Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

217649

Шифр ______________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

+12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И.О. участника Ноянский Артём Максимович

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, №1580 при МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Регистрационный номер 1452

Вариант задания 3.

Дата проведения «17» марта 2019 г.

Подпись участника ______

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

сорок пять

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	0	0	20	5	20					45

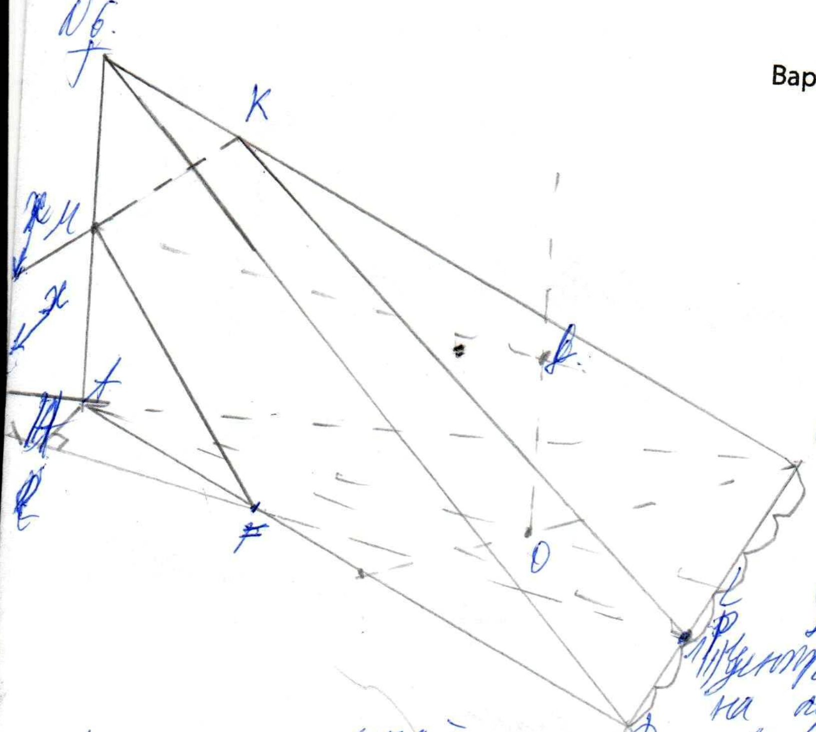
217649

Шифр ________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 3

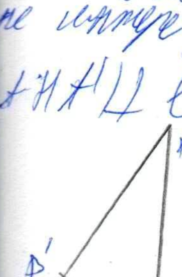
№6.



Дано: TABC – пир,
ABC – прав, $TA \perp (ABC)$,
$AC = 3$;
α через Q – центр оп. сферы.

Решение:

1) Центр описанной сферы – т. Q – лежит на перпендикуляре, восстановленном в центре описанной около основания окружности – т. O – т. пересечения медиан △ABC.
Т.к. т. T и A лежат на сфере, то центр описанной сферы лежит на перпендикуляре, восстановленном в середине отрезка TA – точке M.
Т.к. $TA \perp (ABC)$ и $AL \subset (ABC)$, $AL \perp TA$ и тогда, т.к. $OQ \perp (ABC)$, $OQ \parallel TA$ и тогда $MQ \parallel AO$, (т.к. лежат в одной пл-ти и перпендикулярны одной прямой).
2) Пусть $\alpha \cap (ABC) = l$ и $l \cap AB = F$. Пусть $l \cap BC = P$.
Д.п. $AH \mid H \in l \wedge AH \perp l$. Т.к. проекция сечения наклонена к пл. основания, а A является орт. проекцией некой точки A', ее положение нас не интересует. По теореме о трех перпендикулярах, $A'H \perp l$, а значит $AHA' \perp l$. Тогда, по опр. линейного угла двугранного угла, $\angle A'HA$ – угол между



(ABC) и α – пл. сечения, он равен 30° по усл.
Д.п. в (A'HA): AP' | $P' \in A'H \wedge AP' \perp A'H$. Т.к. $(AHA') \perp l$, $AP' \perp l$, но $AP' \perp A'H$ по постр., a(A'H, l) = α (образуют пл. сечения), а значит, т.к. $HA' \cap l = H$, $AP' \perp \alpha$, а значит $AP' = \rho(A, \alpha)$, а значит, из условия, $AP' = \frac{1}{4}$. Но т.к. AP' – катет в △AP'H, ∠P' = 90°

$\angle H = 30^\circ$, $AH = \frac{AP}{\sin 30^\circ} = \frac{1\cdot 2}{4\cdot 1} = \frac{1}{2}$.

