Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

116059

x1 Ag
x1 Ag

Шифр ____________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Никоненко Кирилл Дмитриевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Волжский, МОУ СШ №30

Регистрационный номер 9377

Вариант задания 10-5

Дата проведения «2» марта 2019 г.

Подпись участника ____________

90 (девяносто)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

116059

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12	16	15	15	20					
										90

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 10-5

№1.

Ответ: 121. Решение: заметим, что каждая n-ая прямая разбивает каждую из n плоскостей на 2 плоскости, тогда для подсчета разбива плоскостей нужно посчитать

$$2+(2+3+4+\ldots+15)=2+\frac{2\cdot2+13}{2}\cdot14=2+\frac{14\cdot17}{2}=119+2=121.$$

12

№2.

$$P(x)=(4x^5-3x^3+2)^3(x^3-3x+3)^2$$

Пусть при раскрытии скобок у нас $P(x)=a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+\ldots+a_n$, $\alpha_i\geq0$, $\alpha_i\in\mathbb{Z}$, тогда очевидно, что $P(1)=a_1+a_2+\ldots+a_n=A$ (по условию), $P(-1)=a_1(-1)^{\alpha_1}+a_2(-1)^{\alpha_2}+\ldots+a_n$, но очевидно, что если $\alpha_i\underset{2}{\equiv}0$, то $a_i(-1)^{\alpha_i}=a_i$, а если $\alpha_i\underset{2}{\equiv}1$, то $a_i(-1)^{\alpha_i}=-a_i$, тогда при сложении $P(1)$ и $P(-1)$ мы получим удвоенную сумму коэффициентов при четных степенях x. $\Rightarrow B=\frac{P(1)+P(-1)}{2}$. Также заметим, что $P(0)=a_n$, т.е свободному члену.

$Ax-By=C$, $x,y\in N$, $x,y<80$

$$P(1)-\frac{P(1)+P(-1)}{2}y=P(0)$$

$$P(x)=(4x^5-3x^3+2)^3(x^3-3x+3)^2$$

$$P(1)=(4-3+2)^3(1-3+3)^2=$$

$$=27$$

$$P(-1)=(-4+3+2)^3(-1+3+3)^2=$$

$$=25$$

$$P(0)=2^3\cdot 3^2=8\cdot 9=72$$

$$27x-\frac{27+25}{2}y=72$$

$$27x-26y=72$$

✓

$$26y=27x-72$$

$$y=\frac{27x-72}{26}=\frac{26x+x-78+6}{26}=x-3+\frac{x+6}{26}\text{, и так}$$

$$x-3+\frac{x+6}{26}\in N,\ x\in N\Rightarrow x+6\underset{26}{\equiv}0$$

$$x\underset{26}{\equiv}-6$$

$$x=26k-6,\ k\in N$$

$$26k-6<80$$

$$26k<86$$

$$k<\frac{86}{26}=3\frac{4}{13}\Rightarrow k\in N,\ k=\left[\begin{array}{l}1\\2\\3\end{array}\right.\Rightarrow$$

12

✓

$$x=\left[\begin{array}{l}20\\46\\72\end{array}\right.\Rightarrow y=\left[\begin{array}{l}20-3+1\\46-3+2\\72-3+3\end{array}\right.;\quad y=\left[\begin{array}{l}18\\45\\72\end{array}\right.$$

Ответ: $(20;18)$; $(46;45)$; $(72;72)$.

№3.

$\sqrt{x^2+5x+10}-\sqrt{x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2+6x+6}=\sqrt{2x^2+4x+1}$

$x^2+5x+10=0$

$D=25-40<0 \Rightarrow x^2+5x+10>0$

$x^2+3x+5=0$

$D=9-20<0 \Rightarrow x^2+3x+5>0$

$2x^2+6x+6=0$

$D=36-48<0 \Rightarrow 2x^2+6x+6>0$

$2x^2+4x+1=0$

$D=16-8=8$

$x_{1,2}=\frac{-4\pm2\sqrt{2}}{4}=-1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

