Первый (заочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2017 г.

9 КЛАСС

1) *(5 баллов)* Решить уравнение

$$(x^2 - x + 1) \cdot (3x^2 - 10x + 3) = 20x^2$$

2) *(5 баллов)* Компания из 10 друзей усаживается за круглый стол произвольным образом. Среди них есть один Ваня и один Дима. Какова вероятность того, что они окажутся рядом?

3) *(10 баллов)* Определить знак выражения

$$\sqrt{25\sqrt{7} - 27\sqrt{6}} - \sqrt{17\sqrt{5} - 38}$$

4) *(10 баллов)* Решить уравнение

$$\sqrt{7 - x^2 + 6x} + \sqrt{6x - x^2} = 7 + \sqrt{x(3 - x)}$$

5) *(10 баллов)* Найти все значения параметров k и n, при которых система уравнений имеет бесконечно много решений.

$$\begin{cases} ky + x + n = 0 \\ |y - 2| + |y + 1| + |1 - y| + |y + 2| + x = 0 \end{cases}$$

6) *(15 баллов)* Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два корня, разность которых не меньше натурального числа $n \geq 2$. Докажите, что квадратный трехчлен $f(x) + {}$ $+f(x+1) + \cdots + f(x+n)$ имеет два корня.

7) *(20 баллов)* Даны m натуральных чисел, не превосходящих n, расположенные в порядке неубывания: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m$. Аналогично n натуральных чисел, не превосходящих m, расположены в порядке неубывания: $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Верно ли, что всегда найдутся два номера i и j такие, что $a_i + i = b_j + j$.

8) *(25 баллов)* Пусть h и l – высота и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, r и R – радиусы его вписанной и описанной окружностей. Докажите, что $\frac{h}{l} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$.

Решение задач заочного тура, 9 класс

1. Решить уравнение

$$(x^2 - x + 1)\cdot(3x^2 - 10x + 3) = 20x^2$$

Решение:

$$(x^2 - x + 1)\cdot(3x^2 - 10x + 3) = 20x^2 \Leftrightarrow \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)\cdot\left(3x - 10 + 3\frac{1}{x}\right) = 20$$

Подстановка $x + \frac{1}{x} = t$

$$(t-1)\cdot(3t-10) = 20 \Leftrightarrow 3t^2 - 13t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = -\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

$\left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = 5 \\ x + \frac{1}{x} = -\frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 1 = 0 \\ 3x^2 + 2x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. Второе уравнение системы не имеет решений.

Ответ: $x = \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

2. *(5 баллов)* Компания из 10 друзей усаживается за круглый стол произвольным образом. Среди них есть один Ваня и один Дима. Какова вероятность того, что они окажутся рядом?

Решение:

Подсчитаем число рассадок, когда Ваня и Дима сидят рядом. Если Ваня выбрал место, то Дима может выбрать одно из двух мест. После их выбора останется еще 8 мест, которые могут занять 8 человек 8! способами. Ваня может выбрать 10 мест, после чего Дима выбирает одно из 2 мест. Всего получается «благоприятных» рассадок $10\cdot 2\cdot 8!$. Всех возможных способов рассадки 10!. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{10\cdot 2\cdot 8!}{10!} = \frac{2}{9}$

Ответ: $\frac{2}{9}$

3. *(10 баллов)* Определить знак выражения

$$\sqrt{25\sqrt{7} - 27\sqrt{6}} - \sqrt{17\sqrt{5} - 38} \quad \textbf{или} \quad (\sqrt{25\sqrt{7} - 28\sqrt{6}} - \sqrt{17\sqrt{5} - 38})^{***}$$

Решение:

1 способ: Каждое подкоренное выражение – есть куб разности двух чисел:

$$25\sqrt{7} - 27\sqrt{6} = \left(\sqrt{7} - \sqrt{6}\right)^3$$

$$17\sqrt{5} - 38 = \left(\sqrt{5} - 2\right)^3$$

Тогда $\sqrt{25\sqrt{7}-27\sqrt{6}}-\sqrt{17\sqrt{5}-38}=\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)^{3/2}-\left(\sqrt{5}-2\right)^{3/2}$

