

Шифр 617710

(заполняется ответственным  
секретарем приемной комиссии)

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**  
**на олимпиаде «Шаг в будущее»**

соревнования по образовательному предмету математика  
(наименование дисциплины)


Фамилия И.О. участника Абрамов Никита Сергеевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Темза, ГБНОУ ПО  
Губернский лицей

Регистрационный номер 9070

Вариант задания 10-7.

Дата проведения «16» марта 2019 г.

Подпись участника 

90 (девушка)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12	16	20	10	20					
										90

Шифр

617710

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 10-4.

Задача 3.

а) Чётные цифры - 0, 2, 4, 6, 8. Их 5 штук.

2468	02468	02468	02468	02468	02468
------	-------	-------	-------	-------	-------

Всего 7 мест. На первом месте может быть все кроме 0. На втором любая из 5. На третьем, четвертом, пятом, шестом, седьмом месте любая из 5.  $\Rightarrow$  Всего таких номеров  $4 \cdot 5^6$  ✓

б) Нечётные цифры - 1, 3, 5, 7, 9. Их 5 штук.

13579	13579	13579	13579	13579	13579
-------	-------	-------	-------	-------	-------

Всего 7 мест. П.к. Нет ограничений на места, то на 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 месте можно стоять любая из 5 нечётных цифр  $\Rightarrow$  Всего таких номеров  $5^7$ . ✓

в)  $5^7 \vee 4 \cdot 5^6$   $| : 5^6$  ✓ $5 \vee 4, 5 > 4 \Rightarrow$  Чисел с нечётными цифрами больше

чем номеров с чётными и первой цифрой не 0.

 $\frac{5^7}{4 \cdot 5^6} = \frac{5}{4} = 1,25$ . в 1,25 раза. ✓

(12)

№3. Задача 3.Заменить  $\sqrt{2x+1}$  на  $a$  и  $\sqrt{3x+5}$  на  $b$ .



$$3\sqrt{x^2+13x+5} - 6\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x+5} + 2 = 0$$

⇓

$$3ab - 6a - b + 2 = 0.$$

$$3a(b-2) - (b-2) = 0.$$

$$(3a-1)(b-2) = 0.$$

↓

$$3a = 1$$

$$3\sqrt{2x+1} = 1.$$

$$9(2x+1) = 1.$$

$$2x+1 = \frac{1}{9}.$$

$$2x = -\frac{8}{9}.$$

$$x = -\frac{4}{9}.$$

Удовлетворяет ОДЗ: ✓

$$\text{Ответ: } x = -\frac{4}{9}; x = -\frac{1}{3}.$$

ОДЗ:

$$2x+1 \geq 0.$$

$$x \geq -\frac{1}{2}. \quad \checkmark$$

$$6x^2+13x+5 \geq 0.$$

$$D = 169 - 120 = 49.$$

$$x = \frac{-13 \pm 7}{12} = -\frac{1}{2} \text{ и } -\frac{5}{3}.$$

$$3x+5 \geq 0. \quad x \geq -\frac{5}{3}. \quad \checkmark$$

$$b = 2.$$

$$\sqrt{3x+5} = 2.$$

$$3x+5 = 4$$

$$3x = -1.$$

$$x = -\frac{1}{3}.$$

✓  
(16)

Задача 2.

$$a_k = 3k^2 - 3k + 1.$$

Докажем, что  $\sum_{k=1}^n a_k = n^3.$

Для  $n=1$  - верно  $1^3 - 3 + 3 + 1 = 1^3.$

Предположим, что верно для  $n=p.$

$$\sum_{i=1}^p a_i = p^3. \text{ Докажем, что } \sum_{i=1}^{p+1} a_i = (p+1)^3.$$

$$p^3 + (3(p+1)^2 - 3(p+1) + 1) = (p+1)^3.$$

(12)

$$p^3 + 3p^2 + 6p + 3 - 3p - 3 + 1 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1. \text{ Верно.}$$

$$b_k = 2k + 89. \quad \sum_{i=1}^n b_i = n(n+1) + 89n = (90+n)n. \quad \checkmark$$

$$(90+n)n = n^3 \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0. \quad D = 1 + 360 = 19^2. \quad n = \frac{1 \pm 19}{2} = 10 \text{ и } -9. \\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 10. \text{ Ответ: } n = 10. \quad \checkmark$$

Задача 4.

$$\frac{x(x-2)(x-3) - (x-2)^2 + 1}{(|x-1| - |x-2|)\sqrt{16-x^2}} \geq 0.$$

Раскроем числитель и найдем нули функции.  $x(x^2 - 5x + 6) - (x^2 - 4x + 4) + 1 = 0$ .

$$x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 4x - 4 + 1 = 0.$$

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 3 = 0.$$

$x = 3$  - корень. ✓

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 10x - 3 & x - 3 \\ \hline x^3 - 3x^2 & \\ \hline -3x^2 + 10x & \\ -3x^2 + 9x & \\ \hline x - 3 & \\ -x + 3 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 - 3x + 1. \end{array}$$

$$(x-3)(x^2 - 3x + 1) = 0.$$

$$D = 9 - 4 = 5.$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$



Раскроем знаменатель и найдем точки в которых др-зия не существует.

