Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

116063

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

x1

x1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету Математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Коваленко Марина Аркадьевна

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Волжский, МОУ СШ № 30

Регистрационный номер 1061

Вариант задания 10-5

Дата проведения «2» марта 2019 г.

Подпись участника ____________

58 (пятьдесят восемь)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

116063

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	9	12	15	10	0					
										58

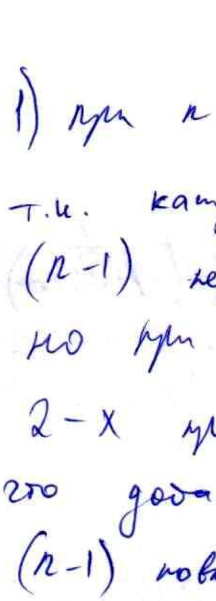
Шифр ____________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант №________

№1

1) при n прямых точек пересечения будет: $\frac{n(n-1)}{2}$, т.к. каждая прямая пересекает $(n-1)$ прямых и создает $(n-1)$ пересечений, всего прямых n $\Rightarrow$ $n(n-1)$ пересечений, но при этом каждое пересечение 2-х прямых мы считаем дважды $\Rightarrow$ пересечений будет: $\frac{n(n-1)}{2}$. Тогда получаем, что добавляя 1 прямую к $(n-1)$ к $(n-1)$ прямым получаем $(n-1)$ новых пересечений $\Rightarrow$ n новых плоскостей. Докажем это: пересекая $(n-1)$ прямую, мы пересекаем n плоскостей, т.к.



т.к. по прямой $(n-1)$ прямых разделят плоскость на n плоскостей (при ~~n+1~~ условии, что все эти прямые параллельны), а т.к. n-я прямая пересекает их по прямой $\Rightarrow$ она пересечет n плоскостей.

Тогда получаем, что при добавлении n-ой прямой, добавляется n плоскостей:

0 прямых — 1 плоскость

1 прямая — $1+1 = 2$ плоскость

2 прямых — $2+2 = 4$ плоскость

3 прямых — $4+3 = 7$ плоскостей

. . . и т.д.

~~получаем числа фибоначчи:~~ $\cancel{f_1 = 1}$

Тогда кол-во плоскостей при n прямых: $\cancel{f_2 = 1}$

$f_n = 1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ $\qquad \cancel{f_n = f_{n-1} + f_{n-2}}$

Тогда ~~f_{15}~~ при $n = 15$: получим будет:

~~$f_{15} = 1+1+2+4+7$~~

✓

$f_{15} = 1+1+2+3+4+5+\ldots+15 = 1 + \frac{1+15}{2}\cdot 15 =$

$= 1 + 8\cdot 15 = 1+120 = 121.$

Ответ: 121 ✓ 12

№3

$\sqrt{x^2+5x+10} - \sqrt{x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2+6x+6} = \sqrt{2x^2+4x+1}$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2+5x+10 \geq 0 & (1) \\ x^2+3x+5 \geq 0 & (2) \\ 2x^2+6x+6 \geq 0 & (3) \\ 2x^2+4x+1 \geq 0 & (4) \end{cases}$ везде парабола, ветви вверх

$x \in \left(-\infty; -1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[-1+\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$

?

(1): $x^2+5x+10 = 0$

$D = 25 - 40 < 0 \Rightarrow$ корней нет $\Rightarrow$ ~~$x\in$~~ x — любое

(2): $x^2+3x+5=0$

$D = 9-20 < 0 \Rightarrow x$ — любое

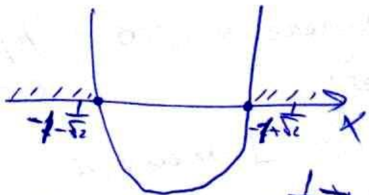
(3): $2x^2+6x+6=0$

$D = 36-48 < 0 \Rightarrow x$ — любое

(4): $2x^2+4x+1=0$

$D = 16-8 = 8$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{-4+2\sqrt{2}}{4} \\ x_2 = \frac{-4-2\sqrt{2}}{4} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x_1 = -1+\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2 = -1-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$



$x \in \left(-\infty; -1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[-1+\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right).$

~~$\sqrt{x^2+5x+10} - \sqrt{2x^2+3x+5}$~~

$\left(\sqrt{x^2+5x+10} - \sqrt{2x^2+4x+1}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2+6x+6}\right)^2$ ≥ 0?

