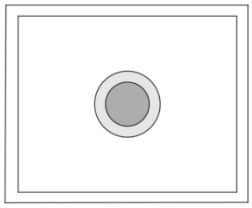
Второй (заключительный) этап олимпиады школьников «Шаг в будущее» для 8-10 классов по общеобразовательному предмету «Математика», 9 класс, весна 2018 г.

Вариант №9

Задача 1. (10 баллов) Решите уравнение

$$x^2-6\sqrt{x^2+1}+11-\cos\frac{x^2-4+x\sqrt{2}}{18}=0$$

Задача 2. (10 баллов) Дима посадил в центре прямоугольного листа бумаги размером 15 см на 20 см круглую кляксу радиусом 2 см. Сразу после этого Дима посадил ещё одну такую кляксу, которая также целиком оказалась на листе. Найдите вероятность того, что эти две кляксы пересекаются.



Задача 3. (10 баллов) Дан треугольник **ABC,** где **BA**=5, **BC**=8. В треугольник вписана окружность, касающаяся стороны **BC** в точке **P**. Известно, что **BP**=3. Найдите площадь треугольника **BMP**, где **M**-точка касания окружности со стороной **AC**.

Задача 4. (10 баллов) Подряд в строчку выписана 2018 цифр. Известно, что в этой строчке каждое двузначное число, записываемое двумя соседними цифрами (в том порядке, в каком они записаны), делится на 17 или на 23. В этой строчке последняя цифра 5. Какая цифра в строчке первая? Дать обоснованный ответ.

Задача 5. (15 баллов) Решите неравенство

$$\left(\boldsymbol{2+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}\right):\left(\boldsymbol{-2+\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}}\right)\geq\boldsymbol{\sqrt{x-8}}$$

Задача 6. (15 баллов) На плоскости **xOy** укажите все точки, через которые не проходит ни одна из кривых, заданных уравнением

$$ax^2+(1-6a)x+2-a-2y+ay^2=0$$

Задача 7. (15 баллов) Пусть S_n – сумма **n** первых членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$. Известно, что $S_{n+1}=2n^2-21n-23$.

а) Укажите формулу **n**-го члена этой прогрессии.

б) Найдите наименьшую по модулю сумму S_n.

в) Найдите наименьшее n, при котором S_n будет квадратом целого числа

Задача 8. (15 баллов) В прямоугольном треугольнике ABC с катетами AC=3 и **BC**=2 проведены медиана **CM** и биссектриса **CL.**

а) Найдите отношение площадей треугольников **CML** и **ABC**.

б) Найдите тангенс угла **MCL**.

Решение варианта№9, 9 класс

Задача 1. (10 баллов) Решите уравнение

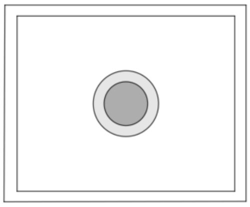
$$x^2-6\sqrt{x^2+1}+11-\cos\frac{x^2-4+x\sqrt{2}}{18}=0$$

1. Решение:

Представим уравнение в виде $(\sqrt{x^2+1}-3)^2+(1-\cos\frac{x^2-4+x\sqrt{2}}{18})$=0. Обе скобки неотрицательны, равенство суммы нулю возможно только при одновременном равенстве нулю выражений в обеих скобках. $\begin{cases}\sqrt{x^2+1}=3\\ \cos\frac{x^2-4+x\sqrt{2}}{18}=1\end{cases}$. Решения первого уравнения $x=\pm 2\sqrt{2}$. При x=$2\sqrt{2}$ система несовместна, при x=-$2\sqrt{2}$ второе уравнение дает $\cos 0=1.$

Ответ: x=-$2\sqrt{2}$

Задача 2. (10 баллов) Дима посадил в центре прямоугольного листа бумаги размером 15 см на 20 см круглую кляксу радиусом 2 см. Сразу после этого Дима посадил ещё одну такую кляксу, которая также целиком оказалась на листе. Найдите вероятность того, что эти две кляксы пересекаются.



2. Решение:

По условию центр второй кляксы находится на расстоянии не менее 2 см от края листа, т.е. внутри прямоугольника 11 см на 16 см. Рассмотрим событие A «Кляксы пересекаются». Для этого нужно, чтобы центр второй кляксы попал в круг радиусом 4 см с тем же центром, что и первая клякса.

Вероятность этого события $P(A)=\frac{S_{\text{кр}}}{S_{\text{пр}}}=\frac{16\pi}{11\cdot 16}=\frac{\pi}{11}$.

Ответ. $\frac{\pi}{11}$.