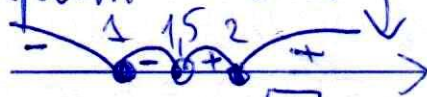
$$(|x-1| - |x-2|)\sqrt{16-x^2} = 0.$$

1.  $16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-4; 4]$ . ✓

$$16 - x^2 = 0$$

$x = \pm 4$ . - Нули, крит. точки

$$|x-1| - |x-2| = 0.$$



а. Если  $x \leq 1 \Rightarrow 1 - x + x - 2 = -1$ .

б. Если  $x \in (1; 2) \Rightarrow x - 1 + 2 - x = 1$ ;  $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1.5$ . - Ноль.

в. Если  $x \geq 2 \Rightarrow 1$ .

Ответ:  $x \in (-4; \frac{3-\sqrt{5}}{2}] \cup (1.5; \frac{3+\sqrt{5}}{2}] \cup (3; 4]$ . ✓

(20)

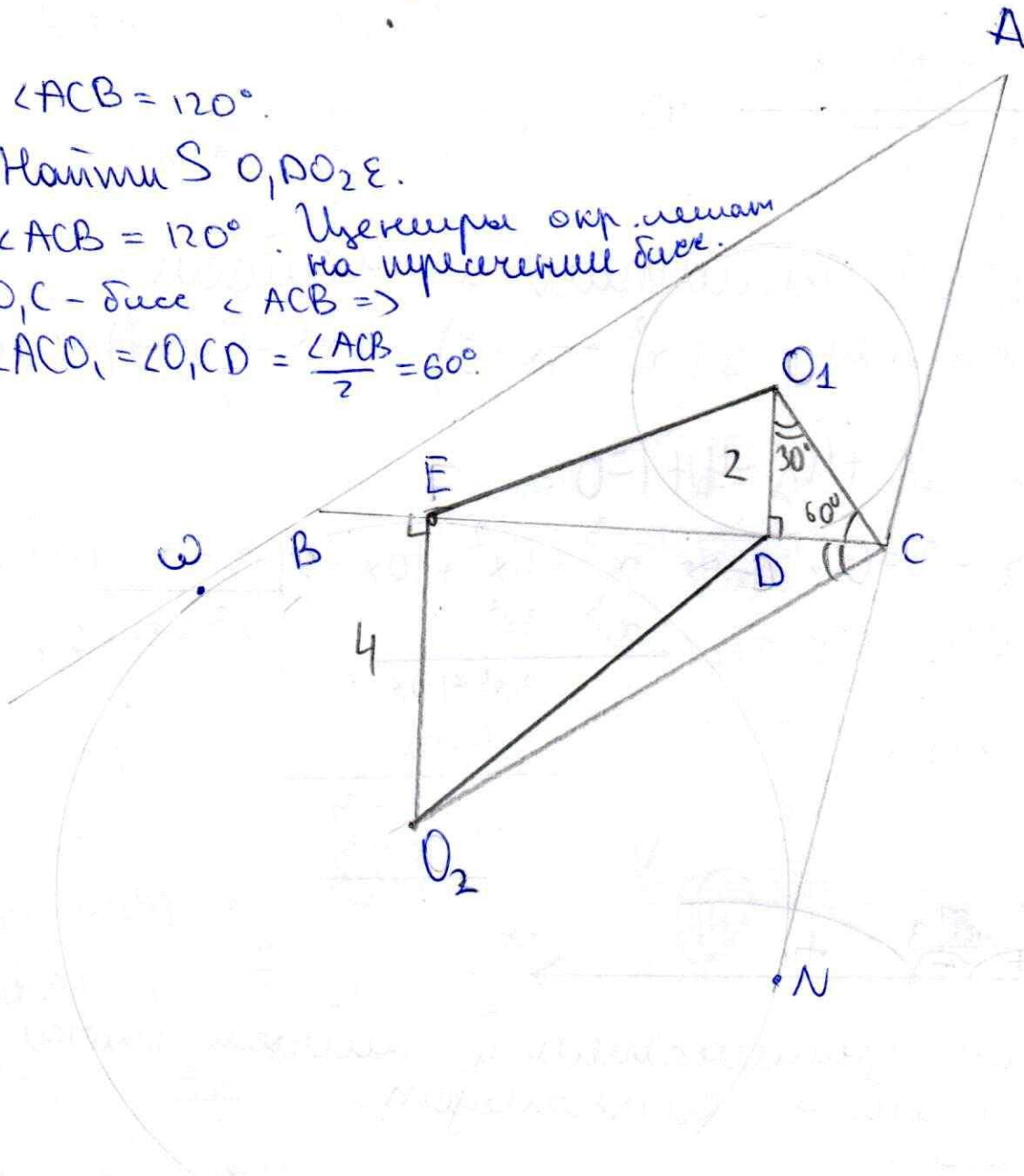


# Задача 6.

$$\angle ACB = 120^\circ$$

Найти  $S_{O_1DO_2E}$ .