$x^2+5x+10+2x^2+4x+1-2\sqrt{(x^2+5x+10)(2x^2+4x+1)} = x^2+3x+5+2x^2+6x+6-2\sqrt{(x^2+3x+5)(2x^2+6x+6)}$

$3x^2+9x+11-2\sqrt{(x^2+5x+10)(2x^2+4x+1)} = 3x^2+9x+11-2\sqrt{(x^2+3x+5)(2x^2+6x+6)}$

$2\sqrt{(x^2+5x+10)(2x^2+4x+1)} = 2\sqrt{(x^2+3x+5)(2x^2+6x+6)}$

$$(x^2+5x+10)(2x^2+4x+1)=(x^2+3x+5)(2x^2+6x+6)$$

$$(x^2+5x+10)(2x^2+4x+1)=2x^4+4x^3+x^2+10x^3+20x^2+5x+20x^2+40x+10$$

$$(x^2+3x+5)(2x^2+6x+6)=2x^4+6x^3+6x^2+6x^3+18x^2+18x+10x^2+30x+30$$

$$2x^4+14x^3+41x^2+45x+10=2x^4+12x^3+34x^2+48x+30$$

$$2x^3+7x^2-3x-20=0$$

$x=-2{,}5$ $\quad -31{,}25+43{,}75+7{,}5-20=0$

~~Ответ -2,5~~

$$\begin{array}{l} 2x^3+7x^2-3x-20 \,\big|\, x+2{,}5 \\ \underline{-2x^3+5x^2} \qquad\qquad 2x^2+2x-8 \\ \quad 2x^2-3x \\ \quad \underline{-2x^2+5x} \\ \qquad -8x-20 \\ \qquad \underline{-8x-20} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

12

~~Ответ: -2,5~~

$$(x+2{,}5)(x^2+x-8)=0$$

$$x^2+x-8=0$$

$$D=1+32=33$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$$

Ответ: $-2{,}5$; $\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$

№ 4

$$\frac{(|x^2-6|-10)(4x^2-1+\sqrt{4x^2-1})}{(|x-2|-|x+3|)\sqrt{x^2-10x+25}}\le 0$$

ОДЗ: $\begin{cases} 4x^2-1\ge 0 \\ |x-2|-|x+3|\ne 0 \\ \cancel{x^2-10x+25}>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2\ge \frac{1}{4} \\ |x-2|\ne|x+3| \\ (x-5)^2>0 \end{cases}$ $*$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x\in(-\infty;-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2};+\infty) \\ x\ne -\frac{1}{2} \\ x\ne 5 \end{cases}$ $\Rightarrow$

$$|x-2|=|x+3|$$

$\begin{cases} x-2=x+3 \\ x-2=-x-3 \end{cases}$; $\begin{cases} 0=5 \\ 2x=-1 \end{cases}$ $\quad x=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ ОДЗ: $x\in(-\infty;-\frac{1}{2})\cup[\frac{1}{2};5)\cup(5;+\infty)$.

$$\frac{(|x^2-6|-10)(4x^2-1+\sqrt{4x^2-1})}{(|x-2|-|x+3|)\sqrt{x^2-10x+25}}\le 0$$

$$\frac{(|x^2-6|-10)\left(\sqrt{4x^2-1}\left(\sqrt{4x^2-1}+1\right)\right)}{(|x-2|-|x+3|)\sqrt{x^2-10x+25}} \le 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{4x^2-1}\left(\sqrt{4x^2-1}+1\right) \geq 0 \\ \sqrt{x^2-10x+25} > 0 \end{cases}$$ всегда, при ОДЗ.

Тогда сократим их и рассмотрим дробь:

$\frac{|x^2-6|-10}{|x-2|-|x+3|} \vee 0$ (она будет такой же относительно сравнения с 0, т.е того что мы убрали, оно больше 0)

$$\frac{|x^2-6|-10}{|x-2|-|x+3|} \le 0.$$

1) ~~$|x^2-6|-10$~~

~~$+ \quad - \quad +$, точки $-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$, x~~

~~$x \le -\sqrt{6}$: $x^2-6-10 = x^2-16$~~

~~$-\sqrt{6} < x < \sqrt{6}$: $-x^2+6-10 = -x^2-4 = -(x^2+4) \le 0$ всегда.~~

~~$x \geq \sqrt{6}$: $x^2-6-10 = x^2-16$.~~

~~Рас-м: $x^2-16 \geq 0$, при $x \in (-\infty; -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}; +\infty)$~~

~~$x^2 \geq 16 \Rightarrow x \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$~~

$x \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$

$x^2-16<0$

$x^2<16 \Rightarrow x \in (-4;4) \Rightarrow x \in (-4; -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}; 4]$?

