Второй (заключительный) этап олимпиады школьников

«Шаг в будущее» для 8-10 классов по общеобразовательному предмету

«Математика», 10 класс, весна 2018 г.

Вариант №11

Задача 1. (10 баллов) Вычислите tg^2x+ctg^2x, если $tgx-ctgx=-3$

Задача 2. (10 баллов) Решить неравенство: $\dfrac{15(x+1)^4}{x(x^2+1)}\geq 128$

Задача 3. (10 баллов) Решить уравнение: $\sqrt[4]{514-x}+\sqrt[4]{192+x}=8$.

Задача 4. (15 баллов) По кругу, на котором расположены точки с номерами от 1 до 2018, начиная с первой точки, движется аппарат и стирает каждую вторую точку по ходу пока не останется одна. Какой на ней будет номер? (Сначала стирается точка с номером 2, затем с номером 4 и т.д.).

Задача 5. (15 баллов) Из пункта А в пункт В в 9-00 утра выезжает автобус. В этот же момент из В в А выезжают грузовик и трактор, причём скорость грузовика в два раза больше скорости трактора. Автобус прибывает в В тот же день в 14 часов 50 минут, при этом он встречает грузовик не ранее 11 часов 30 минут утра. Определите время прибытия трактора в пункт А, если между моментами встреч автобуса с грузовиком и автобуса с трактором проходит не менее одного часа.

Задача 6. (15 баллов) Можно ли разбить числа 1, 2, 3,…,99, 100 на три группы так, чтобы сумма чисел в одной группе делилась на 102, сумма чисел в другой группе делилась на 203, а сумма чисел в третьей группе делилась на 304?

Задача 7. (15 баллов) Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a+2)x^2+(|a+3|-|a+11|)x+a=4$ имеет два различных положительных корня.

Задача 8. (15 баллов) В треугольнике АВС с основанием АС=14 и боковыми сторонами АВ=13 и ВС=15 из центра вписанной окружности строится ломаная линия из трех звеньев так, что конечная ее точка – центр описанной около АВС окружности, а еще две точки М и К лежат на боковых сторонах треугольника АВС. Найдите площадь треугольника МВК, если длина этой ломаной линии наименьшая.

Решение варианта №11, 10 класс

Задача 1. (10 баллов) Вычислите $tg^2 x + ctg^2 x$, если $tgx - ctgx = -3$

1. Решение: $tg^2 x + ctg^2 x = (tgx + ctgx)^2 - 2tgx \cdot ctgx = (-3)^2 - 2 = 7$.

Ответ: 7.

Задача 2. (10 баллов) Решить неравенство: $\frac{15(x+1)^4}{x(x^2+1)} \ge 128$

2. Решение: $\frac{15(x+1)^4}{x(x^2+1)} \ge 128$. В неравенстве $\frac{15(x^2+2x+1)^2}{x(x^2+1)} \ge 128$, сделаем замену $y = x^2 + 1$, получим: $\frac{15(y+2x)^2}{xy} \ge 128$, преобразовывая, получаем: $\frac{(3y-10x)(5y-6x)}{xy} \ge 0$

$\frac{(3x^2-10x+3)(5x^2-6x+5)}{x(x^2+1)} \ge 0$, учтем, что два квадратных трехчлена принимают только положительные значения, тогда:

$$\frac{(3x-1)(x-3)}{x} \ge 0$$

$$x \in \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty)$$

Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty)$.

Задача 3. (10 баллов) Решить уравнение: $\sqrt[4]{514 - x} + \sqrt[4]{192 + x} = 8$.

3. Решение:

пусть $\sqrt[4]{514 - x} = u$; $\sqrt[4]{192 + x} = v$.

Получаем систему: $\begin{cases} u + v = 8 \\ u^4 + v^4 = 706 \end{cases}$.

Получилась симметрическая система.

Сделаем замену: $u + v = a = 8$; $u \cdot v = b$.

