

**Первый (заочный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», осень 2017 г.**

10 КЛАСС

1. (10 баллов) Вычислить: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 2017^2$.

2. (10 баллов) Решить уравнение: $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) - 3x^2 = 0$.

3. (10 баллов) Решить неравенство:
$$\frac{1 + \frac{1+x}{1-3x}}{1 - 3 \cdot \frac{1+x}{1-3x}} < \frac{1 + \frac{1+x}{1-3x}}{1 - 3 \cdot \frac{1+x}{1-3x}}$$

4. (10 баллов) Поезд идет со скоростью 60 километров в час, делая остановки через каждые 48 километров. Продолжительность каждой остановки, кроме пятой – 10 минут, пятая остановка – полчаса. Какое расстояние прошел поезд, если он отправился в путь в полдень 29 сентября, а пришел в пункт назначения 1 октября в 22-00?

5. (15 баллов) Вычислить $f(2)$, если $25f\left(\frac{x}{1580}\right) + (3 - \sqrt{34})f\left(\frac{1580}{x}\right) = 2017x$.

Ответ округлить до целого числа.

6. (15 баллов) На плоскости дан отрезок длиной 1 см. С помощью циркуля и линейки постройте на этой плоскости отрезок длиной $\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}$ см.

7. (15 баллов) Папа на машине вез сына на занятие в математическом кружке. По дороге их обогнали 4 автомобиля. Сын признался отцу, что смог запомнить только номера двух наименьших из них – это 119 и 179, а в других точно была цифра 3. Папа же успел запомнить все, но сыну задал следующую задачу. Если номера разбить на пары и в каждой паре их перемножить, а затем сложить полученные два числа, то получится число 105080. Помогите сыну вспомнить два оставшихся номера. (Все автомобильные номера трехзначные числа).

8. (15 баллов) В треугольнике ABC со сторонами 13, 14 и 15 см. H, M и L – точки пересечения его высот, медиан и биссектрис, соответственно. Найдите площадь треугольника HML.

Решение задач заочного тура, 10 класс

1. Вычислить: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 2017^2$.

$$\begin{aligned} \text{Решение: } & 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 2017^2 = \\ & = (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \dots + (2015^2 - 2016^2) + 2017^2 = \\ & = (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \dots + (2015-2016)(2015+2016) + 2017^2 = \\ & = -(1+2) - (3+4) - \dots - (2015+2016) + 2017^2 = \\ & = -(1+2+3+4+\dots+2015+2016) + 2017^2 = \\ & = -\frac{1+2016}{2} \cdot 2016 + 2017^2 = -2017 \cdot 1008 + 2017^2 = 2017 \cdot (2017 - 1008) = \\ & = 2017 \cdot 1009 = 2035153 \end{aligned}$$

Ответ: 2035153.

2. Решить уравнение: $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) - 3x^2 = 0$

$$\text{Решение: } 4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) - 3x^2 = 0$$

$$4(x^2 + 17x + 60)(x^2 + 16x + 60) - 3x^2 = 0$$

Сделаем замену: $t = x^2 + 16x + 60$, тогда уравнение примет вид

$$4(t+x)t - 3x^2 = 0$$

$$4t^2 + 4tx - 3x^2 = 0$$

$$(2t-x)(2t+3x) = 0$$

$$\begin{cases} 2t-x=0 \\ 2t+3x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 31x + 120 = 0 \\ 2x^2 + 35x + 120 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = -7,5; \quad x_2 = 8; \quad x_{3,4} = \frac{-35 \pm \sqrt{265}}{4}$$

Ответ: $-7,5; 8; \frac{-35 \pm \sqrt{265}}{4}$.

