Второй (заключительный) этап олимпиады школьников
«Шаг в будущее» для 8-10 классов по общеобразовательному предмету
«Математика», 8 класс, весна 2018 г.

Вариант №9

Задача 1. (10 баллов) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+2y+1=0 \\ y^2+2z+1=0 \\ z^2+2x+1=0 \end{cases}$$

Задача 2. (15 баллов) В вершинах куба расставлены последовательные нечетные натуральные числа от 1 до 15. На каждой грани записана сумма чисел, расставленных в ее вершинах. Может ли оказаться так, что на гранях записано шесть последовательных четных чисел? Ответ обоснуйте.

Задача 3. (15 баллов) Найдите двузначное число $\overline{xy}$, квадрат суммы цифр которого на 8 больше суммы произведения цифр числа и квадрата единиц этого числа, увеличенной в 7 раз.

Задача 4. (15 баллов) В одной коробке лежат два ботинка 42 размера, в другой – два ботинка 43 размера, а в третьей – один ботинок 42, а другой 43 размера. Каждая коробка подписана (указан размер 42, 43 или 42-43), но надпись неправильно указывает содержимое коробки. Неверная информация написана на всех коробках. Из какой коробки, не глядя, надо вынуть ботинок, чтобы можно было определить содержимое каждой коробки.

Задача 5. (25 баллов) При каких целых значениях параметра «а» выражение $\frac{x_1+x_2-2x_1x_2}{x_1x_2}$ принимает целые значения, если x_1 и x_2 – различные корни уравнения

$$(a-3)x^2-12x+a-11=0.$$

Задача 6. (20 баллов) В равнобедренном треугольнике ABC (AB=BC) биссектрисы BD и AF пересекаются в точке O. Площади треугольников DOA и BOF относятся как 3:8. Найдите отношение AC : AB.

Решение варианта №9, 8 класс

1. Решение

Пусть (x;y;z)-возможное решение. Сложив все три уравнения получаем $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=0$, откуда следует, что x=y=z=-1. Проверка показывает, что данная тройка является решением системы.

Ответ: (-1;-1;-1).

2. Решение

Пусть на гранях записано шесть последовательных четных чисел и n – наименьшее из них. Тогда их сумма $S = n + (n+2) + \dots + (n+10) = 6n + 30$

Так как каждое из чисел от 1 до 15 входит в три суммы, записанные на гранях, то $S = (1+3+\dots+15)\cdot 3 = 64 \cdot 3 = 192$

Тогда $6n + 30 = 192$ $n = 27$, но n четно, следовательно, не может.

3. Решение

Найдите двузначное число $\overline{xy}$, квадрат суммы цифр которого на 8 больше суммы произведения цифр числа и квадрата единиц этого числа, увеличенной в 7 раз.

Возможное решение.

Составим уравнение: $(x+y)^2 - 8 = 7 * (xy + y^2)$, преобразуем:

$(x+y)^2 - 7 * (xy + y^2) = 8;$

$(x+y)^2 - 7y(x+y) = 8;$

$(x+y-7y)(x+y) = 8;$

$(x+y-7y)(x+y) = 8;$

$(x-6y)(x+y) = 8;$

Число 8 можно представить в виде произведения двух целых чисел, учитывая порядок множителей, четырьмя способами, причём $x+y>0$, тогда и $x-6y>0$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-6y=8 \end{cases} <=> \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases} - \text{ не подходит}$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-6y=4 \end{cases} <=> \begin{cases} y=\dfrac{-2}{7} \\ x=2\frac{2}{7} \end{cases} - \text{ не подходит}$$

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-6y=2 \end{cases} <=> \begin{cases} y=\dfrac{2}{7} \\ x=1\frac{5}{7} \end{cases} - \text{ не подходит}$$

$$\begin{cases} x+y=8 \\ x-6y=1 \end{cases} <=> \begin{cases} y=1 \\ x=7 \end{cases} \rightarrow \text{искомое число } 71$$

Ответ: 71.

4. Решение

Так как надписи неверны, то в коробке, где подписано 42 – 43 лежат ботинки или только 42 размера, или только 43 размера. Выбираем эту коробку и если достаем ботинок 42 размера то в коробке с надписью 42 находим ботинки 43 размера, а в коробке с надписью 43 лежат ботинки разных размеров. А если достанем ботинок 43 размера то в коробке с надписью 43 найдем ботинки 42 размера, а в коробке 42 лежат разные ботинки.

5. Решение

Уравнение $(a-3)x^2-12x+a-11=0$ имеет два различных корня, если

$$D>0; a-3\neq 0$$

$D=6^2-(a-3)*(a-11)=-a^2+14a+3; a\neq 3.$

По теореме Виета: $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{12}{a-3} \\ x_1x_2=\frac{a-11}{a-3} \end{cases}$ тогда:

$\frac{x_1+x_2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}-2=\frac{12*(a-3)}{(a-3)(a-11)}-2=\frac{12}{(a-11)}-2$ —> будет целым, если $a-11$ делитель числа 12.

Т.е. $(a-11)$ = $\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm12;$ —>

Тогда, при условии что $D>0$, «а» может принимать следующие значения: 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13,14.

Ответ: $a\in\{5,7,8,9,10,12,13,14\}$

6. Решение

Примем площадь треугольника ABC за 1.

$\frac{S_{DOA}}{S_{BOF}}=\frac{3x}{8x}$, тогда $S_{AOB}=\frac{1}{2}-3x, S_{DOFC}=\frac{1}{2}-8x.$

(по свойствам равнобедренного треугольника)

$\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{FC}=\frac{S_{ABF}}{S_{AFC}}=\frac{\frac{1}{2}-3x+8x}{\frac{1}{2}-8x+3x}=\frac{\frac{1}{2}+5x}{\frac{1}{2}-5x}.$ (по свойству биссектрисы угла и свойству площадей треугольников с равной высотой)

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BO}{OD}=\frac{S_{ABO}}{S_{AOD}}=\frac{\frac{1}{2}-3x}{3x},\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{2AD}=\frac{\frac{1}{2}-3x}{6x}.$$

Получим $\frac{\frac{1}{2}+5x}{\frac{1}{2}-5x}=\frac{\frac{1}{2}-3x}{6x}, 15x^2+7x-\frac{1}{4}=0, x=\frac{1}{30}$. Тогда $\frac{AB}{AC}=\frac{\frac{1}{2}-3x}{6x}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}}=\frac{2}{1}.$