Преобразуем левую часть второго уравнения:

$$u^4+v^4=u^4+2u^2v^2+v^4-2u^2v^2=(u^2+v^2)^2-2(uv)^2=$$
$$=(u^2+2uv+v^2-2uv)^2-2b^2=((u+v)^2-2uv)^2-2b^2=$$
$$=(8^2-2b)^2-2b^2=64^2-256b+4b^2-2b^2=$$
$$=2(b^2-128b+64\cdot 32)=706$$

Решениями данного квадратного уравнения будут $b=15$ и $b=113$. Обратная замена: $\begin{cases} u+v=8 \\ uv=15 \end{cases}$, откуда либо $u=3; v=5$, либо $u=5; v=3$. При этом получается либо

$$\begin{cases} 514-x=81 \\ 192+x=625 \end{cases}, \quad x=433; \quad \text{либо} \begin{cases} 514-x=625 \\ 192+x=81 \end{cases}, \quad x=-111.$$

Ответ: -111; 433.

Задача 4. (15 баллов) По кругу, на котором расположены точки с номерами от 1 до 2018, начиная с первой точки, движется аппарат и стирает каждую вторую точку по ходу пока не останется одна. Какой на ней будет номер? (Сначала стирается точка с номером 2, затем с номером 4 и т.д.).

4. Решение: Если бы точек было 2^{11} = 2048, то осталась бы точка с номером 1, т.к. после очередного круга, количество точек уменьшается в два раза.

Добавим к 2018 еще 30 точек и начнем движение аппарата от точки с номером 1989, тогда через 30 ходов аппарат начнет свое движение от точки с номером 1989+60-2048=1, а на круге останется ровно 2018 точек.

Ответ: 1989.

Задача 5. (15 баллов) Из пункта А в пункт В в 9-00 утра выезжает автобус. В этот же момент из В в А выезжают грузовик и трактор, причём скорость грузовика в два раза больше скорости трактора. Автобус прибывает в В тот же день в 14 часов 50 минут, при этом он встречает грузовик не ранее 11 часов 30 минут утра. Определите время прибытия трактора в пункт А, если между моментами встреч автобуса с грузовиком и автобуса с трактором проходит не менее одного часа.

5. Решение:

Пусть x единиц пути/час – скорость автобуса, y единиц пути/час - скорость трактора, S - длина пути АВ. Тогда скорость грузовика - $2y$ единиц пути/час. Составим систему уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{x} = 5\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{S}{x+2y} \ge 2,5 \\ \dfrac{S}{x+y} - \dfrac{S}{x+2y} \ge 1 \end{cases}$$

Из первого уравнения $S = 5\frac{5}{6} \cdot x = \frac{35}{6} \cdot x$. Подставим результат во второе неравенство, получим: $\frac{35}{6} \cdot x \ge 2,5 \cdot x + 5 \cdot y$, откуда $20x \ge 30y$ и $y \le \frac{2}{3}x$.

Подставим S во второе неравенство, предварительно его преобразовав: $S \cdot \frac{x+2y-x-y}{(x+y)\cdot(x+2y)} \ge 1$; $\frac{35}{6}xy \ge x^2 + 3xy + 2y^2$; $6x^2 - 17xy + 12y^2 \le 0$; $\frac{2}{3} \le \frac{y}{x} \le \frac{3}{4}$; т.е. $y \ge \frac{2}{3}x$. Из полученных двух оценок следует, что $y \ge \frac{2}{3}x$. Найдём время трактора в пути: $t = \frac{S}{y} = \frac{\frac{35}{6}x}{\frac{2}{3}x} = \frac{35}{4} = 8$ часов 45 минут. Искомое время равно 9+(8 часов 45 минут)=17 часов 45 минут.

Ответ: 17 часов 45 минут.

Задача 6. (15 баллов) Можно ли разбить числа 1, 2, 3,…,99, 100 на три группы так, чтобы сумма чисел в одной группе делилась на 102, сумма чисел в другой группе делилась на 203, а сумма чисел в третьей группе делилась на 304?

