(2b+1)=$

$=4b^2+2b+14b+7=4b^2+16b+7$.

$4b^2+16b\ \vdots\ 6 \Rightarrow 7\ \vdots\ 6$

$b=\{1;7\}$

~~При~~ При $b=1$ при $b=7$

$a=6$ $a=18$

т.к. a – чётные, то 4). утверждение истина, а 3). – ложно.

$\begin{cases} b=1 \\ a=6 \end{cases} \Rightarrow 6+6\cdot1+1=13$ – простое число

$\begin{cases} b=7 \\ a=18 \end{cases} \Rightarrow 18+6\cdot7+1=18+43=61$ – простое число.

Ответ: $\begin{cases} a=6 \\ b=1 \end{cases}$; $\begin{cases} a=18 \\ b=7 \end{cases}$

$2\sqrt{9t^2-9} \le 0$

Но $2\sqrt{9t^2-9} \ge 0$, поэтому:

$2\sqrt{9t^2-9} = 0$

$9t^2-9=0$

$t^2=1$

$t=\pm 1$ (но так как $t>0$, поэтому

$t=1$.

Значит:

$tgx = 1$

$x=\frac{\pi}{4}+\pi n; n\in Z$

$y=\sqrt[4]{\sin y}=0$

$\sin y=0$

$y=\pi k; k\in Z$

Ответ: $(\frac{\pi}{4}+\pi n; \pi k)$; где $n; k\in Z$ ✓ 12

№1. Так как изначально пиксель имел красный цвет, то у него был номер 5. Выполним несколько раз программу студента согласно данным условиям.

№ перекрашивания	№ цвета	условие	результат.
1.	5	$5<17$	$3\cdot5-2=13$
2.	13	$13<17$	$3\cdot13-2=37$
3.	37	$37>18$	$\lvert 129-2\cdot37\rvert=55$

N перекрашивания	N цвета	условие	результат.
5.	19	$19 > 18$	$\lvert 129 - 19 \cdot 2 \rvert = 91$
6.	91	$91 > 18$	$\lvert 129 - 91 \cdot 2 \rvert = 53$
7.	53	$53 > 18$	$\lvert 129 - 53 \cdot 2 \rvert = 23$
8.	23	$23 > 18$	$\lvert 129 - 23 \cdot 2 \rvert = 83$
9.	83	$83 > 18$	$\lvert 129 - 83 \cdot 2 \rvert = 37$

Итак мы видим после второго и после девятого перекрашиваний у нас получается цвет с номером 37. То есть мы нашли некий цикл длинной в 7 ходов. Причём первый цикл начинается с 3 хода, то есть если мы будем вести отсчёт именно с него, то нам по условию задачи нужно будет выполнить ещё 2017 перекрашиваний.

Поделим это число на длину цикла и найдём кол-во циклов.

$$\begin{array}{r|l} 2017 & 7 \\ \underline{14} & 288 \\ 61 & \\ \underline{56} & \\ 57 & \\ \underline{56} & \\ 1 & \end{array}$$

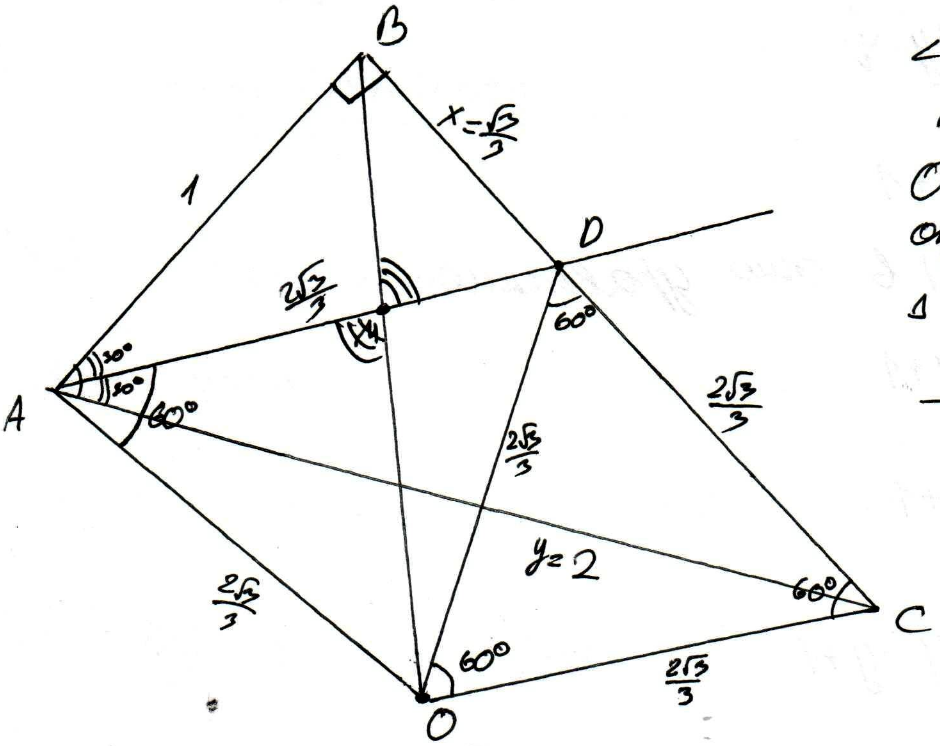
То есть после $288 \cdot 7$ ходов, а именно 2016, начиная отсчёт с 3 хода у нас получится цвет с номером 37.