?

?

2 случая.

2) $|x-2| - |x+3|$

$-- \quad -+ \quad ++$, точки -3, 2, x

$x \le -3$: $-x+2+x+3 = 5 > 0$ всегда.

$-3 < x < 2$: $-x+2-x-3 = -2x-1$ $(\neq 0)$

$-2x-1 > 0$

$-2x > 1$

$x < -\frac{1}{2}$

$-2x-1<0$

$-2x<1$

$x > -\frac{1}{2}$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 116063

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант №________

продолжение №1

при $x \in (-3;\ 2)$:

$|x-2| - |x+3| > 0$ при $x \in (-\infty; -\frac{1}{2})$

$\Downarrow$

при $x \in (-3; -\frac{1}{2})$

$|x-2| - |x+3| < 0$ при $x \in (-\frac{1}{2}; +\infty)$

$\Downarrow$

при $x \in (-\frac{1}{2}; 2)$.

$x \geqslant 2$: $x-2-x-3 = -5 < 0$ всегда.

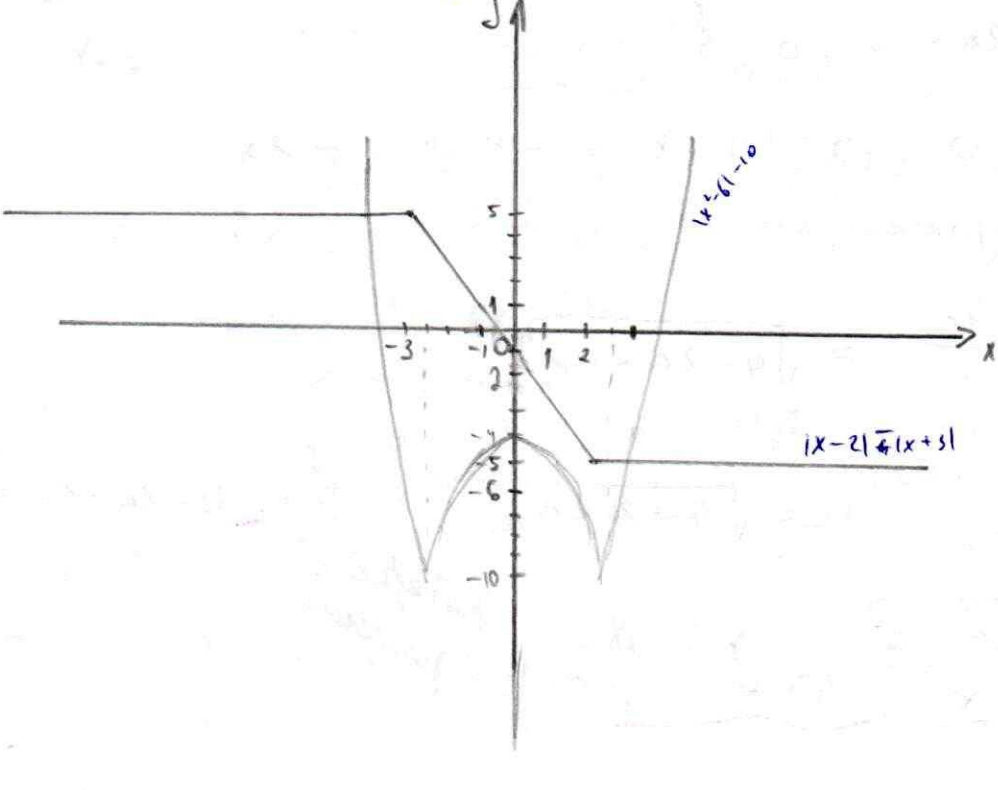
Тогда $|x-2| \mp |x+3| < 0$

при $x \in (-\frac{1}{2}; +\infty)$

$|x-2| \mp |x+3| > 0$

при $x \in (-\infty; -\frac{1}{2})$

Рассмотрим на графике:



Соберем вместе:

1) $\begin{cases} |x^2-6|-10 \geqslant 0 & \text{при } x \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty) \\ |x-2|-|x+3| < 0 & \text{при } x \in (-\frac{1}{2}; +\infty) \end{cases}$

$\Downarrow$

$x \in [4; +\infty)$

?

