Второй (заключительный) этап олимпиады школьников

«Шаг в будущее» для 8-10 классов по общеобразовательному предмету

«Математика», 10 класс, весна 2018 г.

Вариант №1

Задача 1. (10 баллов) Сравните числа: $99!$ и 50^{99} (напомним: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$).

Задача 2. (10 баллов) Можно ли из 37 ниток сплести сетку так, чтобы каждая нитка была связана ровно с пятью другими?

Задача 3. (10 баллов) Решить неравенство:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{3-x}\right)^2\left(x^2-4\sqrt{x^2-6x+9}\right)}{x^2+2\sqrt{x^2-8x+16}}\geq 0$$

Задача 4. (10 баллов) Решить уравнение:

$$\sqrt{x-15}+\sqrt{x+80}+2\sqrt{x-15}\sqrt{x+80}=315-2x.$$

Задача 5. (15 баллов) Назовем число «Новогодним», если в нем все цифры различные, оно не начинается с цифры 2 и при вычеркивании некоторого числа его цифр можно получить 2018. Сколько существует различных семизначных «Новогодних» чисел?

Задача 6. (15 баллов) Спортсмены студенческой команды должны были выйти на спортивный праздник прямоугольным строем по 45 человек в ряд. По прибытии выяснилось, что не все спортсмены взяли с собой нужную спортивную форму и, следовательно, они не смогут принять участие в празднике. Оставшихся спортсменов перестроили так, что число рядов стало на два меньше, а число спортсменов в каждом ряду стало на 48 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все спортсмены приняли бы участие в празднике, то их можно было бы выстроить прямоугольным строем так, что число спортсменов в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько спортсменов планировали принять участие в спортивном празднике?

Задача 7. (15 баллов) Найти все значения параметра b, при которых неравенство $2b+b^2-2b\sin x>\cos^2 x+2$ выполняется при любом значении x.

Задача 8. (15 баллов) Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная AC, которая пересекает его боковые стороны AB и BC в точках M и K соответственно. Вторая окружность вписана в треугольник MBK и касается его боковой стороны MK в точке E, а первая окружность касается стороны AB в точке F. Найдите длину отрезка EF, если периметр треугольника MBK равен 6, а AC=3.

Решение варианта №1, 10 класс

Задача 1. (10 баллов) Сравните числа: $99!$ и 50^{99} (напомним: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$).

1. Решение:

$$99! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 50\cdot \ldots \cdot 98\cdot 99 = (50-49)(50-48)\cdot \ldots \cdot (50-1)\cdot 50\cdot (50+1)\cdot \ldots \cdot (50+49) =$$

$= 50\cdot \left(50^2-1^2\right)\left(50^2-2^2\right)\cdot \ldots \left(50^2-49^2\right) < 50\cdot \left(50^2\right)^{49} = 50^{99}$. Следовательно: $99! < 50^{99}$.

Ответ: $99! < 50^{99}$.

Задача 2. (10 баллов) Можно ли из 37 ниток сплести сетку так, чтобы каждая нитка была связана ровно с пятью другими?

2. Решение: Предположим, что такую сетку сплести можно, тогда количество узлов (пересечений двух ниток) равно $\frac{37\cdot 5}{2}$, а это число не является целым.

Ответ: нет, нельзя.

Задача 3. (10 баллов) Решить неравенство:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{3-x}\right)^2\left(x^2-4\sqrt{x^2-6x+9}\right)}{x^2+2\sqrt{x^2-8x+16}} \geq 0$$

3. Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-4x+3\geq 0 \\ 3-x\geq 0 \\ x^2-6x+9\geq 0 \\ x^2-8x+16\geq 0 \\ x^2+2\cdot\sqrt{x^2-8x+16}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\cdot(x-3)\geq 0 \\ x\leq 3 \\ (x-3)^2\geq 0 \\ (x-4)^2\geq 0 \\ x^2+2\cdot\sqrt{(x-4)^2}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$x \in (-\infty; 1] \cup \{3\}$.

На ОДЗ $\sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = 3-x$;

$\sqrt{x^2-8x+16} = \sqrt{(x-4)^2} = |x-4| = 4-x$. Получили:

$\frac{(\sqrt{(x-1)\cdot(x-3)}+\sqrt{3-x})^2\cdot(x^2-4(3-x))}{x^2+2(4-x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{(x-1)\cdot(x-3)}+\sqrt{3-x})^2\cdot(x+6)\cdot(x-2)}{x^2-2x+8} \geq 0 \Leftrightarrow x \in$ $(-\infty;\ -6] \cup \{3\}$.