ОДЗ: $2x^2+4x+1\geq0$

$\Downarrow$

$x\in(-\infty;-1-\frac{\sqrt{2}}{2}]\cup[-1+\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty)$

Для удобства:

$x^2+5x+10=a$

$x^2+3x+5=b$, заметим, что

$2x^2+6x+6=c$

$2x^2+4x+1=d$

$a-b=c-d=2x+5$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{d}$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}=0 \Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}=-(\sqrt{c}-\sqrt{d})$

$a-b=c-d$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=(\sqrt{c}-\sqrt{d})(\sqrt{c}+\sqrt{d})$

$-(\sqrt{c}-\sqrt{d})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=(\sqrt{c}-\sqrt{d})(\sqrt{c}+\sqrt{d})$

$(\sqrt{c}-\sqrt{d})(\sqrt{c}+\sqrt{d})+(\sqrt{c}-\sqrt{d})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=0$

$(\sqrt{c}-\sqrt{d})\underbrace{(\underset{>0}{\sqrt{c}}+\underset{>0}{\sqrt{d}}+\underset{>0}{\sqrt{a}}+\underset{>0}{\sqrt{b}})}_{>0}=0$

$\Downarrow$

16

$\sqrt{c}-\sqrt{d}=0$

$\sqrt{c}=\sqrt{d}$

$c=d \Rightarrow c-d=0$

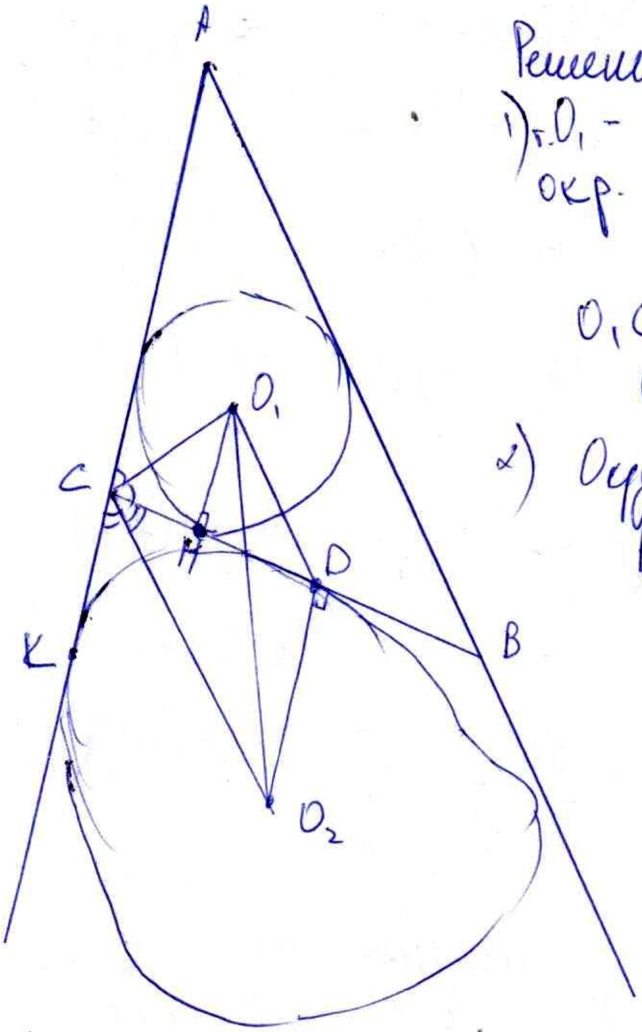
~~$2x^2+6x+6=2x^2+$~~

$c-d=2x+5$

$2x+5=0$

$x=-2.5 \Rightarrow$ Ответ: -2.5

№6.



Дано:
$O_1H = r_1 = 3$
$O_2D = r_2 = 6$
$\angle ACB = 120^\circ$
Найти: $S_{O_1DO_2}$.

Решение:

1) т. O_1 – центр вписанной окр. в $\triangle ABC$.