3. Решить неравенство:
$$\frac{1 + \frac{1+x}{1-3x}}{1-3 \cdot \frac{1+x}{1-3x}} < \frac{1-3 \cdot \frac{1+x}{1-3x}}{1 + \frac{1+x}{1-3x}}$$

Решение: Сделаем замену: $t = \frac{1+x}{1-3x}$, тогда неравенство примет вид

$$\frac{1 + \frac{1+t}{1-3 \cdot t}}{1-3 \cdot \frac{1+t}{1-3 \cdot t}} < \frac{1-3 \cdot \frac{1+t}{1-3 \cdot t}}{1 + \frac{1+t}{1-3 \cdot t}}$$

$$\frac{\frac{2-2t}{1-3t}}{-2-6t} < \frac{-2-6t}{2-2t} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-2t}{-2-6t} < \frac{-2-6t}{2-2t} \\ t \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t-1}{3t+1} < \frac{3t+1}{t-1} \\ t \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\frac{1+x}{1-3x} - 1}{3 \cdot \frac{1+x}{1-3x} + 1} < \frac{3 \cdot \frac{1+x}{1-3x} + 1}{\frac{1+x}{1-3x} - 1} \\ \frac{1+x}{1-3x} \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\frac{4x}{1-3x}}{4} < \frac{4}{\frac{1-3x}{4x}} \\ \frac{1+x}{1-3x} \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x}{4} < \frac{4}{4x} \\ x \neq \frac{1}{3} \\ x \neq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{x} \\ x \neq \frac{1}{3} \\ x \neq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \\ x \neq \frac{1}{3} \\ x \neq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

4. Поезд идет со скоростью 60 километров в час, делая остановки через каждые 48 километров. Продолжительность каждой остановки, кроме пятой – 10 минут, пятая остановка – полчаса.

Какое расстояние прошел поезд, если он отправился в путь в полдень 29 сентября, а пришел в пункт назначения 1 октября в 22-00?

Решение: Поезд находился в пути 58 часов.

Участок пути длиной в 48 километров поезд преодолевает за $\frac{4}{5}$ часа.

Пусть поезд в пути сделает N остановок, тогда время его движения будет равно

$$\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{6}\right)(N-1) + \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right) + t = 58, \text{ где } t - \text{ время прохождения последнего участка пути,}$$

длина которого больше 0 км, но не более 48 км, следовательно, $t \in \left(0; \frac{4}{5}\right]$.

$$\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{6}\right)(N-1) + \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right) + t = 58$$

$$\frac{29}{30}N + \frac{1}{3} + t = 58$$

$$t = 57\frac{2}{3} - \frac{29}{30}N$$

$$0 < 57\frac{2}{3} - \frac{29}{30}N \leq \frac{4}{5}$$

$$56\frac{13}{15} \leq \frac{29}{30}N < 57\frac{2}{3}$$

$$58\frac{24}{29} \leq N < 59\frac{19}{29}$$

Получаем, что $N=59$, $t = 57\frac{2}{3} - \frac{29}{30} \cdot 59 = \frac{19}{30}$.

Расстояние, пройденное поездом, $N \cdot 48 + t \cdot 60 = 59 \cdot 48 + \frac{19}{30} \cdot 60 = 2870$.

Ответ: 2870 км.

5. Вычислить $f(2)$, если $25f\left(\frac{x}{1580}\right) + (3 - \sqrt{34})f\left(\frac{1580}{x}\right) = 2017x$. Ответ округлить до целого числа.

Решение: Сделаем замену: $t = \frac{x}{1580}$, тогда уравнение примет вид:

$$25f(t) + (3 - \sqrt{34})f\left(\frac{1}{t}\right) = 2017 \cdot 1580 \cdot t \quad (1),$$

вместо t подставим в уравнение $\frac{1}{t}$, получим

$$25f\left(\frac{1}{t}\right) + (3 - \sqrt{34})f(t) = 2017 \cdot 1580 \cdot \frac{1}{t} \quad (2).$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 25f(t) + (3 - \sqrt{34})f\left(\frac{1}{t}\right) = 2017 \cdot 1580 \cdot t \\ 25f\left(\frac{1}{t}\right) + (3 - \sqrt{34})f(t) = 2017 \cdot 1580 \cdot \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25^2 f(t) + 25(3 - \sqrt{34})f\left(\frac{1}{t}\right) = 25 \cdot 2017 \cdot 1580 \cdot t \\ (3 - \sqrt{34})^2 f(t) + 25(3 - \sqrt{34})f\left(\frac{1}{t}\right) = 2017 \cdot 1580 \cdot (3 - \sqrt{34}) \cdot \frac{1}{t} \end{cases}, \text{ тогда}$$

$$\left(25^2 - (3 - \sqrt{34})^2\right) f(t) = 25 \cdot 2017 \cdot 1580 \cdot t - 2017 \cdot 1580 \cdot (3 - \sqrt{34}) \cdot \frac{1}{t}$$

