Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1 лист

Шифр 617705

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Столяров Всеволод Сергеевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Пенза, Губернский лицей, 10 класс

Регистрационный номер 4544

Вариант задания 10-7

Дата проведения «16» марта 2019 г.

Подпись участника

97 (девяносто семь)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	9	16	20	20	20					
										97

Шифр 617705

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 10-7

№1

а) Вариантов составить первую цифру 4 - это 2, 4, 6, 8. Вариантов составить последующие цифры это 5^6, т.к. в каждую последующую цифру можно выбрать пятью способами - 0, 2, 4, 6, 8. Значит всего вариантов: $4\cdot5^6$.

б) Вариантов составить каждую цифру 5 - 1, 3, 5, 7, 9. Значит всего вариантов составить семизначное число 5^7.

в) Надо сравнить числа $4\cdot5^6 < 5^7$, $4\cdot5^6 < 5\cdot5^6$, $0 < 5^6$ $\Rightarrow$ семизн. чисел состоящих только из нечет. цифр больше.

$\frac{5\cdot5^6}{4\cdot5^6}=\frac{5}{4}=1{,}25 \Rightarrow$ их больше в 1,25.

Ответ: а) $4\cdot5^6$ б) 5^7 в) ~~1,2~~ больше чисел. б) в 1,25.

12

№3

$3\sqrt{6x^2+13x+5}-6\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x+5}+2=0$; $6x^2+13x+5=0$

$6x^2+13x+5=(2x+1)(3x+5)$?

$D=169-120=49$

$x=\frac{-13\pm7}{12}=-\frac{1}{2};\ -\frac{5}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow 3\sqrt{6x^2+13x+5}=3\sqrt{2x+1}\cdot\sqrt{3x+5}$ (+).

$\Rightarrow 6x^2+13x+5=6(x+\frac{1}{2})(x+\frac{5}{3})=(2x+1)(3x+5)$

$3\sqrt{2x+1}(\sqrt{3x+5}-2)=\sqrt{3x+5}-2$

~~1) $\sqrt{3x+5}-2=0 \Rightarrow \sqrt{3x+5}=2 \Rightarrow 3x+5=4 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$~~ ← подх.

~~2) $3\sqrt{2x+1}(\sqrt{3x+5}-2)$~~

$\begin{cases}6x^2+13x+5\geq0 \Rightarrow x\in(-\infty;-\frac{5}{3}]\cup[-0{,}5;+\infty)\\ 2x+1\geq0\Rightarrow x\geq-0{,}5\\ 3x+5\geq0\Rightarrow x\geq-\frac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow x\geq-0{,}5$

$(\sqrt{3x+5}-2)(3\sqrt{2x+1}-1)=0$

$\sqrt{3x+5}-2=0$ | $3\sqrt{2x+1}-1=0$

$\sqrt{3x+5}=2$ | $3\sqrt{2x+1}=1$

$3x+5=4$ | $18x+9=1$

$x=-\frac{1}{3}\geq-\frac{1}{2}$ подх. | $x=-\frac{8}{18}=-\frac{4}{9}\geq-\frac{1}{2}\Rightarrow$ подх.

Ответ: $x=-\frac{1}{3};\ -\frac{4}{9}$

16

№ 4.

$$\frac{x(x-2)(x-3)-(x-2)^2+1}{(|x-1|-|x-2|)\sqrt{16-x^2}} \geq 0$$

Рассмотрим функцию $y=\dfrac{x(x-2)(x-3)-(x-2)^2+1}{(|x-1|-|x-2|)\sqrt{16-x^2}}$, найдём её нули и точки, в которых она не существует.

$x(x-2)(x-3)-(x-2)^2+1=0$

$x(x^2-5x+6)-(x^2-4x+4)+1=0$

$x^3-5x^2+6x-x^2+4x-4+1=0$

$x^3-6x^2+10x-3=0$; $x=3 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} x^3-6x^2+10x-3 & x-3 \\ \underline{x^3-3x^2} & x^2-3x+1 \\ -3x^2+10x & \\ \underline{-3x^2+9x} & \\ x-3 & \\ \underline{x-3} & \\ 0 & \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2-3x+1=0$

$D=9-4=5$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt5}{2} \Rightarrow x=\dfrac{3-\sqrt5}{2}; \dfrac{3+\sqrt5}{2}; 3$ – нули функции.

$(|x-1|-|x-2|)=0 \Rightarrow |x-1|=|x-2|$

x: 1, 2

$x\in(-\infty;1) \Rightarrow 1-x=2-x \Rightarrow 1=2$ – неверно $\Rightarrow$ нет. корней на этом пр.