Ответ: $(-\infty;\ -6] \cup \{3\}$.

Задача 4. (10 баллов) Решить уравнение:

$$\sqrt{x-15}+\sqrt{x+80}+2\sqrt{x-15}\sqrt{x+80} = 315-2x.$$

4. Решение: Сделаем замену $t=\sqrt{x-15}+\sqrt{x+80}$, тогда

$t^2=2x+65+2\sqrt{x-15}\sqrt{x+80}$ и уравнение примет вид: $t^2+t-380=0$. Корни $t_1=19$ и $t_2=-20$, учтём, что $t\geq 0$, тогда получим: $\sqrt{x-15}+\sqrt{x+80}=19$. Слева две монотонно возрастающие функции, следовательно, уравнение имеет не более одного корня, подбором находим, что $x=64$.

Ответ: 64.

Задача 5. (15 баллов) Назовем число «Новогодним», если в нем все цифры различные, оно не начинается с цифры 2 и при вычеркивании некоторого числа его цифр можно получить 2018. Сколько существует различных семизначных «Новогодних» чисел?

5. Решение: Для правильного счета вариантов, необходимо соблюдать правило: перед цифрой 2 должна быть одна из шести цифр – 3, 4, 5, 6, 7 или 9.

Пусть для определенности – это 3, тогда еще две различные цифры из оставшихся пяти (5·4=20 вариантов) могут находиться в местах, отмеченных точками: . . 32 . . 0 . . 1 . . 8 . . , т.е. на двух из десяти позиций: таких вариантов C_6^2=15. Поэтому всего различных вариантов равно 20·15=300.

Аналогично вычисляются варианты для пар 42, 52, 62, 72 и 92, т.е. окончательно получаем: 6·300 = 1800 вариантов.

Ответ: 1800.

Задача 6. (15 баллов) Спортсмены студенческой команды должны были выйти на спортивный праздник прямоугольным строем по 45 человек в ряд. По прибытии выяснилось, что не все спортсмены взяли с собой нужную спортивную форму и, следовательно, они не смогут принять участие в празднике. Оставшихся спортсменов перестроили так, что число рядов стало на два меньше, а число спортсменов в каждом ряду стало на 48 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все спортсмены приняли бы участие в празднике, то их можно было бы выстроить прямоугольным строем так, что число спортсменов в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько спортсменов планировали принять участие в спортивном празднике?

6. Решение: Пусть первоначально должно было быть n рядов. Тогда спортсменов было 45n. Стало рядов $n-2$, число спортсменов в каждом ряду будет $n-2+48=n+46$. При этом спортсменов стало меньше. Поэтому получаем неравенство: $(n-2)\cdot(n+46)<45n$. Отсюда получаем $n^2-2n+46n-92-45n<0; n^2-n-92<0$.

$\frac{1-3\sqrt{41}}{2} < n < \frac{1+3\sqrt{41}}{2}$. По смыслу задачи $n \geq 3$, поэтому $3 \leq n \leq \frac{1+3\sqrt{41}}{2}$. Оценим число справа: $6 < \sqrt{41} < 7$; $18 < 3\sqrt{41} < 21$; $9{,}5 < \frac{1+3\sqrt{41}}{2} < 11$. Следовательно, $3 \leq n \leq 11$. Но по условию задачи, первоначальное число спортсменов можно было бы выстроить «квадратом», т.е. существует натуральное число k, такое, что $45 \cdot n = k^2$. Далее есть два варианта решения: либо полный перебор:

$45 \cdot 3 = 135$; $45 \cdot 4 = 180$; $45 \cdot 5 = 225$ - подходит; $45 \cdot 6 = 270$; $45 \cdot 7 = 315$; $45 \cdot 8 = 360$; $45 \cdot 9 = 405$; $45 \cdot 10 = 450$; $45 \cdot 11 = 495$.

Как видим, подходит только n=5 с ответом 225.

Более короткий путь – из равенства $45 \cdot n = k^2$ сделать вывод, что k^2 делится нацело на 9, а значит k – делится нацело на 3, т.е. k=3p. Тогда $9 \cdot 5 \cdot n = 9 \cdot p^2$ и $p^2 = 5 \cdot n$, откуда получаем, что n кратно 5, а значит n=5 (подходит) или n=10 (не подходит).

Ответ: 225.

Задача 7. (15 баллов) Найти все значения параметра b, при которых неравенство $2b + b^2 - 2b\sin x > \cos^2 x + 2$ выполняется при любом значении x.