Осталось выполнить ~~то~~ такое кол-во перекрашиваний, равное остатку от деления 2017 на 7, то есть 1. Согласно таблице, мы получаем цвет с номером 55.

Ответ: синий

V 12

№4.



Дано:
$\angle A = 60°$
AD - биссектриса
O - центр опис. окружности около $\triangle ADC$.
$R = \frac{2\sqrt3}{3}$ $AB = 1$

$BM = ?$

$\angle DOC = 2\angle DAC$ (как центральный угол)

$\angle DAC = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\cdot 60° = 30°$

Значит $\angle DOC = 2 \cdot 30° = 60°$

Т.к. $\triangle DOC$ - равнобедренный ($DO = OC$ - радиусы), то

$\angle ODC = \frac{1}{2}(180 - \angle DOC) = 60°$

Значит $\triangle ODC$ - равносторонний.

$DC = DO = CO = \frac{2\sqrt3}{3}$

Обозначим $BD = x$

$AC = y$

По свойству биссектрисы AD:

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

$\frac{1}{y} = \frac{x}{\frac{2\sqrt3}{3}} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt3}{3y}$ (*)

По теореме косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC$$

$$\left(x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 + y^2 - \cancel{2}y \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$\left(x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = y^2 - y + 1$$

Подставим (*) в это уравнение:

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3y}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = y^2 - y + 1$$

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\left(\frac{1}{y}+1\right)^2 = y^2 - y + 1$$

$$\frac{4\cdot\cancel{3}}{\cancel{9}_3}\left(\frac{1}{y^2}+2\frac{1}{y}+1\right) = y^2 - y + 1$$

$$\frac{4}{3y^2}+\frac{8}{3y}+\frac{4}{3} = y^2 - y + 1$$

$$y^2 - y + 1 - \frac{4}{3} - \frac{8}{3y} - \frac{4}{3y^2} = 0$$

$y^2 - y - \frac{1}{3} - \frac{8}{3y} - \frac{4}{3y^2} = 0$ (т.к $y>0$, то можно умножить данное выражение на y^2).

$$y^4 - y^3 - \frac{1}{3}y^2 - \frac{8}{3}y - \frac{4}{3} = 0 \quad |\cdot 3$$

$$3y^4 - 3y^3 - y^2 - 8y - 4 = 0 \quad |:(y-2)$$

$$\begin{array}{l|l}
3y^4-3y^3-y^2-8y-4 & y-2 \\
\underline{3y^4-6y^3} & 3y^3+3y^2+5y\ldots \\
\quad 3y^3-y^2 & \\
\quad \underline{3y^3-6y^2} & \\
\qquad 5y^2-8y & \\
\qquad \underline{5y^2-10y} & \\
\qquad\quad 2y-4 & \\
\qquad\quad \underline{2y-4} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$(y-2)(3y^3+3y^2+5y+2) = 0$$

$y = 2$; $3y^3+3y^2+5y+2$ при $y>0$ не может равняться 0.