Знак выражения определяется знаком разности чисел

$\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)-\left(\sqrt{5}-2\right)=\left(\sqrt{7}+2\right)-\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)$

Сравним числа

$\sqrt{7}+2 \vee \sqrt{6}+\sqrt{5} \Leftrightarrow 7+4\sqrt{7}+4 \ \vee 6+2\sqrt{30}+5 \ \ \Leftrightarrow$

$$4\sqrt{7} \ \vee 2\sqrt{30} \Leftrightarrow 112 \ \vee 120$$

$112 \ < 120 \ \Rightarrow \ \left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)<\left(\sqrt{5}-2\right) \Rightarrow \sqrt{25\sqrt{7}-27\sqrt{6}}-\sqrt{17\sqrt{5}-38}<0$

Ответ: $\sqrt{25\sqrt{7}-27\sqrt{6}}-\sqrt{17\sqrt{5}-38}<0$

2 способ: Сравним подкоренные выражения $25\sqrt{7}-27\sqrt{6} \vee 17\sqrt{5}-38$

Так как оба числа положительные, то возводим их квадрат и постепенно избавляемся от корней. В результате получаем, что уменьшаемое больше вычитаемого. Таким образом знак разности отрицательный.

4. *(10 баллов)* Решить уравнение

$$\sqrt{7-x^2+6x}+\sqrt{6x-x^2}=7+\sqrt{x(3-x)}$$

Решение:

ОДЗ переменной x в нашей задаче-отрезок [0;3]. Выделяя полные квадраты в подкоренных выражениях левой части уравнения или строя графики, замечаем, что значения первого корня не превышают 4, второго 3 и наименьшие значения достигаются при x=3. Значение левой части уравнения не превышает 7, а правая часть не меньше 7. Значит, равенство возможно, лишь когда обе части уравнения одновременно равны 7, что достигается при x=3.

Ответ: 3

5. *(10 баллов)* Найти все значения параметров k и n, при которых система уравнений имеет бесконечно много решений.

$$\begin{cases} ky+x+n=0 \\ |y-2|+|y+1|+|1-y|+|y+2|+x=0 \end{cases}$$

Решение:

Удобно ввести систему координат, направив ось Ох вверх, вправо ось Оу. Разобьем ось Оу точками -2,-1,1.2 на интервалы. На каждом интервале получаем свою систему и находим значения параметров, при которых прямые имеют бесконечное количество точек пересечения.

1) $\begin{cases} y \le -2 \\ x = 4y \\ ky + x + n = 0 \end{cases} \Rightarrow n = 0, k = -4$ 2) $\begin{cases} -2 < y < -1 \\ x = 2y - 4 \\ x = -ky - n \end{cases} \Rightarrow$ k=-2, n=4

3) $\begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ x = -6 \\ x = -ky - n \end{cases} \Rightarrow$n=6, k=0 4) $\begin{cases} 1 < y < 2 \\ x = -4 - 2y \\ x = -ky - n \end{cases} \Rightarrow$ k=2, n=4

5) $\begin{cases} y \ge 2 \\ x = -4y \\ x = -ky - n \end{cases} \Rightarrow$ k=4, n=0

Ответ: *(k;n)=(4;0);(-4;0);(2;4);(-2;4);(0;6)*

6. *(15 баллов)* Квадратный трехчлен $\boldsymbol{f(x)}$ имеет два корня, разность которых не меньше натурального числа $\boldsymbol{n \ge 2}$. Докажите, что квадратный трехчлен $\boldsymbol{f(x) +}$ $\boldsymbol{+f(x+1) + \cdots + f(x+n)}$ имеет два корня.