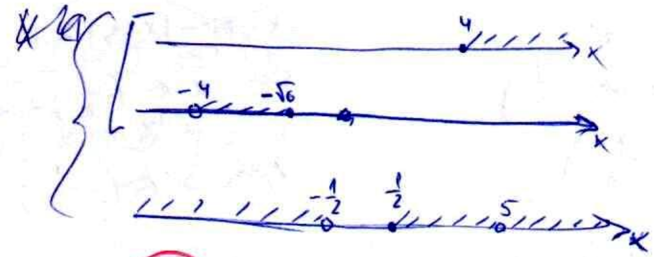
2) $\begin{cases} |x^2-6|-10 < 0 & \text{при } x \in (-4; -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}; 4) \\ |x-2|-|x+3| > 0 & \text{при } x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \end{cases}$

$\Downarrow$ $(-\sqrt{6} < -\frac{1}{2})$

$x \in (-4; -\sqrt{6}]$

Тогда, учитывая ОДЗ: $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}; 5) \cup (5; +\infty)$

Получаем:



Ответ: $(-4; -\sqrt{6}] \cup [4; 5) \cup (5; +\infty)$.

15

№5

$$\frac{8-2a(x+2)}{|x|-x} = \sqrt{4-2a-ax} \qquad a - ?$$ хотя бы 1 реш.

ОДЗ: $\begin{cases} |x|-x \neq 0 \Rightarrow |x| \neq x \Rightarrow x < 0 \\ 4-2a-ax \geqslant 0 \end{cases}$

Т.к. $x < 0 \Rightarrow |x|-x = -x-x = -2x$

Тогда получаем:

$$\frac{8-2ax-4a}{-2x} = \sqrt{4-2a-ax}$$

$$\frac{2(4-2a-ax)}{-2x} = \sqrt{4-2a-ax} \qquad \text{т.к. } 4-2a-ax \geqslant 0$$

$$\frac{\sqrt{4-2a-ax}}{-x} = 1$$

потеря решений

$\sqrt{4-2a-ax} = -x$

$4-2a-ax = x^2$

$x^2+ax+2a-4=0$

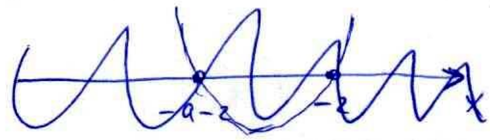
$D = a^2-4(2a-4) = a^2-8a+16 = (a-4)^2$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-a+|a-4|}{2} \\ x_2 = \dfrac{-a-|a-4|}{2} \end{array}\right.$

1) $a \geq 4$:

$x_1 = \dfrac{-a+a-4}{2} = -2 < 0$ верно.

$x_2 = \dfrac{-a-a+4}{2} = \dfrac{-2a+4}{2} = -a+2$



~~т.к. $x<0 \Rightarrow x \in (-a+2; -2)$~~

Рас-м: $-a+2$, $a \geq 4 \Rightarrow -a \leq -4 \Rightarrow -a+2 \leq -2 < 0$

$\Downarrow$

при $a \geq 4$ $x_1 = -2$

$x_2 = -a+2$.

2) $a<4$:

$x_1 = \dfrac{-a-a+4}{2} = \dfrac{-2a+4}{2} = -a+2$

$a<4 \Rightarrow -a > -4 \Rightarrow -a+2 > -2$

т.к. $x<0 \Rightarrow$ подходит только $-a+2<0$

$-2 < -a+2 < 0$

$-4 < -a < -2$

$4 > a > 2 \Rightarrow a \in (2; 4)$

$x_2 = \dfrac{-a+a-4}{2} = -2 < 0$ верно

Ответ: при $a \in (2; +\infty)$, $x_1 = -2$, $x_2 = -a+2$

неверный отбор реш.

10

$\cancel{N6}$

№2

$$x, y < 80$$

$$P(x) = (4x^5 - 3x^3 + 2)^3 (x^3 - 3x + 3)^2$$

$$Ax - By = C$$

$$C = P(0) = (0 - 0 + 2)^3 (0 - 0 + 3)^2 = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$$

$$A = P(1) = (4 - 3 + 2)^3 (1 - 3 + 3)^2 = 3^3 \cdot 1^2 = 27$$

~~Вы~~ сумма коэф. на ~~четн~~ местах:

$$\cancel{P(1) - P(-1) = (4-3+2)^3(1-3+3)^2 - (-4+3+2)^3(-1+3+3)^2 =}$$

$$\cancel{= 27 - 1^3 \cdot 5^2 = 27 - 25 = 2}$$

$$\cancel{B = 27 - 2 = 25}$$

~~Тогда~~ $\cancel{Ax - By = C}$

$$B = \frac{P(1) + P(-1)}{2} = \frac{(4-3+2)^3(1-3+3)^2 + (-4+3+2)^3(-1+3+3)^2}{2} =$$

