Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

217339

Шифр ____________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Бурмаков Илья Андреевич

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Москва, ГБОУ Школа №1516

Регистрационный номер 2684

Вариант задания 10-9

Дата проведения «17» марта 2019 г.

Подпись участника Бур

96 (девяносто шесть)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12	12	20	20	20					
										96

217339

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

217339

Вариант № 10-9

339

№2

$$\sqrt{4-x^2} - \sqrt[4]{9-y^2} - \sqrt{\sqrt{9-y^2}-x^2} \geqslant 2$$

$$\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ -3 \le y \le 3 \\ \sqrt{9-y^2} \geqslant x^2 \Rightarrow x^4+y^2 \le 9 \end{cases}$$

$\max \sqrt{4-x^2} = 2$

$\sqrt[4]{9-y^2} + \sqrt{\sqrt{9-y^2}-x^2} \geqslant 0$; т.к. $\sqrt[4]{9-y^2} \geqslant 0$ и $\sqrt{\sqrt{9-y^2}-x^2} \geqslant 0$, значит,

$\sqrt[4]{9-y^2} + \sqrt{\sqrt{9-y^2}-x^2} = 0$, т.к., если иначе, что

$\sqrt{4-x^2} - \sqrt[4]{9-y^2} - \sqrt{\sqrt{9-y^2}-x^2} < 2.$

Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю, когда ~~эти~~ оба эти числа равны нулю, значит,

$$\begin{cases} \sqrt{4-x^2} = 2 \\ \sqrt[4]{9-y^2} = 0 \\ \sqrt{9-y^2} = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \left[\begin{array}{l} 3 \\ -3 \end{array}\right. \end{cases}$$

12

Ответ: $(0;3)$; $(0;-3)$

№1

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^3+y^3+z^3=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-(x+y) & (1) \\ x^3+y^3+(2-(x+y))^3=-10 & (2) \end{cases}$$

(2) $x^3+y^3+(2-(x+y))^3=-10$

$x^3+y^3+8-12(x+y)+6(x+y)^2-(x+y)^3=-10$

$\cancel{x^3}+\cancel{y^3}+\cancel{18}\ 18-12(x+y)+6(x+y)^2\cancel{-x^3}-3x^2y-3xy^2\cancel{-y^3}=0$

$18-12(x+y)+6(x+y)^2-3xy(x+y)=0$

$6-4(x+y)+2(x+y)^2-xy(x+y)=0$

Пусть $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a-y & (3) \\ (a-y)y=b & (4) \end{cases}$, тогда,

$6-4a+2a^2-ba=0$

$b=\dfrac{6-4a+2a^2}{a}=\dfrac{6}{a}-4+2a$

Т.к. a и b – целые числа, то

$a=1 \Rightarrow b=4$

$a=2 \Rightarrow b=3$

$a=3 \Rightarrow b=4$

$\boxed{a=6 \Rightarrow b=9}$ (5)

$\boxed{a=-1 \Rightarrow b=-12}$ (6)

$a=-2 \Rightarrow b=-11$

$a=-3 \Rightarrow b=-12$

$a=-6 \Rightarrow b=-17$

(4) $(a-y)y=b$

$ay-y^2=b$

$y^2-ay+b=0$

$D=(-a)^2-4b=a^2-4b$

$y=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$

(5) $y=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 9}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{6\pm 0}{2}=\frac{6}{2}=3$

(6) $y=\frac{-1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-12)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}=\left[\begin{array}{l}3\\-4\end{array}\right.$

(3) $x=a-y$

(5) $x=6-3=3$

(6) $x=\left[\begin{array}{l}-1-3=-4\\-1-(-4)=-1+4=3\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ $(3,3)$ (7); $(-4;3)$ (8); $(3;-4)$ (9)

(1) $z=2-(x+y)$

(7) $z=2-(3+3)=2-6=-4$

(8) $z=2-(-4+3)=2-(-1)=3$

(9) $z=2-(3+(-4))=2-(-1)=3$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}(3;3;-4)\\(-4;3;3)\\(3;-4;3)\end{array}}$

12

Ответ: $(-4;3;3);(3;-4;3);(3;3;-4)$

№5

$((1-x^2)^2+2a^2+5a)^7-((3a+2)(1-x^2)+3)^7=5-2a-(3a+2)x^2-2a^2-(1-x^2)^2$

$A^7-B^7=(A-B)(A^6+A^5B+A^4B^2+A^3B^3+A^2B^4+AB^5+B^6)$.

y^7 – возрастающая функция $\Rightarrow x_1>x_2 \Rightarrow y_1=x_1^7>y_2=x_2^7 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{A^7-B^7}{A-B}>0$; $(A\neq B) \Rightarrow C=(A^6+A^5B+A^4B^2+A^3B^3+A^2B^4+AB^5+B^6)>0.$

Пусть $1-x^2=t \Rightarrow x^2=1-t$ (1), значит,

а) $((1-x^2)^2+2a^2+5a)^7-((3a+2)(1-x^2)+3)^7=(t^2+2a^2+5a)^7-((3a+2)t+3)^7=$

$=(t^2+2a^2+5a-t(3a+2)-3)\cdot C>0$

б) $5-2a-(3a+2)x^2-2a^2-(1-x^2)^2=5-2a-(3a+2)(1-t)-2a^2-t^2=$

$=5-2a-(3a-3at+2-2t)-2a^2-t^2=5-2a-3a+3at-2+2t-2a^2-t^2=$

$=3-5a+t(3a+2)-2a^2-t^2=-(t^2+2a^2+5a-t(3a+2)-3)$

Тогда, $(t^2+2a^2+5a-t(3a+2)-3)\cdot C=-(t^2+2a^2+5a-t(3a+2)-3)$

$(t^2+2a^2+5a-t(3a+2)-3)\cdot(\underbrace{C+1}_{>0})=0$, значит,

$t^2+2a^2+5a-t(3a+2)-3=0$

$t^2-t(3a+2)+2a^2+5a-3=0$

$D=(-(3a+2))^2-4(2a^2+5a-3)=9a^2+12a+4-8a^2-20a+12=a^2-8a+16=(a-4)^2$

$t=\frac{3a+2\pm a-4}{2}=\left[\begin{array}{l}2a-1\\a+3\end{array}\right. \Rightarrow (1)\ x^2=1-t \quad x^2=\left[\begin{array}{l}2-2a>0\ (2)\\-a-2>0\ (3)\end{array}\right.$ ✓

