Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 217331

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Андроньким Захар Олегович

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Москва, ГБОУ школа №1580

Регистрационный номер 1904

Вариант задания 10 - 9

Дата проведения «17» марта 2019 г.

Подпись участника Андроньким

48 (сорок восемь)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
—	12	16	—	20	—					48

217331

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

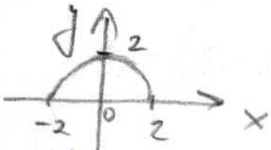
217331

Вариант № 10-9

31 №2. $\sqrt{4-x^2} - \sqrt[4]{9-y^2} - \sqrt{\sqrt{9-y^2}-x^2} \geq 2$

Рассмотрим $f_1(x)=\sqrt{4-x^2}$

$D_{f_1}=[-2;2]$



$E_{f_1}=[0;2]$

~~$f_2(y)=\sqrt[4]{9-y^2}$~~

~~$D_{f_2}=[-3;3]$~~

С другой стороны,

$f_2(x)=\sqrt[4]{9-y^2}\geq 0$

$f_3(x)=\sqrt{\sqrt{9-y^2}-x^2}\geq 0$

Тогда очевидно, что $f_1(x)-f_2(x)-f_3(x)\geq 2$ только если $f_1(x)=2$, а $f_2(x)=0$ и $f_3(x)=0$

$$\begin{cases}\sqrt{4-x^2}=2\\ \sqrt[4]{9-y^2}=0\\ \sqrt{\sqrt{9-y^2}-x^2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=\pm 3\end{cases}$$

12

Ответ: ~~x0~~ $x=0,\ y=\pm 3$.

№3.

1 : 9	7 : 39
2 : 13	8 : 51
3 : 17	9 : 27
4 : 21	10 : 75
5 : 87	11 : 21
6 : 45	12 : 87

Отсюда видим, что начиная с 4-го запуска программа зациклилась и цикл длиной 7 запусков. Тогда узнаем, сколько целых циклов было совершено за 2015 запусков (2019 − 4): $2015 : 7 = 287{,}8$ — 287 раз

$$\begin{array}{r|l} 2015 & 7 \\ \underline{-14} & 287{,}8 \\ 61 & \\ \underline{-56} & \\ 55 & \\ \underline{-49} & \\ 60 & \\ \underline{-56} & \\ 4 & \end{array}$$

Найдём, на каком шаге цикла остановилась программа:

$2015 - 7\cdot 287 = 2015 - 2009 = 6$

6й шаг в цикле − 75 − голубой

16

Ответ: голубой

№5. $((1-x^2)^2+2a^2+5a)^7-((3a+2)(1-x^2)+3)^7=5-2a-(3a+2)x^2-2a^2-(1-x^2)^2$

Рассмотрим левую часть:

$5-2a-(3a+2)x^2-2a^2-(1-x^2)^2=3a+2-(3a+2)x^2-5a+3-2a^2-(1-x^2)^2=$

$=((3a+2)(1-x^2)+3)-(2a^2+5a+(1-x^2))$

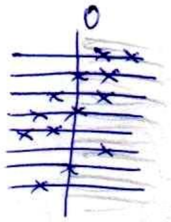
$((1-x^2)^2+2a^2+5a)^7-((3a+2)(1-x^2)+3)^7=((3a+2)(1-x^2)+3)-((1-x^2)^2+2a^2+5a)^7$

Это возможно, только если $(1-x^2)^2+2a^2+5a=(3a+2)(1-x^2)+3$

$\exists\, x^2=t,\ t\geq 0$

$(1-t)^2+2a^2+5a=(3a+2)(1-t)+3$

$t^2+3at+2(a^2+a-2)=0$



$D=(a-4)^2$

$x_в=-\frac{3}{2}a$

$f(0)=2(a-1)(a+2)$

2 корня: $\begin{cases}(a-4)^2>0\\ -\frac{3}{2}a>0\\ 2(a-1)(a+2)>0\end{cases}$ $\Leftrightarrow a<-2$

1 корень: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2(a-1)(a+2)=0\\ -\frac{3}{2}a>0\end{cases}\\ 2(a-1)(a+2)<0\\ \begin{cases}a=4\\ -\frac{3}{2}a>0\end{cases}\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow a\in[-2;1)$

$t=\frac{-3a\pm(a-4)}{2}=\left[\begin{array}{l}t_1=-a-2\\ t_2=-2a+2\end{array}\right.$

при $a \in [-2;1)$ $t=-2a+2$

$$x^2=-2a+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2-2a}\\ x=-\sqrt{2-2a}\end{array}\right.$$

$$-\frac{\sqrt6}{2} \le \sqrt{2-2a} \le \sqrt2 \qquad -\frac{\sqrt6}{2} \le -\sqrt{2-2a} \le \sqrt2$$

$$0 \le 2-2a \le 2 \qquad -\sqrt2 \le \sqrt{2-2a} \le \frac{\sqrt6}{2}$$

$$-2 \le 2a-2 \le 0 \qquad 0 \le 2-2a \le \frac32$$

$$0 \le 2a \le 2 \qquad -\frac32 \le 2a-2 \le 0$$

$$0 \le a \le 1 \qquad \frac12 \le 2a \le 2$$

$$\frac14 \le a \le 1$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a\in[\frac14;1]\\ a\in[0;1]\end{array}\right.\\ a\in[-2;1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \cancel{a\in[0;1]}\ a\in[\tfrac14;1)$$

при $a<-2$

$$\left[\begin{array}{l} x^2=-2a+2\\ x^2=-a-2\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{-2a+2}\\ x=\pm\sqrt{-a-2}\end{array}\right.$$

Рассмотрим те промежутки a, где из пар корней $\pm\sqrt{-2a+2}$ и $\pm\sqrt{-a-2}$ существует только один ~~~~ в совокупности со случаем, когда существуют корни $\pm\sqrt{-a-2}$ этой пары при $x\in[-\frac{\sqrt6}{2};\sqrt2]$

$$-\frac{\sqrt6}{2} \le \sqrt{-a-2} \le \sqrt2 \qquad -\frac{\sqrt6}{2} \le \sqrt{-a-2} \le \sqrt2$$

$$0 \le -a-2 \le 2 \qquad -\sqrt2 \le \sqrt{-a-2} \le \frac{\sqrt6}{2}$$

$$-2 \le a+2 \le 0 \qquad 0 \le -a-2 \le \frac32$$

$$-4 \le a \le -2 \qquad -\frac32 \le a+2 \le 0$$

$$-\frac72 \le a \le -2$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a\in[0;\frac14]\\ \left[a\in[-4;-\frac72]\right.\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} a\in[-4;-2]\\ a\in[-\frac72;-2]\end{array}\right.\end{array}\right.\\ a<-2\end{array}\right. \Leftrightarrow a\in[-\tfrac72;-2)$$

20

Ответ: $a\in[-\frac72;-2)$: $x=\pm\sqrt{-a-2}$
$a\in[\frac14;1)$: $x=\pm\sqrt{2-2a}$