Второй (заключительный) этап олимпиады школьников
«Шаг в будущее» для 8-10 классов по общеобразовательному предмету
«Математика», 8 класс, весна 2018 г.
Вариант №3

Задача 1. (15 баллов) Найти все натуральные значения n, для которых число $n^4 - n^3 + n^2 + 2$ является простым.

Задача 2. (15 баллов) Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами быть равным 7?

Задача 3. (15 баллов) Найдите все такие k и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y + 2|x| = 2 \\ y = кx + в \end{cases}$$ имеет бесконечно много решений.

Задача 4. (20 баллов) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и BP. На высоте AD взята точка M, а на высоте BP - точка N так, что $\angle BMC = \angle ANC = 90°$, $MN = 4 + 2\sqrt{3}$, $\angle MCN = 60°$. Найдите биссектрису угла C треугольника MCN.

Задача 5. (15 баллов) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 70 км, выехал велосипедист, а через некоторое время — мотоциклист, двигавшийся со скоростью 50 км/ч. Мотоциклист догнал велосипедиста на расстоянии 20 км от пункта A. Прибыв в пункт B, мотоциклист через 48 мин выехал обратно в пункт A и встретился с велосипедистом спустя 2 ч 40 мин после выезда велосипедиста из пункта A. Найдите скорость велосипедиста.

Задача 6. (20 баллов) Винни-Пух и Пятачок делят конфеты. Если Винни возьмет у Пятачка несколько конфет, то у него станет конфет в 4 раза больше, чем у Пятачка. Если же Пятачок заберет у Винни 90 конфет из его первоначального количества, то у Пятачка станет конфет в 5 раз больше, чем у Винни. Какое минимально возможное количество конфет могло быть у Пятачка и Винни-Пуха первоначально?

Решение варианта №3, 8 класс

1. Решение:

Разложим данное выражение на множители

$$n^4-n^3+n^2+2=n^4-n^3-n+1+n^2+n+1=$$
$$=n^3(n-1)-(n-1)+(n^2+n+1)=$$
$$=(n-1)(n^3-1)+(n^2+n+1)=(n^2+n+1)((n-1)^2+1)$$

Данное число будет простым, когда один из множителей равен 1, а другой множитель – простое число.

Так как $(n^2+n+1)\geq 3$ для всех натуральных n, то $((n-1)^2+1)=1$, решение которого $n=1$. При этом значении первый множитель равен 3- простому числу. Ответ $n=1$

2. Решение

Пусть квадратное уравнение имеет вид $ax^2+вx+c=0$, при условии a, b, с целые числа. Тогда дискриминант $D=в^2-4ac$, является целым числом, которое при делении на 4 дает тот же остаток, что и $в^2$,т. е 0 или 1. Число 7 при делении на 4 дает остаток 3. Ответ: нет, не может.

1. Найдите все такие k и b, при которых система уравнений $\begin{cases} y+2|x|=2 \\ y=кx+в \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

3. Решение

Уравнение $y+2|x|=2$ задаёт на координатной плоскости прямые: y=-2x+2, при x≥0 и y=2x+2, при x<0. Для того, чтобы система имела бесконечное множество решений необходимо, чтобы прямая y= k x+ b совпадала с одной из этих прямых. Ответ k =±2; b =2.

4. Решение

В треугольниках MCB и MDC $\cos\angle MCB=\frac{MC}{BC}=\frac{DC}{MC}$, следовательно, $MC^2=DC\cdot BC$.

В треугольниках APN и ANC $\cos\ \angle PAN=\frac{AP}{AN}=\frac{AN}{NC}$, следовательно, $AN^2=AP\cdot AC$.

$$\cos\angle BCA=\frac{PC}{BC}=\frac{DC}{AC}\Leftrightarrow PC\cdot AC=DC\cdot BC\Rightarrow MC^2=NC^2\Leftrightarrow MC=NC.$$

Значит, треугольник MCN равнобедренный. Проведем в нем CL – биссектрису, медиану и высоту. Тогда $\angle MCL=30°, CL=\frac{ML}{tg\angle MCL}=\frac{(2+\sqrt{3})3}{\sqrt{3}}=3+2\sqrt{3}.$

5. Решение

Возможное решение:

Пусть y есть время, через которое выехал мотоциклист после выезда велосипедиста.

$v_в = x$ км/ч и $v_м = 50$ км/ч скорости велосипедиста и мотоциклиста соответственно.

$t_{мотоциклиста} = 2\frac{40}{60} - \frac{70}{50} - \frac{4}{5} = \frac{7}{15}$ ч; —> получим систему:

$$\begin{cases} \frac{20}{x} - \frac{20}{50} = y \\ 70 - \frac{8}{3}x = 50 * (\frac{7}{15} - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{20}{x} - \frac{2}{5} = y \\ 70 - \frac{8}{3}x = \frac{70}{3} - 50y \end{cases}$$

$$70 - \frac{8}{3}x = \frac{70}{3} - 50 * (\frac{20}{x} - \frac{2}{5})$$

$$x^2 - 10x - 375 = 0$$

$$D = 400$$

$$X1 = 25 \text{ км/ч}$$

$X2 = -15$ км/ч - не подходит по условию задачи => $x = 25$ км/ч

Ответ: 25 км/ч

6. Решение

Пусть x конфет у Пятачка, y - у Винни, n несколько конфет, которые Винни взял бы у Пятачка. Получим систему.

$\begin{cases} y + n = 4(x - n) \\ x + 90 = 5(y - 90), \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5y - 540 \\ y + n = 20y - 2160 - 4n, \end{cases}$ откуда $y = 113 + \frac{5n+13}{19}$. Так как y минимально и принимает натуральные значения, то это возможно при n=5, тогда $\begin{cases} y = 115 \\ x = 35 \end{cases}$

Ответ: у Винни было 115 конфет, у Пятачка 35 конфет.