3) т.к. $AH = \frac{1}{2}$, а $\frac{AP}{PC} = \frac{2}{1}$ по усл., кроме того, т.к. AL – медиана,

$PL = \frac{1}{6}AC = \frac{1}{2}$, а значит в $\triangle AHP$ и $\triangle ALP$,

$\angle H = \angle P = 90^\circ$, AP – общ. гипотенуза, а $AH = \frac{1}{2} = LP$, а зн-т,

$\triangle AHP = \triangle ALP$ по катету и гипотенузе, сл-но $\angle LAP = \angle APH$

как соотв. эл-ты равных тр-ков, а зн-т $l \parallel AL$ у равенство

накрест лежащих углов при секущей AP.

4) т.к. $l \parallel AL$, $l \parallel (MAD)$, а зн-т α пересекает (MAD) по некоторой

прямой p такой, что $p \parallel l$, а зн-т $p \parallel AL$, и т.к. т. $D \in \alpha$,

$p = DM$ и др. (фиксируем, что $DM \parallel AL$).

сл-но, т. $M \in \alpha$.

4.) Из т. Фалеса, $\frac{AF}{FD} = \frac{LP}{PD} = \frac{1}{2}$; из т. Фалеса $\frac{AC}{AX} = \frac{CL}{LP} = \frac{3}{1}$.

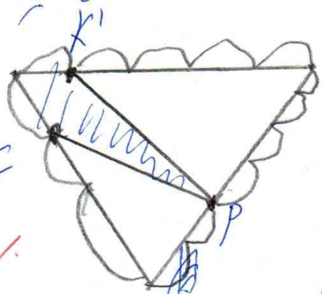
Пусть $l \cap AC = X$ (вн. (ADC)).

(ATC): $XM \cap TC = K$

По т. Менелая, $\frac{TK}{KC}\cdot\frac{CX}{XA}\cdot\frac{AM}{MT} = 1$; $\frac{TK}{KC}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{1} = 1$, $\frac{TK}{KC} = \frac{1}{4}$.

Итак, сечение $XPFM$ построено и рассчитано.

5.) $K' = \text{пр}_{ABC} K$; $AK'PF$ – проекция ортогональная сечения на основание



Пусть $S_{ABC} = S$, тогда $S_{\text{проекции}} = S_{\text{пр}} = S\left(1 - \frac{2}{9} - \frac{8}{15}\right) =$

$= S - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}S - \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}S =$

$= S\left(\frac{45 - 10 - 24}{45}\right) = \frac{11}{45}S = \frac{11}{45}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{11\cdot 3^2\cdot\sqrt{3}}{\frac{45}{5}\cdot 4} = \frac{11\sqrt{3}}{20}$

$S_\alpha = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos\alpha} = \frac{11\sqrt{3}}{20\cdot\cos 30^\circ}$ по усл. $= \frac{11\sqrt{3}\cdot 2}{20\cdot\sqrt{3}} = \frac{11}{10}$.

20

Ответ: $\frac{11}{10}$.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

217649

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 3

№ 5 (продолжение).

Отсюда $B < 0$, и

$\log_5 \frac{A}{B} = \cancel{A - B}$

При $A > B$, $\log_5 \frac{A}{B} > 0$ – невозможно, т.к. $\frac{A}{B} > 1$.

При $A < B$, $\log_5 \frac{A}{B} < 0$ – невозможно, т.к. $\frac{A}{B} < 1$

Сл-но, $A = B$, кроме того, $A < 0$, $B < 0$.

$(\sin^2 a - 4)\cos 2a - 3\sqrt{3} = 3\sin 2a \cos 2$

№ 1.

$1 \to 5 \to 9 \to 13 \to 17 \to 21 \to 87 \to 45 \to 39 \to 51 \to 27 \to 75 \to 21$

4 выполнения – период

осталось 2014 выполнений

?

$7 \to 11 \to 15 \to \ldots$

0

$$\begin{array}{r|l} 2014 & 4 \\ \hline 14 & 287 \\ 61 & \\ 56 & \\ 54 & \\ 49 & \\ 5 & \end{array}$$

Останется 5, сл-но далее после выполнения 287 раз одного алгоритма, мы попадем в $21 \to 87 \to 45 \to 39 \to 51 \to 27$.