Значит $AC = 2$, а $BD = \frac{8\sqrt{3}}{3\cdot 8} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

По обратной теореме Пифагора:

$$AC^2 = BC^2 + AB^2$$

$$4 = (\sqrt{3})^2 + 1$$

$4 = 3 + 1 \Rightarrow 4 = 4$ Значит $\triangle ACB$ - прямоугольный.

N5. $\log_2 \frac{3\sqrt{3}+(\sin x+4)\cos a}{3\cdot\sin a\cos x} = |3\sin a\cos x| - |(\sin x+4)\cos a+3\sqrt{3}|$

ОДЗ: $\frac{3\sqrt{3}+(\sin x+4)\cos a}{3\sin a\cos x} > 0$

$t = 3\sqrt{3}+(\sin x+4)\cos a$

$V = 3\sin a\cos x$

$\log_2 \frac{t}{V} = |V| - |t|$

$\log_2|t| - \log_2|V| = |V| - |t|$

$\log_2|t| + |t| = \log_2|V| + |V|$

Введём функцию $f(k) = \log_2 k + k$, на промежутке $(0;+\infty)$ данная функция будет возрастать, поэтому будет принимать каждое своё значение ровно 1 раз.

$$\left.\begin{aligned} f(|t|) &= \log_2|t| + |t| \\ f(|V|) &= \log_2|V| + |V| \\ \log_2|t| + |t| &= \log_2|V| + |V| \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(|t|) = f(|V|)$$

Согласно выше описанному свойству $f(k)$ мы можем сказать, что $|t| = |V|$

Согласно ОДЗ: $\frac{t}{V} > 0$, значит t и V одинаковых знаков, поэтому $|t| = |V| \sim t = V$

$3\sqrt{3} + (\sin x + 4)\cos a = 3\sin a\cos x$

$3\sqrt{3} + \cos a\sin x + 4\cos a = 3\sin a\cos x$

$\cos a\cdot\sin x - 3\sin a\cdot\cos x = -3\sqrt{3} - 4\cos a$

$$\frac{\cos a}{\sqrt{\cos^2 a+9\sin^2 a}}\cdot\sin x-\frac{3\sin a}{\sqrt{\cos^2 a+9\sin^2 a}}\cdot\cos x=\frac{-3\sqrt{3}-4\cos a}{\sqrt{\cos^2 a+9\sin^2 a}}$$

$\cos^2 a+9\sin^2 a>0$

$1-\sin^2 a+9\sin^2 a>0$

$1+8\sin^2 a>0$, т.к. $8\cdot\sin^2 a\geq 0$, то $\underline{1+8\cdot\sin^2 a>0}$.

$\cos\varphi\cdot\sin x-\sin\varphi\cdot\cos x=\sin(x-\varphi)$

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{\cos a}{\sqrt{\cos^2 a+9\sin^2 a}}\\[2ex] \sin\varphi=\dfrac{3\sin a}{\sqrt{\cos^2 a+9\sin^2 a}}\\[2ex] \sin(x-\varphi)=\dfrac{-3\sqrt{3}-4\cos a}{\sqrt{\cos^2 a+9\sin^2 a}}\end{cases}$$

Так как $\dfrac{-3\sqrt{3}-4\cos a}{\sqrt{\cos^2 a+9\sin^2 a}}=\sin(x-\varphi)$

то $\dfrac{-3\sqrt{3}-4\cos a}{\sqrt{\cos^2 a+9\sin^2 a}}\leq 1$ и

$\dfrac{-3\sqrt{3}-4\cos a}{\sqrt{\cos^2 a+9\sin^2 a}}\geq -1$.

$$\frac{-3\sqrt{3}-4\cos a}{\sqrt{\cos^2 a+9\sin^2 a}}\leq 1$$

т.к. $\sqrt{\cos^2 a+9\sin^2 a}>0$, то мы можем домножить на $\sqrt{\cos^2 a+9\sin^2 a}$:

$-3\sqrt{3}-4\cos a\leq\sqrt{\cos^2 a+9\sin^2 a}$

т.к. $-3\sqrt{3}$ будет всегда меньше, чем $-4\cos a$

(возьмём возможное значение $-4\cos a$:

$-3\sqrt{3}-4\cdot(-1)=-3\sqrt{3}+4$

Но т.к. $|-3\sqrt{3}|>4$

$|-\sqrt{27}|>\sqrt{16}$, то $-3\sqrt{3}+4<0$

Значит $-3\sqrt{3}-4\cos a<0$ при любом значении a.