$\Downarrow$

O_1C – бис-са $\angle ACB$.
$(\angle ACO_1 = \angle O_1CH = 60^\circ)$

2) Окружность O_2 касается BC и продолжений AC и AB

$\Downarrow$

O_2 равноудалена от AC, BC и AB

$\Downarrow$

т. O_2 – пересечение бис-с O_2C и O_2B.

$\Downarrow$

$\angle KCO_2 = O_2CD = 30^\circ$

3) Найдем сторону CH в тр-ке O_1HC через т. Пифагора.

$\angle O_1CH = 60^\circ \Rightarrow \angle CO_1H = 30^\circ \Rightarrow 2CH = O_1C$

$O_1H^2 + CH^2 = O_1C^2$ (т. Пифагора $\triangle O_1CH$)

$3^2 + CH^2 = (2CH)^2$

$3^2 = 3CH^2$

$CH^2 = 3$

$CH = \sqrt{3}$

4) Найдем сторону DC в тр-ке O_2DC через т. Пифагора.

$\angle O_2CD = 30^\circ \Rightarrow 2O_2D = O_2C$

$O_2D^2 + CD^2 = O_2C^2$ (т. Пифагора $\triangle O_2DC$)

$CD^2 = 3O_2D^2$

$CD^2 = 3 \cdot 6^2$

$CD = 6\sqrt{3}$

5) $DH = DC - CH = 6\sqrt{3} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

см. дальше доп. лист

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 116059

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 10-5

6) $O_1H^2 + DH^2 = O_1D^2$ (т. Пифагора $\triangle O_1HD$)

$3^2 + (5\sqrt{3})^2 = O_1D^2$

$9 + 75 = O_1D^2$ ✓

$O_1D^2 = 84$

$O_1D = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

7) $\angle ACK = 180^\circ$

$\angle ACO_1 = \angle OCH$ (п. 1) ✓

$\angle DCO_2 = \angle O_2CK$ (п. 2)

$\Downarrow$

$\angle O_1CH + \angle DCO_2 = 90^\circ$

8) $\triangle O_1CO_2$ – прямоугольный ($\angle O_1CO_2 = 90^\circ$)

по т. Пифагора $\triangle O_1CO_2$:

$O_1C^2 + O_2C^2 = O_1O_2^2$

по т. Пифагора $\triangle O_1HC$:

$O_1H^2 + CH^2 = O_1C^2$

$9 + 3 = O_1C^2$ ✓

$O_1C^2 = 12$

по т. Пифагора $\triangle O_2DC$:

$O_2D^2 + DC^2 = O_2C^2$

$36 + 108 = O_2C^2$

$144 = O_2C^2$

$12 + 144 = O_1O_2^2$

$O_1O_2^2 = 156$

$O_1O_2 = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}$

9) Итак, мы знаем все стороны $\triangle O_1DO_2$.

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (ф. Герона)

$$S_{\triangle O_1DO_2}=\sqrt{p(p-O_1D)(p-O_2D)(p-O_1O_2)}$$

$$p=\frac{O_1D+O_2D+O_1O_2}{2}=\frac{2\sqrt{21}+6+2\sqrt{39}}{2}=\sqrt{21}+3+\sqrt{39}$$

$$S_{\triangle O_1DO_2}=\sqrt{(\sqrt{21}+\sqrt{39}+3)(\sqrt{21}+\sqrt{39}-3)(\sqrt{21}+3-\sqrt{39})(\sqrt{39}+3-\sqrt{21})}=$$

$$=\cancel{((\sqrt{21}+\sqrt{39})^2-9)(\sqrt{21}+3-}$$

$$\sqrt{\sqrt3(\sqrt7+\sqrt{13}+\sqrt3)\sqrt3(\sqrt7+\sqrt{13}-\sqrt3)\sqrt3(\sqrt7+\sqrt3-\sqrt{13})\sqrt3(\sqrt{13}+\sqrt3-\sqrt7)}=$$

$$=3\sqrt{(\sqrt7+\sqrt{13}+\sqrt3)(\sqrt7+\sqrt{13}-\sqrt3)(\sqrt7+\sqrt3-\sqrt{13})(\sqrt{13}+\sqrt3-\sqrt7)}=$$