Задача 3. (10 баллов) Дан треугольник **ABC,** где **BA**=5, **BC**=8. В треугольник вписана окружность, касающаяся стороны **BC** в точке **P**. Известно, что **BP**=3. Найдите площадь треугольника **BMP**, где **M**-точка касания окружности со стороной **AC**.

3. Решение:

Сторона AC треугольника равна 7. По Формуле Герона $S_{ABC}=10\sqrt{3}$.

Тогда $S_{\text{BMC}}=\frac{5}{7}S_{ABC}=\frac{50\sqrt{3}}{7}$. Тогда $S_{\text{BM}P}=\frac{3}{8}S_{BMC}=\frac{75\sqrt{3}}{28}$.

Ответ: $\frac{75\sqrt{3}}{28}$

Задача 4. (10 баллов) Подряд в строчку выписана 2018 цифр. Известно, что в этой строчке каждое двузначное число, записываемое двумя соседними цифрами (в том порядке, в каком они записаны), делится на 17 или на 23. В этой строчке последняя цифра 5. Какая цифра в строчке первая? Дать обоснованный ответ.

Решение:

Все двузначные числа, делящиеся на 17 или на 23:

$$17,\quad 34,\quad 51,\quad 68,\quad 85,$$

$$23,\quad 46,\quad 69,\quad 92$$

В следующей схеме показано стрелками, какая цифра за какой может стоять в строчке:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & 7 & & 9 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 \\ \uparrow & & & & \uparrow & & & \swarrow & \\ 5 & \longleftarrow & 8 & \longleftarrow & 6 & \longleftarrow & 4 & & \end{array}$$

Перебор цифр в строчке справа налево соответствует движению против направления стрелок. Если в этой схеме шаги делать против направления стрелок, начиная с цифры 5, то за два шага попадаем в 6, а дальше будем ходить по циклу, через каждые 5 шагов снова попадая в 6.

Поскольку $2017 = 2 + 5 \cdot 403$, то первая цифра будет 6.

Ответ. 6.

Задача 5. (15 баллов) Решите неравенство

$$\left(\mathbf{2}+\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{4}\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{4}}}\right):\left(-\mathbf{2}+\sqrt{\boldsymbol{x}+\mathbf{4}\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{4}}}\right)\geq\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{8}}$$

Решение:

Пусть $\sqrt{x-4}$=t,t$\geq 0.$ ОДЗ задачи $x \geq 8, t \geq 2.$ $\frac{2+\sqrt{t^2-4t+4}}{-2+\sqrt{t^2+4t+4}} \geq \sqrt{t^2-4};$ $\frac{2+|t-2|}{-2+|t+2|} \geq \sqrt{t^2-4};$

$$\sqrt{t^2-4} \leq 1;\ t^2-4 \leq 1; x-4 \leq 5; 8 \leq x \leq 9.$$

Ответ: (8;9)

Задача 6. (15 баллов) На плоскости **xOy** укажите все точки, через которые не проходит ни одна из кривых, заданных уравнением

$$ax^2+(1-6a)x+2-a-2y+ay^2=0$$

Решение:

Представим уравнение как линейное относительно параметра а.

а$(x^2-6x-1+y^2)=-x-2+2y.$ Если это уравнение не будет иметь решений при любом а, мы найдем те точки (x;y), через которые не проходит ни одна из кривых. $\begin{cases} x^2-6x-1+y^2=0 \\ -x-2+2y\neq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 10=y^2+(x-3)^2 \\ y\neq \frac{x+2}{2} \end{cases}$, получаем окружность

$10=y^2+(x-3)^2$ без точек (0;1) и (4;3).

Ответ: $10=y^2+(x-3)^2$ без точек (0;1) и (4;3).

Задача 7. (15 баллов) Пусть $\mathbf{S_n}$ – сумма **n** первых членов арифметической прогрессии $\mathbf{\{a_n\}}$. Известно, что $\mathbf{S_{n+1}=2n^2-21n-23}$.

а) Укажите формулу **n**-го члена этой прогрессии.

б) Найдите наименьшую по модулю сумму $\mathbf{S_n}$.

в) Найдите наименьшее n, при котором $\mathbf{S_n}$ будет квадратом целого числа

Решение:

а) $a_n=4n-27$. $S_n=S_{(n-1)+1}=2(n-1)^2-21(n-1)-23=2n^2-25n;$

$S_{n-1}=2(n-1)^2-25(n-1)=2n^2-29n+27\Rightarrow a_n=S_n-S_{n-1}=4n-27.$

б) –12. Поскольку $a_n=4n-27<0$ при $n\le 6$ и $a_n>0$ при $n\ge 7$, S_n убывает от значения $a_1=-23$ до S_6, далее возрастает.