6. Решение:

Сумма всех чисел от 1 до 100 равна $101 \cdot 50$. Допустим, что нам удалось разбить числа от 1 до 100 на три группы, сумма чисел в которых равны A, B и C соответственно. Тогда $A = 102x, B = 203y, C = 304z,$ где x, y и z - целые неотрицательные числа. Получим, что $101 \cdot 50 = A + B + C = 102x + 203y + 304z = 101(x + 2y + 3z) + (x + y + z).$

Следовательно, число $(x + y + z)$ кратно 101, а так как эта сумма не равна нулю, то $(x + y + z) \ge 101.$ Тогда, $x + 2y + 3z \ge x + y + z \ge 101,$ то есть, $101(x + 2y + 3z) > 101 \cdot 50$.

Полученное противоречие показывает, что разбить числа от 1 до 100 на указанные группы невозможно.

Ответ: нет.

Задача 7. (15 баллов) Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a+2)x^2+(|a+3|-|a+11|)x+a=4$ имеет два различных положительных корня.

Решение: $(a+2)x^2+(|a+3|-|a+11|)x+a-4=0$.

При $a=-2$ уравнение линейное и принимает вид: $-8x-6=0$, что не удовлетворяет условию задачи.

При $a\neq-2$ для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система:

$$\begin{cases} D>0 \\ -\dfrac{b}{a}>0 \\ \dfrac{c}{a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (|a+3|-|a+11|)^2-4(a+2)(a-4)>0 \\ -\dfrac{(|a+3|-|a+11|)}{a+2}>0 \\ \dfrac{a-4}{a+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

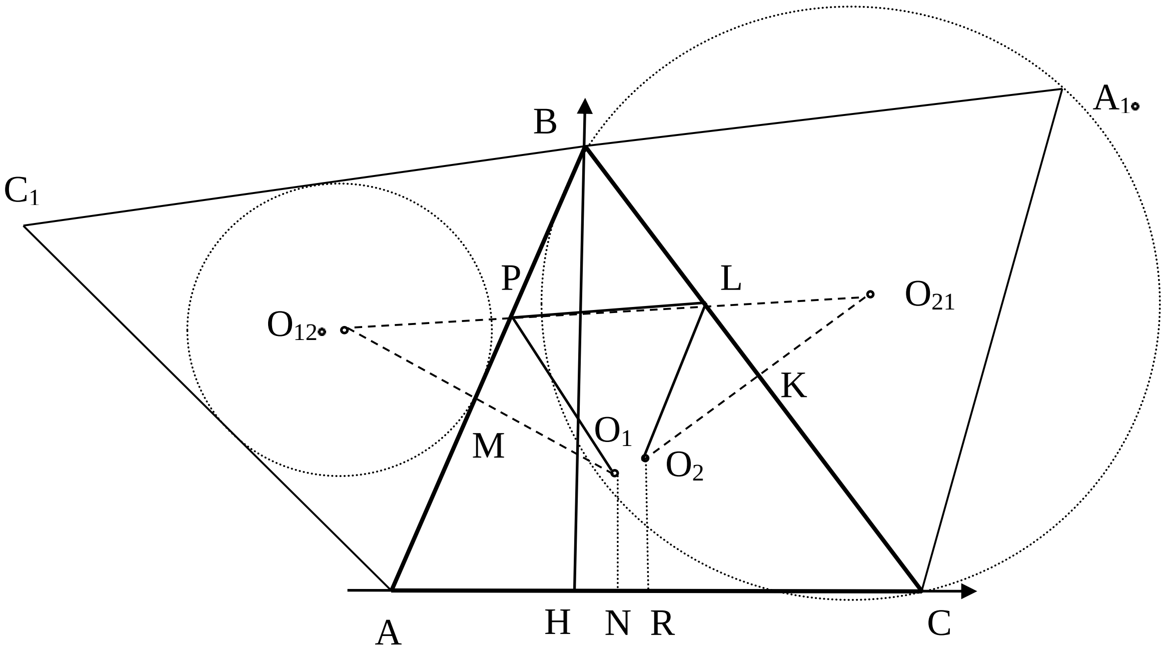
$$\begin{cases} |a+3||a+11|<-a^2+18a+81 \\ \dfrac{|a+3|-|a+11|}{a+2}<0 \\ \dfrac{a-4}{a+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+14a+33<-a^2+18a+81 \\ a^2+14a+33>a^2-18a-81 \\ \dfrac{(a+3)^2-(a+11)^2}{a+2}<0 \\ \dfrac{a-4}{a+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2-2a-24<0 \\ 16a>-57 \\ \dfrac{2a+14}{a+2}>0 \\ \dfrac{a-4}{a+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in(4;6)$$