$$=3\sqrt{((\sqrt7+\sqrt{13})^2-3)(\sqrt{7\cdot13}+\sqrt{21}-7+\sqrt{39}+3-\sqrt{21}-13-\sqrt{39}+\sqrt{7\cdot13})}=$$

$$=3\sqrt{(7+13+2\sqrt{7\cdot13}-3)(2\sqrt{7\cdot13}-17)}=$$

$$=3\sqrt{(17+2\sqrt{7\cdot13})(2\sqrt{7\cdot13}-17)}=$$

$$=3\sqrt{(4\cdot7\cdot13-17^2)}=$$

$$=3\sqrt{75}=3\sqrt{3\cdot25}=15\sqrt3$$

Ответ: $15\sqrt3$.

№4.

$$\frac{(|x^2-6|-10)(4x^2-1+\sqrt{4x^2-1})}{(|x-2|-|x+3|)\sqrt{x^2-10x+25}}\le0$$

$$\frac{(|x^2-6|-10)(4x^2-1+\sqrt{4x^2-1})}{(|x-2|-|x+3|)|x-5|}\le0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (|x^2-6|-10)(4x^2-1+\sqrt{4x^2-1})=0 \\ (|x-2|-|x+3|)\,|x-5|\neq 0 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} (|x^2-6|-10)(4x^2-1+\sqrt{4x^2-1})<0 \\ (|x-2|-|x+3|)\,|x-5|>0 \end{cases} \quad (2) \\ \begin{cases} (|x^2-6|-10)(4x^2-1+\sqrt{4x^2-1})>0 \\ (|x-2|-|x+3|)\,|x-5|<0 \end{cases} \quad (3) \end{array}\right.$$

(1) $(|x^2-6|-10)(4x^2-1+\sqrt{4x^2-1})=0$

$$\left[\begin{array}{ll} |x^2-6|-10=0 & а) \\ 4x^2-1+\sqrt{4x^2-1}=0 & б) \end{array}\right.$$

а) $|x^2-6|-10=0$

$|x^2-6|=10$

$x^2-6=10$ или $x^2-6=-10$

$x^2=16$ $\quad$ $x^2=-4$

$x=\pm 4$ $\quad$ корней нет

б) $4x^2-1\geq 0$

$x^2\geq \frac{1}{4}$

$\left[\begin{array}{l} x\geq \frac{1}{2} \\ x\leq -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Пусть $t=\sqrt{4x^2-1}$, $t\geq 0$

$t^2+t=0$

$t(t+1)=0$

$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \ (t\geq 0) \end{array}\right. \Rightarrow t=0$

$\sqrt{4x^2-1}=0$

$4x^2=1$

$x=\pm\frac{1}{2}$

при $x=-\frac{1}{2}$ $\quad (|x-2|-|x+3|)\,|x-5|=0$

$x=\pm 4;\ \frac{1}{2}$

(2) $(|x^2-6|-10)(4x^2-1+\sqrt{4x^2-1})<0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x^2-6|-10>0 \\ 4x^2-1+\sqrt{4x^2-1}<0 \end{cases} \quad а) \\ \begin{cases} |x^2-6|-10<0 \\ 4x^2-1+\sqrt{4x^2-1}>0 \end{cases} \quad б) \end{array}\right.$$

а) $|x^2-6|-10>0$

$|x^2-6|>10$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-6>10 \\ x^2-6<-10 \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x^2>16 \\ x^2<-4 \end{array}\right. \Rightarrow x^2>16$$

$$\left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-4 \end{array}\right.$$

$4x^2-1+\sqrt{4x^2-1}<0$

Пусть $\sqrt{4x^2-1}=t$, $t\geq 0$

$t^2+t<0$

$t(t+1)<0$

$+\quad -1 \quad - \quad 0 \quad + \quad t$

$t\in(-1;0)$, но $t\geq 0 \Rightarrow$ корней нет.