$-\frac{\sqrt6}{2}\le x\le\sqrt2$, чтобы было 2 корня: $|x|\le\frac{\sqrt6}{2}\Rightarrow 0<x^2\le\frac32$ ✓

$(2)\ 0<2-2a\le\frac32$ ✓
$-2<-2a\le-\frac12$
$\frac14\le a<1$, корни $x_{1,2}=\pm\sqrt{2-2a}$

$(3)\ 0<-a-2\le\frac32$ ✓
$2<-a\le\frac72$
$-\frac72\le a<-2$, корни $x_{3,4}=\pm\sqrt{-a-2}$

Ответ: при $a\in[\frac14;1)$ ✓ $x_{1,2}=\pm\sqrt{2-2a}$ ✓
при $a\in[-\frac72;-2)$ $x_{3,4}=\pm\sqrt{-a-2}$ ✓

20

№3

$a_1,\dots,a_{128}$
$a_n\to a_{n+4}$, при $n\le19$
$a_n\to a_{|129-2n|}$, при $n\ge20$

Первоначальный цвет – красный: a_5
Рассмотрим последовательность номеров.
$b_5\le19\to b_9$, т.е.

$5_1\to9_2\to13_3\to17_4\to21_5\to87_6\to45_7\to39_8\to51_9\to27_{10}\to54_{11}\to21_{12}$ 75

Ответ: 21 – ~~желтый~~ 75 – голубой!

12

№4

Рассмотрим утверждение №2:
$a^2+ab-6b^2-15b-9=0$
$D=b^2-4(-6b^2-15b-9)=b^2+24b^2+60b+36=25b^2+60b+36=(5b+6)^2$
$a=\frac{-b\pm5b+6}{2}=\left[\begin{array}{l}2b+3\ (1)\\-3b-3\ (2)\end{array}\right.$ ✓

$(2)\ -3b-3<0$, значит, ✓
$(1)\ a=2b+3$ ✓

Рассмотрим утверждение №1:
$a^2+6a+8=(2b+3)^2+6(2b+3)+8=4b^2+12b+9+12b+18+8=4b^2+24b+35$
$4b^2+24b+35\,\vdots\, b$ только при $b=1;\ b=5;\ b=7;\ b=35$ ✓
Рассмотрим утверждение №4:
$a+6b+2=2b+3+6b+2=8b+5$ – простое только при $\overset{(1)}{b=1}$ и $\overset{(2)}{b=7}$, т.к. если $b=5$, то
$8\cdot5+5=45$ – ~~не про~~ составное число ✓
Рассмотрим утверждение №3:
$a+2b+2=2b+3+2b+2=4b+5\not\vdots\,4$, т.к. $4b+5$ – нечетное число ✓
Тогда, $(1)\ b=1\Rightarrow a=2\cdot1+3=5$ ✓
$(2)\ b=7\Rightarrow a=2\cdot7+3=17$

20

Ответ: $a_1=5;\ b_1=1$ ✓
$a_2=17;\ b_2=7$ ✓

№6

Дано: $\triangle ABC$

$\angle A = 60^\circ$

AD - биссектриса

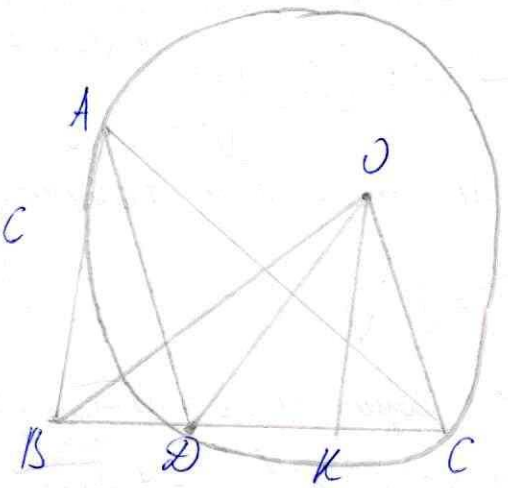
окр с ц. O описана ок. около $\triangle ADC$

$R = \sqrt{3}$

$AB = 1{,}5$

$AD \cap BD = M$

Найти: OM



Решение:

$\frac{DC}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow DC = R$

ODC - правильный треугольник $\Rightarrow OK$ - высота, значит,

$OK = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} = AB$, тогда,

$\triangle ABC$ - прямоугольный; По т. Пифагора:

$OB = \sqrt{BK^2 + OK^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{3 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$

$\triangle AMO \sim \triangle BMD$ $\quad \frac{MO}{MB} = \frac{AO}{BD}$

$BD = AB\,tg 30^\circ = 1{,}5 : \sqrt{3}$; $BD = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, значит,

$\frac{MO}{MB} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{3 : \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot 2}{3} = 2$; $MO = 2MB$

$MO + MB = MO + \frac{MO}{2} = \frac{3}{2}MO = \frac{\sqrt{21}}{2}$; значит, $MO = \frac{\sqrt{21}}{3}$

Ответ: $MO = \frac{\sqrt{21}}{3}$

20