Решение:

Пусть квадратный трехчлен $f(x)$ имеет действительные корни x_1 и $x_2=x_1+n+a$, где $a \ge 0$. Для определенности будем считать, что коэффициент при x^2 положителен. Положим $x_0=x_1+a/2$. Тогда $x_0 \ge x_1$ и $x_0 + n \le x_2$.

Поэтому $f(x_0) + f(x_0+1)+ \ldots + f(x_0+n) < 0$. В то же время у квадратного трехчлена $\boldsymbol{f(x) + +f(x+1) + \cdots + f(x+n)}$ коэффициент при x^2 положителен, поэтому при достаточно больших по модулю x он принимает положительные значения. А это означает, что данный квадратный трехчлен имеет два корня.

7. *(20 баллов)* Даны $\boldsymbol{m}$ натуральных чисел, не превосходящих $\boldsymbol{n}$, расположенные в порядке неубывания: $\boldsymbol{a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_m}$. Аналогично $\boldsymbol{n}$ натуральных чисел, не превосходящих $\boldsymbol{m}$, расположены в порядке неубывания: $\boldsymbol{b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n}$. Верно ли, что всегда найдутся два номера $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ такие, что $\boldsymbol{a_i + i = b_j + j}$.

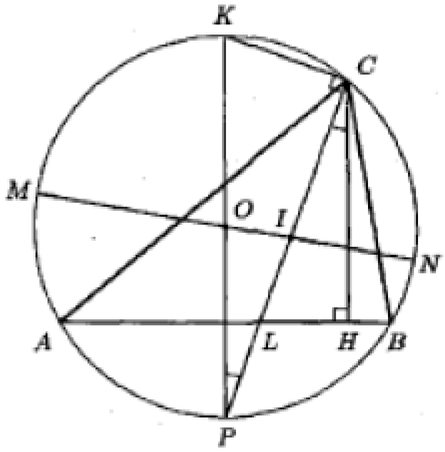
Решение:

Так как $\boldsymbol{1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_m \le n}$, то $2 \le a_1 + 1 < a_2 + 2 < \cdots < a_m + m \le n + m$. Аналогично $2 \le b_1 + 1 < b_2 + 2 < \cdots < b_n + n \le m + n$. Таким образом получается, что в пределах от 2 до $m + n$ находится $m + n$ натуральных чисел $a_i + i$ $(i = 1, \dots, m)$ и $b_j + j$ $(j = 1, \dots, n)$. Значит, какие-то два из них непременно совпадают. Но числа $a_i + i$ все различны – среди них нет совпадений, аналогично нет совпадений среди чисел $b_j + j$. Поэтому совпадают какие-то два числа $a_i + i$ и $b_j + j$.

Ответ: Да, верно.

8. *(25 баллов)* Пусть h и l – высота и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, r и R – радиусы его вписанной и описанной окружностей. Докажите, что $\frac{h}{l} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$.

Решение:



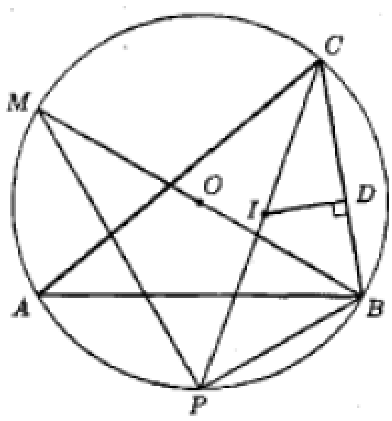
Пусть CL – биссектриса ∠ACB, P – точка пересечения биссектрисы с описанной окружностью, I – центр вписанной окружности, O – центр описанной окружности.