Цвет под номером ~~27~~. 23.

Ответ: цвет под номером 27. (салатовый?)

??

№2.

$$\operatorname{tg} x - \sqrt[4]{\cos y} - \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{\cos y} - 4} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} \geq \underbrace{\sqrt[4]{\cos y} + \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{\cos y} - 4}}_{\geq 0.}$$

ОДЗ. $\begin{cases} \cos y \geq 0 \\ \frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{\cos y} - 4 \geq 0 \ (2) \end{cases}$

(2) $\frac{1}{\cos^2 x} - 4 \geq \underbrace{-\sqrt{\cos y}}_{\leq 0};$

Очевидно, что $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} \geq 0.$ ✓

$4 - \frac{1}{\cos^2 x}$ или $\sqrt{\cos y} \leq 1,$

$\frac{1}{\cos^2 x} \geq 3; \ 0 < \cos^2 x \leq \frac{1}{3},$ $\left[\begin{array}{l} 0 < \cos x < \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} < \cos x < 0 \end{array}\right.$

и ?

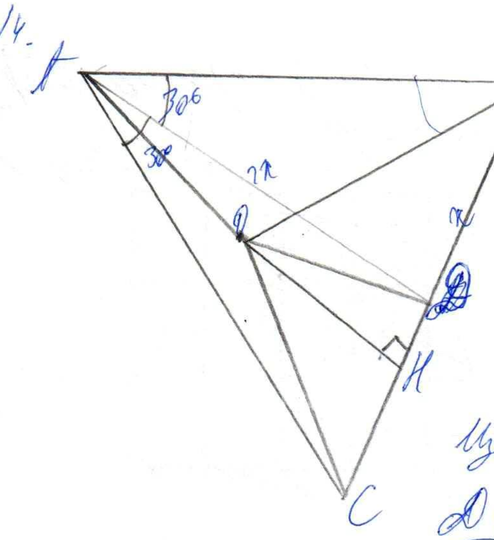
$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} \geq 0$

$\frac{1}{\cos^2 x} - 1 - \sqrt{3} \geq 0$

$\frac{1}{\cos^2 x} \geq 1 + \sqrt{3},$ но т.к. $\frac{1}{\cos^2 x} \geq 3;$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \sqrt[4]{\cos y} - \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{\cos y} - 4} \geq \sqrt{3} + 1$$

№4.



Решение:

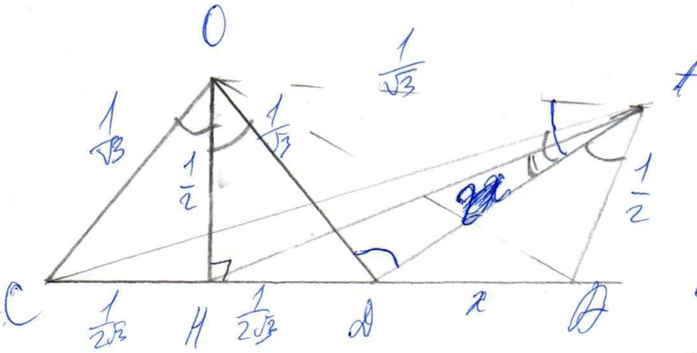
Из следствия т. синусов для △ ADC,

$\frac{DC}{\sin 30^\circ} = 2R$, $\frac{DC \cdot 2}{1} = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{3}}$; $DC = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$OD = OC = \frac{1}{\sqrt{3}}$ как радиус описанной окружности, а зн-т в △ ODC все три стороны равны $\frac{1}{\sqrt{3}}$, а значит △ COD — правильный, и тогда $OH = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$, где $OH \perp DC$ и $H \in DC$. Отсюда получаем, что $OH = AB$.

~~т.к. ∠HOD = ∠DAB и OH = AB,~~

$\cancel{\frac{OD}{DB} = \frac{HD}{DB},\ \frac{DB}{AB} = \frac{OD}{HD} = \frac{1}{2}}$



~~Проведём AH. ∠HAD = 15° как половина центрального.~~

Но $\angle AHB = 15^\circ$ как угол между касательной и секущей.