$$f(t) = \frac{2017 \cdot 1580 \left(25t - (3 - \sqrt{34}) \cdot \frac{1}{t}\right)}{\left(25^2 - (3 - \sqrt{34})^2\right)}, \text{ тогда}$$

$$f(2) = \frac{2017 \cdot 1580 \left(50 - (3 - \sqrt{34}) \cdot \frac{1}{2}\right)}{\left(25^2 - (3 - \sqrt{34})^2\right)} = \frac{2017 \cdot 1580 \cdot (97 + \sqrt{34})}{2 \cdot (582 + 6\sqrt{34})} = \frac{2017 \cdot 1580}{2 \cdot 6}$$

$$f(2) = \frac{2017 \cdot 395}{3} = 265571 \frac{2}{3} \approx 265572.$$

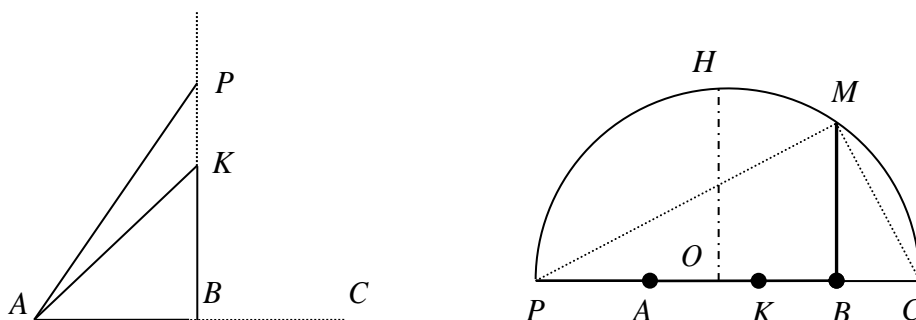
Ответ: 265572.

6. На плоскости дан отрезок длиной 1 см. С помощью циркуля и линейки постройте на этой плоскости отрезок длиной $\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}$ см.

Решение: Отложим на прямой AC единичные отрезки АВ и ВС. Построим с помощью циркуля и линейки серединный перпендикуляр РВ к отрезку АС. Отложим на нем единичный отрезок ВК и соединим точки А и К. Длина отрезка АК = $\sqrt{2}$. Отложим на прямой РК отрезок РК = АК и соединим точки А и Р. Длина отрезка РВ = $\sqrt{3}$.

На следующем рисунке показано построение отрезка $МВ = \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}$:

- Отложим последовательно на прямой отрезки РА, АК, КВ и ВС с длинами $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, 1 и 1, соответственно.
- Построим серединный перпендикуляр НО к отрезку РС.
- Проведем окружность с центром в точке О и радиусом ОР.
- Построим серединный перпендикуляр МВ к отрезку КС.
- По свойству прямоугольного треугольника РМС, $МВ = \sqrt{РВ \cdot ВС}$.



7. Папа на машине вез сына на занятие в математическом кружке. По дороге их обогнали 4 автомобиля. Сын признался отцу, что смог запомнить только номера двух наименьших из них – это 119 и 179, а в других точно была цифра 3. Папа же успел запомнить все, но сыну задал следующую задачу. Если номера разбить на пары и в каждой паре их перемножить, а затем сложить полученные два числа, то получится число 105080. Помогите сыну вспомнить два оставшихся номера. (Все автомобильные номера трехзначные числа).

Решение: Пусть x и y номера двух оставшихся автомобилей. Тогда возможны два варианта.

1-й вариант. $xy + 119 \cdot 179 = 105080 \Rightarrow xy = 83779 = 199 \cdot 421$ - это два простых сомножителя, поэтому других трехзначных сомножителей нет. Но в этом варианте нет ни одной цифры 3.

2-й вариант. $119x + 179y = 105080$ - это Диофантово уравнение. Решим его.

Для начала найдем какое-нибудь решение в целых числах уравнения $119x + 179y = 1$. Это $x = -3, y = 2$. Следовательно, одно из решений исходного уравнения $x = -315240, y = 210160$, а общее решение $x = 179t - 315240, y = 210160 - 119t$, где $t \in \mathbb{Z}$. Подберем $t \in \mathbb{Z}$, чтобы x и y стали трехзначными натуральными числами. Это будет при $t = 1762, 1763, 1764, 1765$. Получаются 4 варианта пар трехзначных номеров: $x = 158, y = 482$; $x = 337, y = 363$; $x = 516, y = 244$; $x = 695, y = 125$. Условию задачи удовлетворяет только один вариант.

