Второй (заключительный) этап олимпиады школьников

«Шаг в будущее» для 8-10 классов по общеобразовательному предмету

«Математика», 9 класс, весна 2018 г.

Вариант №5

1) *(10 баллов)* Решите уравнение

$$(x^2+3x+2)(x^2+3x+3)(x^2+3x+4)(x^2+3x+5)=15$$

2) *(10 баллов)* Ваня и Дима пошли на рынок. У Вани было 1000 рублей, а у Димы – 2000 рублей. Они покупали что-то независимо друг от друга, а в какой-то момент они встретились и решили купить модель танка за 1800 рублей. Найдите вероятность того, что оставшейся у них суммы хватит на это.

3) *(10 баллов)* На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки E и F такие, что AF = AC и BE = BC. Найдите угол ECF.

4) *(10 баллов)* Ваня в вершинах квадрата записал четыре натуральных числа, затем он возле каждой стороны записал произведение чисел в её концах. Проходящей мимо Ксюше Ваня сообщил, что сумма этих произведений равна 143. Ксюша, не смотря на рисунок Вани, немного подумала и назвала сумму чисел в вершинах, с чем Ваня согласился. Какое число назвала Ксюша? Дать обоснованный ответ.

5) *(15 баллов)* Решите неравенство

$$\sqrt{x}\cdot\left(\frac{-x^2+81+(x-9)\sqrt{x^2+6x-27}}{9-x^2+(x+3)\sqrt{x^2+6x-27}}\right)\cdot\sqrt{\frac{x-3}{x+9}}\geq\frac{1}{\sqrt{x}}$$

6) *(15 баллов)* Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет только одно решение.

$$|x-a^5+a|+|x+a+32|=a^3+a^2-a+2$$

7) *(15 баллов)* а) Имеют ли общие члены две последовательности: 3; 16; 29; 42;… и 2; 19; 36; 53;…? (если да – привести пример, если нет – объяснить почему)

б) Имеют ли общие члены две последовательности: 5; 16; 27; 38;… и 8; 19; 30; 41…? (если да – привести пример, если нет – объяснить почему)

в) Определите, какое наибольшее количество общих членов может быть у двух арифметических прогрессий 1; …; 1000 и 9; …; 999, если известно, что у каждой из них разность является целым числом, отличным от 1.

8) *(15 баллов)* В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Площади треугольников AOB и COD равны. Найдите площадь треугольника AOB, если известно, что $AB=13$, $BC=10$, $CD=15$, $DA=24$.

Решение варианта №5, 9 класс

1) *(10 баллов)* Решите уравнение

$$(x^2+3x+2)(x^2+3x+3)(x^2+3x+4)(x^2+3x+5)=15$$

Решение:

Сделаем замену переменной $\boldsymbol{x^2+3x=t}$; $\boldsymbol{t^2+7t+11=z}$; $\boldsymbol{z^2}$=16; тогда $\boldsymbol{t^2}$+7t+11=4 имеет корни $t=\frac{-7\pm\sqrt{21}}{2}$, а соответствующие уравнения для x дают корни $x=\frac{-3\pm\sqrt{-5+2\sqrt{21}}}{2}$. Уравнение $\boldsymbol{t^2}$+7t+11=-4 корней не имеет.

Ответ: $\frac{-3\pm\sqrt{-5+2\sqrt{21}}}{2}$

2) *(10 баллов)* Ваня и Дима пошли на рынок. У Вани было 1000 рублей, а у Димы – 2000 рублей. Они покупали что-то независимо друг от друга, а в какой-то момент они встретились и решили купить модель танка за 1800 рублей. Найдите вероятность того, что оставшейся у них суммы хватит на это.

Решение.

Пусть на момент встречи у Вани было $\boldsymbol{x}$ руб., $\boldsymbol{0\le x\le 1000}$, у Димы $-$ $\boldsymbol{y}$ руб., $\boldsymbol{0\le y\le 2000}$. Рассмотрим прямоугольник $\boldsymbol{0\le x\le 1000}$, $\boldsymbol{0\le y\le 2000}$ как множество всех элементарных исходов. Область в прямоугольнике, определенная условием $\boldsymbol{x+y\ge 1800}$, соответствует благоприятным исходам. Рассмотрим отношение площади области благоприятных исходов к площади прямоугольника и получим искомую вероятность: $\frac{1000\cdot 200+\frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 1000}{1000\cdot 2000}=\frac{7}{20}$.

Ответ. $\frac{7}{20}$.