$S_n=2n^2-25n<0$ при $n\le 12$, $S_n>0$ при $n\ge 13$. Следовательно,

$|S_n|_{\min}=\min\{|a_1|;|S_{12}|;|S_{13}|\}=\min\{|-23|;|-12|;13\}=12$ при $n=12$. $S_{12}=-12$.

в) 25. Пусть $S_n=2n^2-25n=k^2$. (*)

Заметим, что число $n(2n-25)$ заведомо будет квадратом целого числа, если $n=2n-25$, то есть при $n=25$. Покажем, что S_n не является точным квадратом при $n\in[13;24]$.

1 способ. Выясним, какой может быть последняя цифра числа $2n^2-25n$, в зависимости от последней цифры числа n, и результаты занесем в таблицу.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2n^2-25n$	0	7	8	3	2	5	2	3	8	7

Из всех вариантов во второй строке таблицы, квадрат целого числа может оканчиваться только на 0 и 5, когда n также оканчивается на 0 и 5. Таких чисел в рассматриваемом промежутке два – 15 и 20. Числа $S_{15}=75$ и $S_{20}=300$ не являются точными квадратами. Значит, при $n\in[13;24]$ равенство (*) невозможно, что и требовалось доказать.

2 способ. Установим, какие значения могут принимать остатки от деления на 5 левой и правой частей равенства (*). Составим таблицу остатков, используя известное утверждение арифметики остатков: произведение (сумма) чисел дает такой же остаток при делении (на некоторое число), как и произведение (сумма) остатков этих чисел.

n	0	1	2	3	4
n^2	0	1	4	4	1
$2n^2-25n$	0	2	3	3	2

При составлении таблицы учтено, что $25n$ делится на 5, то есть дает остаток 0. Числа 2 и 3 не могут быть остатками при делении на 5 квадрата целого числа (см. вторую строку таблицы). Следовательно, n делится на 5. Далее – как в 1 способе.

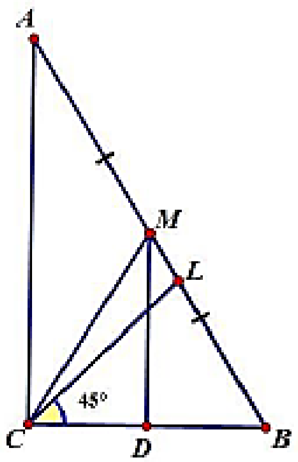
Ответ: а) $a_n = 4n - 27$; б) -12; в) 25

Задача 8. (15 баллов) В прямоугольном треугольнике ABC с катетами AC=3 и **BC**=2 проведены медиана **CM** и биссектриса **CL.**

а) Найдите отношение площадей треугольников **CML** и **ABC**.

б) Найдите тангенс угла **MCL**.

Решение:



а) По теореме Пифагора: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{13}$.

По свойству медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, $AM = BM = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника: $\frac{BL}{AL} = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3}$.

Если $BL = 2k$, то $AL = 3k$, $AB = 5k$, $k = \frac{\sqrt{13}}{5}$, $BL = \frac{2\sqrt{13}}{5}$, $AL = \frac{3\sqrt{13}}{5}$. $BL < AL$, значит, точка L лежит между M и B. $ML = BM - BL = \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{2\sqrt{13}}{5} = \frac{\sqrt{13}}{10}$.

Так как треугольники CML и ABC с основаниями ML и AB соответственно имеют равные высоты, проведенные к этим сторонам из их общей вершины C, то:

$\frac{S(ABC)}{S(CML)} = \frac{AB}{ML} = \sqrt{13} : \frac{\sqrt{13}}{10} = 10,$ что и требовалось доказать.

б) Проведем $MD -$ среднюю линию треугольника ACB. Тогда $MD = \frac{AC}{2} = \frac{3}{2}$.

$\angle MCL = \angle MCD - 45^\circ$. $tg\angle MCL = tg(\angle MCD - 45^\circ) = \frac{tg\angle MCD - tg 45^\circ}{1 + tg\angle MCD \cdot tg 45^\circ}$.

$tg\angle MCD = \frac{MD}{CD} = \frac{3}{2} : 1 = \frac{3}{2} = 1{,}5;$ $tg\angle MCL = \frac{1{,}5 - 1}{1 + 1{,}5 \cdot 1} = \frac{0{,}5}{2{,}5} = \frac{1}{5};$ $\angle MCL = arctg\,\frac{1}{5}$.

Ответ: а) 1/10; б) arctg(1/5)