~~Что~~ То $\angle LMA = 30°$, как угол, ~~между~~ лежащий против катета, равного половине гипотенузы.

Значит $\angle LAM = 60°$ $(90° - \angle LMA = 90° - 30° = 60°)$

В свою очередь AD - медиана в $\triangle ABC$, но т.к. $\triangle ABC$ - равносторонний, то AD - биссектриса и высота.

Также $\angle BAC = 60°$, значит $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC = 30°$

Поэтому $\angle LAD = \angle LAM + \angle MAD = 60° + 30° = 90°$

Т.к. $\angle MLA = \angle LAD = 90° \Rightarrow LP \parallel AD$

$(QO \subset \alpha); (QO \parallel LP) \Rightarrow QO \parallel AD$ $\big($ $QO \parallel LP$, т.к. плоскость α пересекает две взаимно перпендикулярные плоскости (ABC) и (TAD) $\big)$.

Т.к. $(QO \parallel AD); (AD \perp TA) \Rightarrow (QO \perp TA)$ $\big(AD \perp TA$, т.к. $(AT \perp (ABC)); (AD \subset (ABC))\big)$

Рассмотрим $\triangle TOA$:

QO - высота, но т.к. $\triangle TOA$ - равнобедренный $(TO = OA = R_{сферы})$, то QO - медиана и биссектриса.

Значит $TQ = QA$.

Продолжим прямую PL за точку L до пересечения с прямой CA, это возможно т.к $CA \subset (ABC)$ и $PL \subset (ABC)$

$CA \cap PL = K$. Соединим точки K и Q и продолжим прямую KQ до пересечения с прямой TC в точке N.

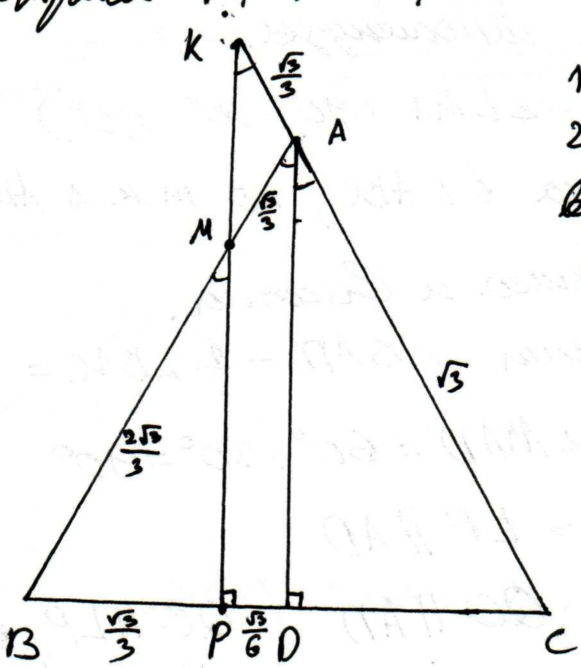
$(KQ \subset (ATC); TC \subset (ATC))$

Соединим точки N и P, т.к. $N \in (TBC)$ и $P \in (TBC)$.

Также соединим точки M и Q.

Мы получили сечение $QNPM$, площадь которой нам необходимо найти.

Рассмотрим BMKC:



$\Delta BMP \sim \Delta BAD$ (по 2 углам)

1). $\angle B$ - общий.

2). $\angle BMP = \angle BAD$ (как соответственные при $MP \parallel AD$ и секущей BA).

Значит $\frac{BP}{BD} = \frac{BM}{BA}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{BP}{BD} &= \frac{2}{3} \\ BD &= \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $BP = \frac{2}{3}BD$

$BP = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. $PD = \frac{1}{3} \cdot BD = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$\Delta ACD \sim \Delta KCP$ (по двум углам):

1). $\angle C$ - общий

2). $\angle CAD = \angle CKP$ (как соответственные при $KP \parallel AD$ и секущей CK).

Значит:

$$\frac{CA}{CK} = \frac{CD}{CP}$$

$$\frac{CA}{CK} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{3}{4}; \quad KC = \frac{4}{3} \cdot AC = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$AK = \frac{1}{4}KC = \frac{1}{4} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Рассмотрим KQTC:

См. на след. стр.