$x\in[1;2) \Rightarrow x-1=2-x \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=1{,}5 \in[1;2) \Rightarrow$ подх.

$x\in[2;+\infty) \Rightarrow x-1=x-2 \Rightarrow -1=-2$ – неверно $\Rightarrow$ нет корней на этом пр.

~~$\sqrt{16-x^2}=\sqrt{16-x^2}$~~ $16-x^2\geq0 \Rightarrow x\in[-4;4]$ – ограничение на всю функцию

~~$x\in$~~ $\sqrt{16-x^2}=0 \Rightarrow x=\pm4 \Rightarrow x=1{,}5; -4; 4$ – точки, в которых функция не существует.

$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$

$-4 \quad \frac{3-\sqrt5}{2} \quad 1{,}5 \quad \frac{3+\sqrt5}{2} \quad 3 \quad 4 \quad x$ $\Rightarrow x\in\left(-4; \frac{3-\sqrt5}{2}\right], \left(1{,}5; \frac{3+\sqrt5}{2}\right], [3;4)$

Ответ: $x\in\left(-4; \frac{3-\sqrt5}{2}\right], \left(1{,}5; \frac{3+\sqrt5}{2}\right], [3;4)$.

20

№5.

$x \neq \pm 3$

$$\begin{cases} (x-p)^2 = 16(y-3+p) \\ y^2 + \left(\dfrac{x-3}{|x|-3}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

При $x \in (-\infty; -3), (-3; 0) \Rightarrow y^2 + \left(\dfrac{x-3}{-(x+3)}\right)^2 = 1 \Rightarrow y^2 + \left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^2 = 1$.

Рассмотрим функцию $y = \left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^2$ на промежутках $x \in (-\infty; -3), (-3; 0)$.

$-1 \leq \dfrac{x-3}{x+3} \leq 1$ – если это не вып., то все равенство тоже не вып.

$\dfrac{x-3}{x+3} \geq -1$

$\dfrac{x-3+x+3}{x+3} \geq 0$

$\dfrac{2x}{x+3} \geq 0$

$x \in (-\infty; -3), (0; +\infty) \Rightarrow x \in (-\infty; -3)$

$\dfrac{x-3}{x+3} \leq 1$

$\dfrac{x-3-x-3}{x+3} \leq 0$

$\dfrac{-6}{x+3} \leq 0$

$\dfrac{6}{x+3} \geq 0$

$x \in (-3; +\infty) \Rightarrow x \in (-3; 0)$

$\Downarrow$

ни один x ~~в~~ $\in (-\infty; -3), (-3; 0)$ – не подходит.

$x \neq \pm 3$, т.к. в знаменателе получится 0.

При $x \in [0; 3), (3; +\infty) \Rightarrow y^2 + \left(\dfrac{x-3}{x-3}\right)^2 = 1 \Rightarrow y^2 + 1 = 1 \Rightarrow y = 0$.

$(x-p)^2 = 16(y-3+p) = 16(p-3)$

$x^2 - 2px + p^2 - 16p + 48 = 0$

$D = 4p^2 - 4p^2 + 64p - 192 = 64(p-3)$; $p \geq 3$

1) $p = 3 \Rightarrow x = \dfrac{2p}{2} = p = 3$ – неверно $\Rightarrow$ нет корней по усл.

2) $p > 3$; $x = \dfrac{2p \pm 8\sqrt{p-3}}{2} = p \pm 4\sqrt{p-3}$;

~~Исследуе~~ Исследуем значения, которые могут принимать эти корни.

$p + 4\sqrt{p-3}$ при $p > 3$ будет $> 3 \Rightarrow$ все x подходят.

Рассмотрим функцию $y = p - 4\sqrt{p-3}$ и найдём её нули.

$p - 4\sqrt{p-3} = 0$

$p^2 = 16p - 48$

$p^2 - 16p + 48 = 0$

$D = 256 - 192 = 64$

$p = \dfrac{16 \pm 8}{2} = 12; 4 \Rightarrow$ при $p \in (4; 12)$ – значения x – будут отрицательны, значит они не ~~будут~~ будут подх.

$p - 4\sqrt{p-3} = 3 \Rightarrow \overbrace{p-3}^{>0} = \overbrace{4\sqrt{p-3}}^{>0} \Rightarrow p^2 - 6p + 9 = 16p - 48$

$p^2 - 22p + 57 = 0$

$D = 484 - 228 = 256$

$p = \dfrac{22 \pm 16}{2} = 19; 3$ – не подх.