Ответ: $a\in(4;6)$

Задача 8. (15 баллов) В треугольнике ABC с основанием AC=14 и боковыми сторонами AB=13 и BC=15 из центра вписанной окружности строится ломаная линия из трех звеньев так, что конечная ее точка – центр описанной около ABC окружности, а еще две точки M и K лежат на боковых сторонах треугольника ABC. Найдите площадь треугольника MBK, если длина этой ломаной линии наименьшая.

8. Решение:



Отразим треугольник ABC относительно боковых сторон AB и BC. Получим еще два треугольника ABC_1 и A_1BC. При этом центры вписанной и описанной окружностей O_1 и O_2 отразятся в центры вписанной и описанной окружностей O_{12} и O_{21} треугольников ABC_1 и A_1BC, соответственно.

Отрезок, соединяющий O_{12} и O_{21}, пересекает боковые стороны AB и BC в точках P и L, соответственно. Очевидно, что ломаная линия O_1PLO_2 – искомая, т.к. для любых других точек на боковых сторонах треугольника ABC, путь из O_{12} в O_{21} будет отклоняться от прямой $O_{12}O_{21}$, т.е. окажется длиннее.

Площадь треугольника PBL найдем по формуле: $S_{PBL} = \frac{BP \cdot BL}{BA \cdot BC} \cdot S_{ABC}$.

Пусть BH – высота треугольника ABC. Тогда из условия:

$$BH^2 = 169 - AH^2 = 225 - (14 - AH)^2 \Rightarrow AH = 5, BH = 12.$$

Введем прямоугольную систему координат с осями, направленными вдоль линий основания и высоты треугольника ABC. Тогда координаты точек: A(-5;0), C(9;0), B(0;12). N – точка касания вписанной окружности треугольника ABC с его основанием. Следовательно, AN = p – BC, где p – полупериметр треугольника ABC, т.е. AN = 21 – 15 = 6 и N(1;0). O_2R – серединный перпендикуляр к AC, поэтому R(2;0).

Найдем площадь треугольника ABC по формуле Герона: $S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6} = 84$. Тогда радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно равны 4 и 8,125, т.е. O_1(1;4) и O_2(2;4,125). M – точка касания вписанной окружности треугольника ABC с его стороной AB. Следовательно AM = AN (по свойству касательных), поэтому AM:MB=6:7, следовательно

$M\left(-\frac{35}{13};\frac{72}{13}\right)$, а $O_{12}\left(-\frac{83}{13};\frac{92}{13}\right)$. O_2O_{21} – серединный перпендикуляр к BC, следовательно BK=KC и K(4,5;6), а $O_{21}(7;7{,}875)$.

Уравнения прямых AB и AC: $y=\frac{12}{5}x+12$ и $y=-\frac{4}{3}x+12$. Составим уравнение прямой $O_{12}O_{21}$: $y=\frac{83}{1392}x+\frac{134953}{187746}$, обозначим ее как $y=kx+b$.

Найдем абсциссы точек P и L: $P_x=\frac{5(12-b)}{5k-12}$, $L_x=\frac{3(12-b)}{3k+4}$.

$S_{PBL}=\frac{BP\cdot BL}{BA\cdot BC}\cdot S_{ABC}=\frac{-P_x\cdot L_x\cdot 84}{45}=\frac{28(12-b)^2}{(12-5k)(3k+4)}$.

Ответ: $S_{PBL}=\frac{28(12-b)^2}{(12-5k)(3k+4)}$, где $k=\frac{83}{1392}$, $b=\frac{134953}{187746}$.