3) *(10 баллов)* На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки E и F такие, что AF = AC и BE = BC. Найдите угол ECF.

Решение:

Треугольник CAF – равнобедренный. Если угол CAB = α, то $\angle$ ACF = $90° - \frac{\alpha}{2}$.

Треугольник CBE – равнобедренный. Если угол CBA = β, то $\angle$ BCE = $90° - \frac{\beta}{2}$..

Тогда $\angle ECF = 90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\beta}{2} - 90° = 45°$.

Ответ: 45°

4) *(10 баллов)* Ваня в вершинах квадрата записал четыре натуральных числа, затем он возле каждой стороны записал произведение чисел в её концах. Проходящей мимо Ксюше Ваня сообщил, что сумма этих произведений равна 143. Ксюша, не смотря на рисунок Вани, немного подумала и назвала сумму чисел в вершинах, с чем Ваня согласился. Какое число назвала Ксюша? Дать обоснованный ответ.

Решение.

Пусть в вершинах были записаны числа $\boldsymbol{a, b, c}$ и $\boldsymbol{d}$. Тогда возле сторон были записаны числа $\boldsymbol{ab, bc, cd}$ и $\boldsymbol{da}$. Их сумма равна
$\boldsymbol{ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d) = 143}$. Разложим 143 на множители: $143 = 11 \cdot 13 = 1 \cdot 143$. Других разложений нет, так как 11 и 13 – простые числа. Вариант $1 \cdot 143$ не подходит, так как сумма натуральных чисел не может равняться 1. Значит, $\boldsymbol{a + c} = 11$, $\boldsymbol{b + d} = 13$ или наоборот. В обоих случаях $\boldsymbol{a + b + c + d} = 11 + 13 = 24$.
Ответ. 24.

5) *(15 баллов)* Решите неравенство

$$\sqrt{x} \cdot \left(\frac{-x^2 + 81 + (x-9)\sqrt{x^2+6x-27}}{9 - x^2 + (x+3)\sqrt{x^2+6x-27}}\right) \cdot \sqrt{\frac{x-3}{x+9}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Решение:

ОДЗ неравенства $x > \mathbf{3}$. С помощью разложения на множители и сокращения одинаковых выражений с учетом ОДЗ получаем простое неравенство $\frac{9-x}{x+3} \geq \frac{1}{x}$.
Пересекая множество его решений с условием ОДЗ, получаем $x \in \left(\mathbf{3}; \mathbf{4} + \sqrt{\mathbf{13}}\right]$

Ответ: $\left(\mathbf{3}; \mathbf{4} + \sqrt{\mathbf{13}}\right]$

6) *(15 баллов)* Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет только одно решение.

$$|x - a^5 + a| + |x + a + 32| = a^3 + a^2 - a + 2$$

Решение:

С помощью графического представления левой и правой частей уравнения на плоскости $\boldsymbol{y(x)}$ заметим, что левая часть - линейная функция с двумя изломами при $x = \boldsymbol{a^5 - a}$; $x = -a-32$, правая часть - горизонтальные прямые. Тогда решений либо нет, либо их бесконечно много (там, где участок между двумя изломами горизонтален), либо их два. Чтобы могло существовать одно решение, точки излома должны совпадать и правая часть при этом должна быть равна нулю. Это соответствует значению параметра $a=-2$.

Ответ: $a=-2$.

7) *(15 баллов)* а) Имеют ли общие члены две последовательности: 3; 16; 29; 42;… и 2; 19; 36; 53;…? (если да – привести пример, если нет – объяснить почему)

б) Имеют ли общие члены две последовательности: 5; 16; 27; 38;… и 8; 19; 30; 41…? (если да – привести пример, если нет – объяснить почему)

в) Определите, какое наибольшее количество общих членов может быть у двух арифметических прогрессий 1; …; 1000 и 9; …; 999, если известно, что у каждой из них разность является целым числом, отличным от 1.

Решение:

а) Первая последовательность $a_n = 3+13(n-1)$, вторая последовательность $b_k = 2+17(k-1)$

Нужно решить уравнение 13n-10 = 17k-15 или 13n=17k-5, n=14, k=11 ;

$a_{14} = 172; b_{11} = 172$

Ответ: **да, имеют общие члены**, например 172.

Б) Первая последовательность $a_n = 5 + 11(n-1)$, вторая последовательность $b_n = 8 + 11(k-1)$

Нужно решить уравнение 11n-6 = 11k-3 или 11n=11k-9. Это уравнение не имеет решений в целых числах, значит, общих членов у последовательностей нет.