$\angle ACB = 120^\circ$ . Углы при вершине  $C$  на пересечении дуг.  
 $O_1C$  - биссектриса  $\angle ACB \Rightarrow$   
 $\angle ACO_1 = \angle O_1CD = \frac{\angle ACB}{2} = 60^\circ$



Рассмотрим  $\triangle O_1DC$ ,  $\angle DO_1C = 30^\circ \Rightarrow \frac{DC}{O_1C} = \frac{1}{2}$ . Пусть  $DC = x \Rightarrow$   
 По т. Пифагора  $(2x)^2 = x^2 + 4 \Rightarrow 3x^2 = 4 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .  
 $CD = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .  $O_1C = 2x$ .

Рассмотрим  $\triangle EO_2C$ ;  $CO_2$  - биссектриса  $\angle ECN \Rightarrow \angle ECO_2 = \angle O_2CN =$   
 $= \frac{\angle ECN}{2} = 30^\circ \Rightarrow \frac{CO_2}{EO_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow CO_2 = 2$ ;  $8^2 = 4^2 + (EC)^2 \Rightarrow EC = 4\sqrt{3}$ .

$$S_{O_1DO_2E} = S_{O_1DE} + S_{EO_2D} = \frac{ED \cdot O_1D}{2} + \frac{ED \cdot EO_2}{2} = \frac{ED}{2} (O_1D + EO_2)$$

$$ED = EC - CD = 4\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{12-2}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow S_{O_1DO_2E} = ED \cdot \left( \frac{O_1D + EO_2}{2} \right) =$$

$$\frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}. \text{ Ответ: } S = 10\sqrt{3}. \checkmark$$

(20)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

617710

Шифр

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 10-7

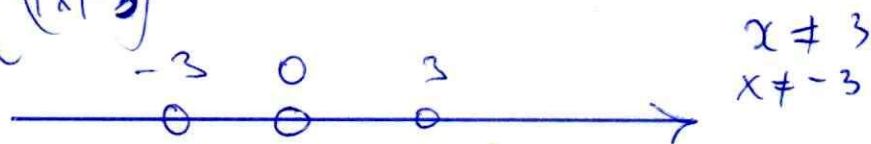
Задача 5.

$$\begin{cases} (x-p)^2 = 16(y-3+p), \\ y^2 + \left(\frac{x-3}{|x|-3}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим 2 уравнение.

$$\begin{cases} y^2 \geq 0, \\ \left(\frac{x-3}{|x|-3}\right)^2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} |x|-3=0 \\ x=\pm 3. \end{cases}$$

тогда в которых ор-ция не сну.



$$x \neq -3 \quad x \in (-\infty, 0).$$

ХАЗ Если  $x \neq -3$ , в числителе будет отрицательное минус  $x$ , а в знаменателе положительное минус 3. Числитель по модулю будет больше знаменателя.

$$\frac{-x-3}{x-3} = -1 - \frac{(x-3)-6}{x-3} = -1 - \frac{6}{x-3}, \quad x \geq 0.$$

-1 - отрицательное < 1, а в квадрате больше 1  $\Rightarrow$  не подходит.

$x \in [0; +\infty) \Rightarrow |x|-3 = x-3 \Rightarrow$  Скобка равна 1.

$$\Rightarrow \left( \frac{x-3}{|x|-3} \right)^2 + y^2 = 1.$$

$$\left( \frac{x-3}{|x|-3} \right)^2 = 1 \Rightarrow y = 0.$$

$$(x-p)^2 = 16(p-3).$$

$$x^2 - 2px + p^2 = 16p - 48.$$

$$D = 4p^2 - 4p^2 + 64p - 192 \geq 0.$$

$$D = 64p - 192 \geq 0 \Rightarrow p \geq 3.$$

$$x = \frac{2p \pm 8\sqrt{p-3}}{2} = p \pm 4\sqrt{p-3}.$$

Ответ:  $p \geq 3$ .  $\begin{cases} x = p \pm 4\sqrt{p-3}, \\ y = 0 \end{cases}$

1 реш - ?  
2 реш - ?

$x = \dots$   $p \in \dots$   
неверный набор  
корней!

(10)