В △ HAB, $\angle A = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$, $\angle AHD = 15^\circ$,

тогда $\angle B = 180^\circ - (15^\circ + 45^\circ) = 120^\circ$, тогда $\angle D = 30^\circ$,

Итак, в △ ABD $\angle B = 120^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, ~~а тогда AD = 1~~,

а зн-т △ ABD — р/б, а зн-т $x = \frac{1}{2}$, $BD = \frac{1}{2}$. Тогда в △ OHB (прямоугольный, $\angle H = 90^\circ$),

из т. Пифагора, $OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)^2} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7+2\sqrt{3}}{3}}$

Из т. косинусов для △ ADB, $DB^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos 30^\circ$.

$x^2 = 4x^2 + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$; $3x^2 + \frac{1}{4} - x\sqrt{3} = 0 \ |\cdot 4$; $12x^2 - 4\sqrt{3}x + 1$; $\left(x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 0$; $x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

И из т. Пифагора, $OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + x\right)^2}$.

$HB = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $OB = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{7}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Имеем, что по трём сторонам, △ OAB = △ BHO (по общ.), а зн-т. $r = \frac{OH + HB - OB}{2}$, т.к. △ OHB — пр-ный.

r вп. в △ OAB равен радиусу вписанной в △ OHB окр.

$r_{вп} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{7}{12}}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{7}}{2\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7} + 2}{4\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{7} + 2}{4\sqrt{3}}$.

№5.

$$\log_5 \frac{(\sin x-4)\cos 2a - 3\sqrt3}{3\sin 2a\cos x} = |3\sin 2a\cos x| - |(4-\sin x)\cos 2a + 3\sqrt3|$$

Пусть $3\sin 2a\cos x = b$, $(\sin x-4)\cos 2a - 3\sqrt3 = t$

$$\log_5 \frac{t}{b} = |b| - |t|; \quad \frac{t}{b} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t>0 \\ b>0 \end{cases} \mathrm{I} \\ \begin{cases} t<0 \\ b<0 \end{cases} \mathrm{II} \end{array}\right.$$

I. $\log_5 \frac{t}{b} = |b| - |t| \Leftrightarrow \log_5 t - \log_5 b = b - t; \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_5 b + b = \log_5 t + t$, т.е. это зн-е одной и той же функции

$f(x) = \log_5 x + x$. т.к. $f(x)\nearrow$ ($f'(x) = \frac{1}{x\ln 5} + 1$ для $x>0$, $f'(x)>0 \ \forall x\in(0;+\infty)$),

$\boxed{f(t) = f(b) \Leftrightarrow t = b > 0}$ V.

$$3\sin 2a\cos x$$

$$\begin{cases} (\sin x-4)\cos 2a - 3\sqrt3 = 3\sin 2a\cos x \\ 3\sin 2a\cos x > 0 \end{cases}$$

$(\sin x-4)\cos 2a - 3\sqrt3 \vee 0$ при $\begin{cases} \sin x-4 = -3 \\ \cos 2a = -1 \end{cases}$

$\underbrace{(\sin x-4)}_{[-5;-3]}\underbrace{\cos 2a}_{[-1;1]}$ min $t = -5-3$

~~№2. $\operatorname{tg} x - \sqrt[4]{\cos y} - \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{\cos y} - 4} \geq \sqrt3$~~

~~$\operatorname{tg} x - \sqrt3 \geq \sqrt{\cos y} + \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{\cos y} - 4}$~~ ≥ 0

ОДЗ: $\begin{cases} \operatorname{tg} x - \sqrt3 \geq 0 \\ \cos y \geq 0 \\ \frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{\cos y} - 4 \geq 0 \end{cases}$

далее неразумительно!...

5

~~II. $\log_5 \frac{-t}{-b} = |b| - |t| \Leftrightarrow \log_5(-t) - \log_5(-b) = t - b \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow t - \log_5(-t) = b - \log_5(-b)$~~, т.е. это

$g(x) = x - \log_5(-x)$; $g'(x) = 1 - \frac{1\cdot(-1)}{(-x)\cdot\ln 5} = 1 - \frac{1}{x\ln 5}$

~~$\log_5 \frac{t}{b} = |b| - |t|$~~

$t = \underbrace{(\sin x-4)}_{[-5;-3]}\underbrace{\cos 2a}_{[-1;1]} - 3\sqrt3$, max t при $\begin{cases} \sin x - 4 = -5 \\ \cos 2a = -1 \end{cases}$

max $t = 5 - 3\sqrt3$

$5 - 3\sqrt3 \vee 0$

$5 \vee 3\sqrt3$

$25 \vee 27$

$<$

$(\ast\ast)$ max $t < 0$, а зн-т $t < 0$.