$p - 4\sqrt{p-3} = -3$

$p + 3 = 4\sqrt{p-3}$

$p^2 + 6p + 9 = 16p - 48$

$p^2 - 10p + 57 = 0$

$D < 0 \Rightarrow$ нет корней.

№5 (продолжение)

Значит при $p \in (4;12)$ и $p=19$ подходить будет только 1 корень.

В итоге: $p \in (3;4], [12;19), (19;+\infty) \Rightarrow x = p \pm 4\sqrt{p-3}$

$p \in (4;12) \Rightarrow x = p + 4\sqrt{p-3}$

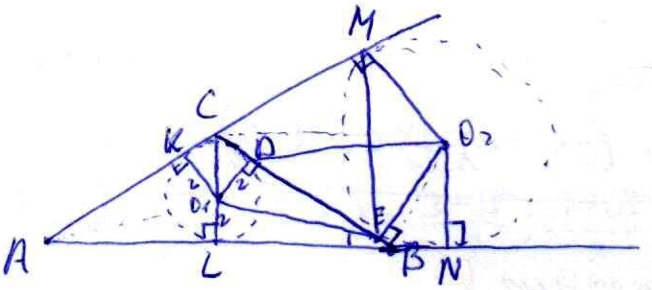
$p = 19 \Rightarrow x = 19 + 4\sqrt{19-3} = 35$

Ответ: при $p \in (3;4], [12;19), (19;+\infty) \Rightarrow x = p \pm 4\sqrt{p-3}$ 20

при $p \in (4;12) \Rightarrow x = p + 4\sqrt{p-3}$

при $p = 19 \Rightarrow x = 35$

№6.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 120^\circ$, $O_1D = 2$, $O_2E = 4$.

Найти: $S_{O_1DO_2E}$

Решение:

O_1 - лежит на биссектрисе CO_1, т.к. окружность вписанная, значит $\angle KCO_1 = \angle O_1CD = \frac{120}{2} = 60^\circ$

$\frac{O_1D}{CO_1} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CO_1 = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

$\frac{CD}{CO_1} = \sin 30 = \frac{1}{2} \Rightarrow CD = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\angle MCE = 180 - 120 = 60^\circ \Rightarrow \angle MO_2E = 360 - 90 - 90 - 60 = 120^\circ$.

$ME^2 = MO_2^2 + O_2E^2 - 2 \cdot MO_2 \cdot O_2E \cdot \cos\angle MO_2E$ (по теореме косинусов для $\triangle MO_2E$).

$ME^2 = 2MO_2^2(1 - \cos\angle MO_2E) = 2 \cdot 16\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 48 \Rightarrow ME = 4\sqrt{3}$

CM, CE - касательные $\Rightarrow CM = CE \Rightarrow \triangle CME$ - р/б $\Rightarrow \angle CME = \angle CEM = \frac{180-60}{2} = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CME$ - равност $\Rightarrow CE = ME = 4\sqrt{3}$

$DE = CE - CD = 4\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$

$S_{O_1DO_2E} = S_{O_1DE} + S_{DO_2E}$

$$\left.\begin{aligned} S_{O_1DE} &= \frac{O_1D \cdot DE}{2} = \frac{2 \cdot \frac{10}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{10}{\sqrt{3}} \\ S_{DO_2E} &= \frac{O_2E \cdot DE}{2} = \frac{4 \cdot \frac{10}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{20}{\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{O_1DO_2E} = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}.$$

Ответ: $S_{O_1DO_2E} = 10\sqrt{3}$.

20

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 617705

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 10-7

№2.

Предположим, что $a_1+a_2+\ldots+a_k=1+7+\ldots+3k^2-3k+1=k^3$. Докажем это методом математической индукции.

1) При $k=1 \Rightarrow 1=1$ — верно

2) Предположим, что верно для $k=n$: $1+7+\ldots+3n^2-3n+1=n^3$.

3) Докажем, что верно для $k=n+1$: $1+7+\ldots+3n^2-3n+1+3(n+1)^2-3(n+1)+1=$
$=(n+1)^3 \Rightarrow 1+7+\ldots+3n^2-3n+1=n^3+3n^2+3n+1-(3n^2+6n+3)+(3n+3)-1=n^3$ — верно $\Rightarrow$
$\forall n$ — верно $\Rightarrow$ доказано методом математической индукции ✓

$b_1=91$; $b_n=89+2n$; $S=\frac{b_1+b_n}{2}\cdot n=\frac{91+89+2n}{2}\cdot n=(90+n)n$ ✓

Мы получаем уравнение в натуральных числах:
$k^3=n(n+90)$ — решая его мы получаем единственное решение $n=10$. ✓

? где решение?

9

Ответ: $n=10$