$$= \frac{27 + 1^3 \cdot 5^2}{2} = \frac{27 + 25}{2} = \frac{52}{2} = 26.$$

$$Ax - By = C$$

$$\Updownarrow$$

$$27x - 26y = 72$$

$$-26y = 72 - 27x$$

$$26y = 27x - 72$$

$$y = \frac{27x - 72}{26}$$

$$27x - 72 \ \vdots \ 26$$

$$27x - 72 \underset{26}{\equiv} 0 \qquad \left| \begin{array}{l} 72 \underset{26}{\equiv} 20 \\ 27 \underset{26}{\equiv} 1 \end{array} \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{27x \equiv 3} \quad 27x - 20 \underset{26}{\equiv} 0$$

$$27x \underset{26}{\equiv} 20$$

$$x \underset{26}{\equiv} 20 \Rightarrow x = 20,\ x = 72.$$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 116063

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант №________

Продолж. №2:

$x=20$: $y=\frac{27\cdot20-72}{26}=\frac{540-72}{26}=\frac{468}{26}=18$

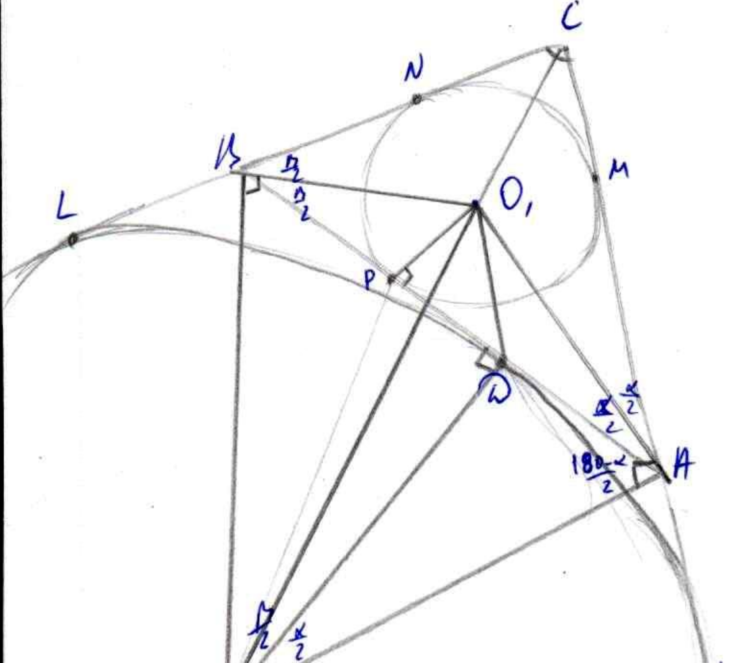
$x=72$: $y=\frac{27\cdot72-72}{26}=\frac{72(27-1)}{26}=72$

Ответ: $(20;18)$ ✓ ; $(72,72)$ ✓.

потеря решений

9

№6



Дано: $r_1=3$, $r_2=6$, $\angle BCA=120°$,

Найти: $S_{O_1DO_2}$

Решение:

1) BO_2 - бис-са $\angle LBA$

BO_1 - бис-са $\angle ABC$

т.к. $\angle LBA+\angle ABC=180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_2BO_1=90°$.

2) AO_2 - бис-са $\angle KAB$

AO_1 - бис-са $\angle BAC$

т.к. $\angle KAB+\angle BAC=180 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_1AO_2=90°$.

$\angle CBA+\angle CAB=180-\angle BCA=60°$.

?

тогда ~~$\angle CBO_1$~~ $\frac{\angle CBA+\angle CAB}{2}=30°$

$\angle CBO_1=\frac{\angle CBA}{2}$

$\angle CAO_1=\frac{\angle CAB}{2}$ $\Rightarrow \angle CBO_1+\angle CAO_1=30°$.

$\Rightarrow \angle CBO_2 + \angle CAO_2 + \angle BCA = \angle CBO_1 + 90 + \angle CAO_1 + 90 + 120 =$

$= 30^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 120^\circ = 330^\circ$

$\Downarrow$

$\angle BO_2A = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$

$\Downarrow$

$\angle BO_1A = 360 - 90^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

Пусть $CBA = \beta$, $CAB = \alpha$

? Ф