$\Downarrow$

корней нет

б) $|x^2-6|-10<0$

$|x^2-6|<10$

$$\begin{cases} x^2-6<10 \\ x^2-6>-10 \end{cases} ; \begin{cases} x^2<16 \\ x^2>-4 \end{cases} \Rightarrow |x|<4 \Rightarrow -4<x<4$$

$4x^2-1+\sqrt{4x^2-1}>0$

Пусть $\sqrt{4x^2-1}=t$, $t\geq 0$

$t^2+t>0$

$t(t+1)>0$

$+\quad -1 \quad - \quad 0 \quad +$ $\Rightarrow t>0$

$\sqrt{4x^2-1}>0$

$4x^2-1>0$

$x^2>\frac{1}{4}$

$$\left[\begin{array}{l} x>\frac{1}{2} \\ x<-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$\Downarrow$

~~$x\in\left(-4;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};4\right)$~~ см. доп. лист.

$x\in\left(-4;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};4\right)$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 116059

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 10-5

(3) ~~$(|x^2-6|-10)(4x^2-1+\sqrt{4x^2-1})>0$~~

$(|x-2|-|x+3|)\,|x-5|>0$

$\left[\begin{cases}|x-2|-|x+3|>0\\|x-5|>0\end{cases}\right.$
$\begin{cases}|x-2|-|x+3|<0\\|x-5|<0\end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases}|x-2|-|x+3|>0 & а)\\|x-5|>0 & б)\end{cases}$

б) $|x-5|>0$

$\cancel{x-5>0}$

$x\neq 5$

а) $|x-2|-|x+3|>0$

$- \; - \quad + \; + \quad + \; +$

(1) -3 (2) 2 (3) x

(1) $x<-3$

$-x+2-(-x-3)>0$

$-x+2+x+3>0$

$5>0$

~~корней нет~~

$x<-3$

$-3\le x\le 2$

(2) $-x+2-(x+3)>0$

$-x+2-x-3>0$

$-2x-1>0$

$x<-0.5$

$\Downarrow$

~~$x\in[2.5;3]$~~

$x\in[-3;-0.5)$

(3) $x>2$

$x-2-(x+3)>0$

$x-2-x+3>0$

$1>0$

и т.д.

$\Downarrow$

$x>2$

$\Downarrow$

~~$x\in(2.5;+\infty)$~~ $x\in(-\infty;-0.5)\cup(2;5)\cup$

$\cup(5;+\infty)$

$\Downarrow$

~~$x\in(2.5;4)$~~ ~~$x\in(-\infty;-0.5)\cup(2;5)\cup(5;+\infty)$~~

$x\in(-4;-\frac{1}{2})\cup(2;4)$

(3) $\left(|x^2-6|-10\right)\left(4x^2-1+\sqrt{4x^2-1}\right)>0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x^2-6|-10>0 \\ 4x^2-1+\sqrt{4x^2-1}>0 \end{cases} \quad а) \\ \begin{cases} |x^2-6|-10<0 \\ 4x^2-1+\sqrt{4x^2-1}<0 \end{cases} \quad б) \end{array}\right.$$

а) $|x^2-6|-10>0$

$|x^2-6|>10$

$\left[\begin{array}{l} x^2-6>10 \\ x^2-6<-10 \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x^2>16 \\ x^2<-4 \end{array}\right. \Rightarrow x^2>16$

$\left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-4 \end{array}\right.$ ✓

$4x^2-1+\sqrt{4x^2-1}>0$

Пусть $\sqrt{4x^2-1}=t,\ t\geq 0$

$t(t+1)>0$

$+ \quad -1 \quad - \quad 0 \quad + \quad t$

$\Downarrow$

$t>0$

$\sqrt{4x^2-1}>0$

$4x^2-1>0$

$x^2>\frac{1}{4}$

$\left[\begin{array}{l} x>\frac{1}{2} \\ x<-\frac{1}{2} \end{array}\right.$ ✓

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-4 \end{array}\right.$

б) $|x^2-6|-10<0$

$|x^2-6|<10$

$-10<x^2-6<10$

$-4<x^2<16$

$\begin{cases} x^2<16 \\ x^2>-4 \end{cases} \Rightarrow x^2<16 \Rightarrow -4<x<4$