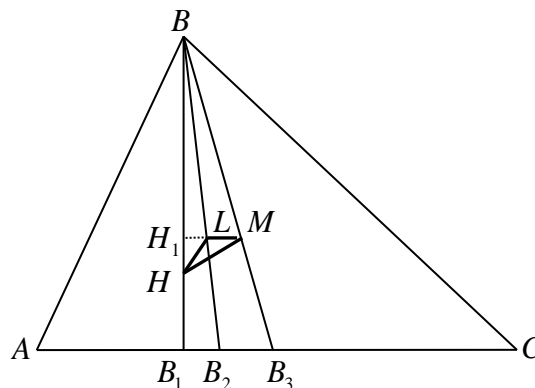
Ответ: 337, 363.

8. В треугольнике ABC со сторонами 13, 14 и 15 см. H, M и L – точки пересечения его высот, медиан и биссектрис, соответственно. Найдите площадь треугольника HML .

Решение:

Пусть $AB=13$ см, $BC=15$ см, $AC=14$ см, BB_1 - высота, BB_2 -биссектриса, BB_3 -медиана. По свойству биссектрисы треугольника – она всегда между высотой и медианой. Так как $AC < BC$, то BB_1 лежит внутри.

Пусть r -радиус вписанной окружности.



Воспользуемся тремя свойствами:

- $BM:MB_3=2:1$;
- $BL:LB_2=BH_1:H_1B_1=(BB_1-r):r=(2S_{ABC}/r-AC):AC=(P_{ABC}-AC):AC=(AB+BC):AC=28:14$;
- $BH/(2R)=\cos \angle B=BA_1:BA=BC_1:BC$, где AA_1 и CC_1 – оставшиеся высоты треугольника ABC .

Из 1 и 2 следует, что $LM \parallel AC \Rightarrow LM = \frac{2}{3} B_2B_3$ и $LM \perp BB_1 \Rightarrow S_{HML} = \frac{1}{2} LM \cdot HH_1$, где

$$BH_1 = \frac{2}{3} BB_1.$$

По формуле Герона $S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6} = 84 \Rightarrow BB_1 = 2S_{ABC} : AC = 12 \Rightarrow BH_1 = 8$.

По следствию из теоремы косинусов

$$\cos \angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{169 + 1 \cdot 29}{390} = \frac{198}{390} = \frac{33}{65}.$$

По формуле площади треугольника $R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{336} = \frac{65}{8}.$

Итак $BH = \frac{65}{4} \cdot \frac{33}{65} = \frac{33}{4} \Rightarrow HH_1 = BH - BH_1 = \frac{33}{4} - 8 = \frac{1}{4}.$ По свойству биссектрисы

$$AB_2 : B_2C = AB : BC \Rightarrow AB_2 = 6,5 \Rightarrow B_2B_3 = 0,5AC - AB_2 = 7 - 6,5 = 0,5 \Rightarrow$$

$$LM = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{HML} = \frac{1}{24}.$$

Ответ: $\frac{1}{24}.$

Критерии проверки заданий 10-го класса

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Итого
Баллы	10	10	10	10	15	15	15	15	100

Задача 1

Баллы	
10	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
8	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2

Баллы	
10	Обоснованно получен правильный ответ.
8	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3

Баллы	
10	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
8	При верном и обоснованном ходе решения получен ответ, отличающийся от правильного включением одной граничной точки.
4	При верном и обоснованном ходе решения получен ответ, отличающийся от правильного включением нескольких граничных точек.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4

Баллы	
10	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
8	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
4	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования или решение содержит арифметическую ошибку (ошибку при округлении)
5	Задача верно сведена к решению системы уравнений.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования.
5	Верно построены отрезки длиной $\sqrt{3}, \sqrt{2}$ из 1.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 7

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
8	Рассмотрен только один из двух вариантов.
4	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 8

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано. Например, не доказано, что высота внутри треугольника.
8	Доказано, что $LM \parallel AC$.

4	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышперечисленным требованиям.