В) Из формулы n-го члена арифметической прогрессии:

$1000 = 1 + d_1(n_1 - 1)$,

$999 = 9 + d_2(n_2 - 1)$.

Из первого уравнения: $\frac{999}{d_1} = n_1 - 1$, d_1 может равняться $37;27;9;3$.

Из второго уравнения: $\frac{990}{d_2} = n_2 - 1$, d_2 может равняться $2;3;5;6;9;10;11;12$ и т.д., большие d нам не интересны. Возьмем для первой прогрессии $d = 3$, для второй прогрессии все d, которые делятся на 3 не подходят, так как члены второй прогрессии будут делиться на три, а первой нет. Возьмем для второй прогрессии $d = 2$. Заметим, что каждый третий член этой прогрессии совпадает с членами первой прогрессии.

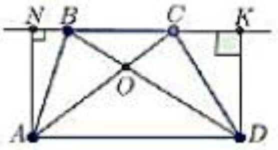
Всего во второй прогрессии $\frac{990}{2} + 1 = 496$ членов, из них $\frac{496}{3} = 165$ совпадают с членами первой прогрессии.

То, что количество совпадающих членов наибольшее, следует из того, что знаменатели обеих прогрессий наименьшие.

Ответ: а)Да, например, 172   б) Нет   в) 165

8) *(15 баллов)* В выпуклом четырехугольнике *ABCD* диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *O*. Площади треугольников *AOB* и *COD* равны. Найдите площадь треугольника *AOB*, если известно, что *AB=13*, *BC=10*, *CD=15*, *DA=24*.

Решение:



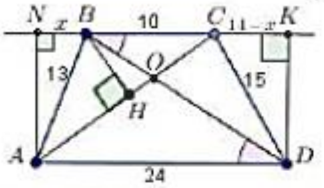
(а) Опустим $\perp$ -ры из точек A и D на прямую BC: $AN \perp DC$, $DK \perp BC$.
Надо доказать, что AN=DK.
Рассмотрим ΔABC и ΔBCD:
ΔABC можно разбить на два треугольника: ΔAOB и ΔBOC,
ΔBCD можно разбить на два треугольника: ΔCOD и ΔBOC.

По свойствам площадей: $S_{ABC} = \underset{(S_{AOB} = S_{COD} \text{ по усл.})}{S_{AOB} + S_{BOC} = S_{COD}} + S_{BOC} = S_{BCD} \Rightarrow S_{ABC} = S_{BCD}$, $\dfrac{BC \cdot AN}{2} = \dfrac{BC \cdot DK}{2}$

$\Downarrow$

AN=DK (ч.т.д.)

(б) $S_{AOB} - ?$



1) AN=DK (п.(а)), AN || DK ($\angle N + \angle K = 180°$ - односторонние при сек. BC)
$\Rightarrow$ ANKD – параллелограмм и прямоугольник ($\angle N = \angle K = 90°$)
$\Rightarrow$ BC || AD $\Rightarrow$ ABCD – трапеция.

2) Пусть NB=x, NK=AD=24, тогда CK=NK–NB–BC=14-x.
По т.Пифагора из п/у ΔANB и ΔDKC:
$AN^2 = AB^2 - NB^2 = 169 - x^2$, $DK^2 = CD^2 - CK^2 = 225 - (14 - x)^2$

Т.к. AN=DK, приравняем правые части: $169 - x^2 = 225 - (14 - x)^2$, $28x = 140$, $x = 5$. $AN = \sqrt{169 - 25} = 12$.

3) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot AN = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$.

4) $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ по двум $\angle$ ($\angle BOC = \angle AOD$ как вертикальные, $\angle CBO = \angle ODA$ – накрест-лежащие при BC || AD, сек. BD
$\Rightarrow \dfrac{OC}{AO} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{5}{12}$.

5) Проведём $BH \perp AC$. ΔAOB и ΔBOC имеют одинаковую высоту (BH) $\Rightarrow \dfrac{S_{BOC}}{S_{AOB}} = \dfrac{OC}{AO} = \dfrac{5}{12}$,
пусть $S_{BOC} = 5y$, $y > 0$, $S_{AOB} = 12y$, $S_{AOB} + S_{BOC} = S_{ABC}$.

$12y + 5y = 60 \Rightarrow y = \dfrac{60}{17}$, тогда $S_{AOB} = 12 \cdot \dfrac{60}{17} = \dfrac{720}{17}$.

Ответ: 720/17