1) Угловая величина дуги PB равна углу ACB, угловая величина дуги BC равна 2 · ∠CAB. Тогда $\angle PKC = \frac{1}{2}(\angle ACB + 2 \cdot \angle CAB) = \frac{1}{2} \cdot \angle ACB + \angle CAB = \angle CLH$ (как внешний угол для треугольника ALC. Но тогда ∠KPC = ∠LCH

2) Обозначим угол LCH за α. Тогда $\cos\alpha = \frac{h}{l}$. С другой стороны, из треугольника PKC находим

$$\cos\alpha = \frac{PC}{KP} = \frac{CI+IP}{2R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{CI+IP}{2} \geq \frac{1}{R}\sqrt{CI \cdot IP}$$ (по неравенству Коши для среднего арифметического и среднего геометрического)

3) Рассмотрим отдельно произведение $CI \cdot IP$:



D – основание перпендикуляра, опущенного из точки I на сторону BC. Проведем диаметр BM, тогда треугольники CDI и BPM подобны. Поэтому $\frac{CI}{2R} = \frac{r}{PB}$. Откуда **CI · PB = 2Rr**.

4) В треугольнике BPI $\angle P\mathrm{BI} = \angle PC\mathrm{A} + \angle \mathrm{ABI}$. А $\angle PIB$ является внешним для треугольника IBC, поэтому он равен $\angle P\mathrm{IB} = \angle ICB + \angle \mathrm{IBC} = \angle PC\mathrm{A} + \angle \mathrm{ABI}$. Таким образом, получается, что треугольник BPI равнобедренный, а значит, что PB = PI.

Но тогда **CI · PI = 2Rr**.

5) Возвращаясь к пункту 2, имеем:

$$\frac{h}{l} = \cos\alpha \geq \frac{1}{R}\sqrt{CI \cdot IP} = \frac{1}{R}\sqrt{2Rr} = \sqrt{\frac{2r}{R}}.$$

Что и требовалось доказать

Критерии проверки заданий 9-го класса

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Итого
Баллы	5	5	10	10	10	15	20	25	100

Задача 1

Баллы	
5	Обоснованно получен правильный ответ
2	Ход решения правильный, но ответ получен неверный из-за одной арифметической ошибки
0	Решение не соответствует ни одному из критериев

Задача 2

Баллы	
5	Обоснованно получен правильный ответ
3	В решении (в любой вероятностной модели) верно найдено число всех возможных исходов или число благоприятных исходов. В решении сделана арифметическая ошибка при правильном указании числа всех благоприятных исходов
0	Решение не соответствует ни одному из критериев

Задача 3

Баллы	
10	Обоснованно получен правильный ответ любым способом, кроме непосредственного вычисления с помощью калькулятора
0	Решение не соответствует ни одному из критериев

Задача 4

Баллы	
10	Полное обоснованное решение
5	Решение недостаточно обосновано
2	Угадано решение x=3 без дальнейших объяснений
0	Решение не соответствует ни одному из критериев

Задача 5.

Баллы	
10	Полное обоснованное решение
8	Полное решение, содержащее арифметическую ошибку
5	Модули раскрыты без условий или рассмотрены не все случаи
0	Решение не соответствует ни одному из критериев

Задача 6.

Баллы	
15	Приведено обоснованное доказательство, возможно, отличающееся от записанного выше
10	Верно определен знак выражения $f(x_0) + f(x_0+1) + \ldots + f(x_0+n)$
5	Введены точки $x_0= x_1+a/2$; $x_0\geq x_1$ и $x_0+n\leq x_2$. Сделана попытка рассмотрения знаков квадратного трехчлена в этих точках
0	Решение не соответствует ни одному из критериев

Задача 7

Баллы	
20	Обоснованно получен правильный ответ
15	В целом решение правильное, но имеются недостатки в обосновании
10	В решении указаны общие границы для чисел $a_i + i$ (i =1, …, m) и $b_j + j$ (j =1, …, n), но не получен обоснованный ответ (например, нигде не указано, что числа $a_i + i$ все различны, как и числа $b_j + j$).
5	Построены цепочки чисел
0	Решение не соответствует ни одному из критериев

Задача 8

Баллы	
25	Обоснованно пройдена вся цепочка доказательств
по 5	За каждый из выполненных пунктов
0	Решение не соответствует ни одному из критериев