7. Решение: Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и получим: $\sin^2 x - 2b\sin x + b^2 + 2b - 3 > 0$, сделаем замену $t = \sin x$, тогда неравенство $t^2 - 2bt + b^2 + 2b - 3 > 0$ должно выполняться при всех значениях $-1 \leq t \leq 1$.

$$D = 12 - 8b,\ x_в = b,\ f(1) = b^2 - 2,\ f(-1) = b^2 + 4b - 2$$

Неравенство верно, если:

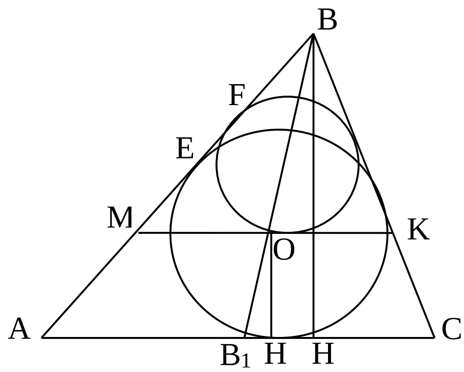
$$\left[\begin{array}{l} D < 0 \\ \begin{cases} D = 0 \\ x_в \notin [-1;1] \end{cases} \\ \begin{cases} D > 0 \\ f(-1) > 0 \\ x_в < -1 \end{cases} \\ \begin{cases} D > 0 \\ f(1) > 0 \\ x_в > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12 - 8b < 0 \\ \begin{cases} 12 - 8b = 0 \\ b \notin [-1;1] \end{cases} \\ \begin{cases} 12 - 8b > 0 \\ b^2 + 4b - 2 > 0 \\ b < -1 \end{cases} \\ \begin{cases} 12 - 8b > 0 \\ b^2 - 2 > 0 \\ b > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b > 1{,}5 \\ \begin{cases} b = 1{,}5 \\ b \notin [-1;1] \end{cases} \\ \begin{cases} b < 1{,}5 \\ (b + 2 + \sqrt{6})(b + 2 - \sqrt{6}) > 0 \\ b < -1 \end{cases} \\ \begin{cases} b < 1{,}5 \\ (b - \sqrt{2})(b + \sqrt{2}) > 0 \\ b > 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b>1,5 \\ b=1,5 \\ b<-2-\sqrt{6} \\ \sqrt{2}<b<1,5 \end{array}\right.$$

Ответ: $b \in (-\infty;-2-\sqrt{6}) \cup (\sqrt{2};+\infty)$.

Задача 8. (15 баллов) Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная AC, которая пересекает его боковые стороны AB и BC в точках M и K соответственно. Вторая окружность вписана в треугольник MBK и касается его боковой стороны MK в точке E, а первая окружность касается стороны AB в точке F. Найдите длину отрезка EF, если периметр треугольника MBK равен 6, а AC=3.

8. Решение:



Так как $\mathrm{O} \in \mathrm{BB}_1$, то BB_1- биссектриса ABC => OH_1- радиус вписанной окружности. BH – высота треугольника ABC, поэтому $\Delta\mathrm{BHB}_1 \sim \Delta\mathrm{OH}_1\mathrm{B}_1$

(по двум углам $\angle\mathrm{B}_1$- общий, $\angle\mathrm{H}=\angle\mathrm{H}_1=90^0$). Запишем соотношение подобия $k=\frac{BH-OH_1}{BH}=\frac{AC\cdot BH\cdot P-AC\cdot OH_1\cdot P}{AC\cdot BH\cdot P}=\frac{2S\cdot P-2S\cdot AC}{2S\cdot P}=\frac{P-AC}{P}$, где S и P – площадь и периметр треугольника ABC соответственно. И еще: $k=\frac{\mathrm{P}_1}{P}=\frac{P-AC}{P}$ => $\mathrm{P}_1=\mathrm{P}-\mathrm{AC}$, где P_1 – периметр треугольника MBK.

По свойству касательной: BE= $P/_2$ – AC, BF= $P_1/_2$ – MK = $P_1/_2$ – k·AC. То есть EF=BE–BF. Итак,

$$EF = {(P_1+AC)}/_2 - AC - {P_1}/_2 + \mathrm{k}\cdot AC = \mathrm{AC}\left(\mathrm{k}-{1}/_2\right) = 3\cdot\left({6}/_{(6+3)} - {1}/_2\right) = {1}/_2.$$

Ответ: 0,5.