$4x^2-1+\sqrt{4x^2-1}<0$

Пусть $\sqrt{4x^2-1}=t,\ t\geq 0$

$t(t+1)<0$

$+ \quad -1 \quad - \quad 0 \quad + \quad t$

$t\in(-1;0)$, но

$t\geq 0$

$\Downarrow$

корней нет

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-4 \end{array}\right.$

$(|x-2| - |x+3|) \cdot |x-5| < 0$ а)

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x-5| < 0 \\ |x-2|-|x+3|>0 \end{cases} \text{ а)} \\ \begin{cases} |x-5|>0 \\ |x-2|-|x+3|<0 \end{cases} \text{ б)} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} |x-5|>0 \quad (а) \\ |x-2|-|x+3|<0 \ (б) \end{cases}$$

(а) $|x-5|>0$
$x \neq 5$

$|x-2|-|x+3|<0$

$- - \quad - + \quad + +$

(1) -3 (2) 2 (3) x

(1) $x<-3$
$-\cancel{x}+2+\cancel{x}+3<0$
$5<0$
корней нет

(2) $-3 \le x \le 2$
$-x+2-(x+3)$
$-2x-1<0$
$2x>-1$
$x>0.5$
~~$x\in$~~ $x\in(-0.5;2]$

(3) $x>2$
$\cancel{x}-2-\cancel{x}-3<0$
$-5<0$
$\Downarrow$
$x>2$

$\Downarrow$

$x\in(-0.5;+\infty)\cup(5;+\infty)$

$\Downarrow$

$x\in(4;5)\cup(5;+\infty)$

$\Downarrow$

$x\in[-4;-\frac{1}{2})\cup(2;5)\cup(5;+\infty)$

Ответ: $x\in[-4;-\frac{1}{2})\cup(2;5)\cup(5;+\infty)$ 15

1/2 - ?

$$\frac{8-2a(x+2)}{|x|-x}=\sqrt{4-2a-ax}$$ №5

$$\frac{8-2a\cancel{x}-4a}{|x|-x}=\sqrt{4-2a-ax}$$

$x<0$, ✓ иначе $\frac{8-2ax-4a}{x-x}=\sqrt{4-2a+x}$, $x-x\neq 0$

$$\frac{-2ax-4a+8}{-2x}=\sqrt{4-2a-ax}$$

$$\frac{ax+2a-4}{x}=\sqrt{4-2a-ax}$$

$$\sqrt{4-2a-ax}+\frac{4-2a-ax}{x}=0$$

$$\sqrt{4-2a-ax}\left(1+\frac{\sqrt{4-2a-ax}}{x}\right)=0$$ ✓

$\sqrt{4-2a-ax}=0$

$4-2a-ax=0$

$ax=4-2a$ ✓

$x=\frac{4-2a}{a}$, $a\neq 0$

$1+\frac{\sqrt{4-2a-ax}}{x}=0$

$\sqrt{4-2a-ax}=-x$

$-x>0$

$\Downarrow$

$4-2a-ax=x^2$

$x^2+2ax+2a-4=0$

$D=4a^2-8a+16=$

$=4(a^2-2a+4)$ ✓

$x_{1,2}=\frac{-2a\pm 2\sqrt{a^2-2a+4}}{2}=$

$=-a\pm\sqrt{a^2-2a+4}$

$a^2-2a+4\geq 0$

$a^2-2a+4=0$

$D=4-16<0$

$\Downarrow$

$a^2-2a+4>0$ ✓

при любых $a\neq 0$

~~имеет более~~

уравнение

$$\frac{8-2a(x+2)}{|x|-x}=\sqrt{4-2a-ax}$$

имеет более одного корня,

при $a=0$ $\frac{8}{-2x}=\sqrt{4}$

$4=-2x$

$x=-2$, т.е один корень.

15

Ответ: $a\neq 0$ $x=\frac{4-2a}{a}$; $-a\pm\sqrt{a^2-2a+4}$

Неверный отбор корней