

## Типовой вариант (условия, решения, ответы)

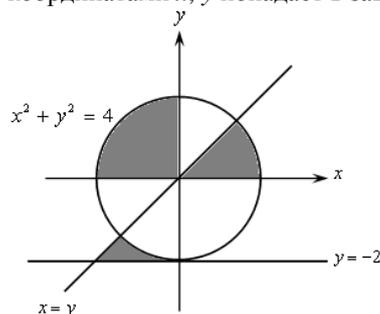
**Задача 1 (8 баллов).** Переведите шестнадцатеричное число  $A_{16} = 32AB,C1$  в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

**Решение задачи 1.**

$$32AB,C1 = 3 \cdot 16^3 + 2 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 + 12 \cdot 16^{-1} + 1 \cdot 16^{-2} = 12288 + 512 + 160 + 11 + 0,75 + 0,00390625 = 12971 + 0,75390625 = 12971,75390625.$$

**Ответ: 12971,75390625.**

**Задача 2 (8 баллов).** На любом языке программирования запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами  $x, y$  попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



**Решение задачи 2 на языке Си.**

```
((x <= 0) && (y >= 0) && ((x*x + y*y) <= 4)) ||
((x >= 0) && (y >= 0) && ((x*x + y*y) <= 4) && (y <= x)) ||
((x <= 0) && (y <= 0) && (y >= -2) && ((x*x + y*y) >= 4) && (y <= x))
```

**Задача 3 (8 баллов).** Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. Вычислить значение следующего выражения:  $(\sim a \mid a \ll 1 \ \& \ a \gg 1) \ \& \ ((a \mid b) \gg 1 \mid (a \ \& \ b) \ll 1)$  для  $a = 15$  и  $b = 136$ . Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

**Решение задачи 3.**

- 1)  $a = 15_{10} = 00001111_2$
- 2)  $b = 136_{10} = 10001000_2$
- 3)  $\sim a = 11110000_2$
- 4)  $a \ll 1 = 00011110_2$
- 5)  $a \gg 1 = 00000111_2$
- 6)  $a \ll 1 \ \& \ a \gg 1 = 00000110_2$
- 7)  $\sim a \mid a \ll 1 \ \& \ a \gg 1 = 11110110_2$
- 8)  $a \mid b = 10001111_2$
- 9)  $(a \mid b) \gg 1 = 01000111_2$
- 10)  $a \ \& \ b = 00001000_2$
- 11)  $(a \ \& \ b) \ll 1 = 00010000_2$
- 12)  $(a \mid b) \gg 1 \mid (a \ \& \ b) \ll 1 = 01010111_2$
- 13)  $(\sim a \mid a \ll 1 \ \& \ a \gg 1) \ \& \ ((a \mid b) \gg 1 \mid (a \ \& \ b) \ll 1) = 01010110_2 = 86_{10}$ .

**Ответ: 01010110<sub>2</sub> = 86<sub>10</sub>.**

**Задача 4 (8 баллов).** На книжной полке расположены книги по математике, физике, информатике и химии. Какая книга будет выбрана при одновременном выполнении следующих условий: а) если не выбирается химия, то не выбирается физика; б) не верно, что если выбирается информатика, то выбирается химия; с) если выбирается математика, то выбирается физика.

**Решение задачи 4.**

Введем следующие обозначения: М – математика, Р – физика, I – информатика, С – химия. Используя элементарные функции алгебры логики, запишем условие задачи в аналитической форме:

$$f(M, P, I, C) = (\neg C \rightarrow \neg P) \wedge \neg (I \rightarrow C) \wedge (M \rightarrow P).$$

Используя свойства функций алгебры логики, выполним преобразования:

$$\begin{aligned} &(\neg C \rightarrow \neg P) \wedge \neg (I \rightarrow C) \wedge (M \rightarrow P) = \\ &(\neg \neg C \vee \neg P) \wedge \neg (\neg I \vee C) \wedge (\neg M \vee P) = \\ &(C \vee \neg P) \wedge (\neg \neg I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) = \\ &(C \vee \neg P) \wedge (I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) = \\ &(C \wedge I \wedge \neg C \vee \neg P \wedge I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) = \\ &(\neg P \wedge I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) = \\ &(\neg P \wedge I \wedge \neg C \wedge \neg M \vee \neg P \wedge I \wedge \neg C) = \\ &(\neg P \wedge I \wedge \neg C \wedge \neg M). \end{aligned}$$

Функция  $f(M, P, I, C)$  равна единице при следующих значениях переменных:  $M = 0, P = 0, I = 1, C = 0$ .

**Ответ: Информатика.**

**Задача 5 (8 баллов).** Сколько существует положительных целых чисел между 1 и 2003, которые а) Делятся на 6? б) Делятся на 7? с) Делятся на 8? д) Делятся на 6 или 7 или 8?

**Решение задачи 5.**

**Ответ: а) 333; б) 286; с) 250; д) 715.**

**Задача 6 (8 баллов).** Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:

$a \ x \ b \ x \ c \ x \ d \ x \ e \ x \ + \ * \ + \ * \ + \ * \ + \ * \ +$ . Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, и с помощью алгоритма центрированного обхода дерева вручную вычислите значение этого выражения для  $x=3, a=1, b=2, c=3, d=4, e=5$ .

**Решение задачи 6.**

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид:  $(a+(x*(b+(x*(c+(x*(d+(x*(e+x))))))))$ . Для наглядности дерево можно изобразить по правилу «корень вверху, листья внизу». Подставляя значения, получим  $(1+(3*(2+(3*(3+(3*(4+(3*(5+3)))))))) = 790$ .

**Ответ: 790.**

**Задача 7 (12 баллов).** Функция  $A$  определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел  $m$  и  $n$  следующим образом:  $A(0, n) = n+1$ ;  $A(m, 0) = A(m-1, 1)$ , если  $m > 0$ ;  $A(m, n) = A(m-1, A(m, n-1))$ , если  $n, m > 0$ . Вычислить вручную значение  $A(3, 2)$ .

**Решение задачи 7.**

- 1)  $A(0, 0) = 1$ ;  
 $A(0, 1) = 2$ ;  
 $A(0, 2) = 3$ ;  
...  
 $A(0, n) = n+1$ ;
- 2)  $A(1, 0) = A(0, 1) = 2$ ;  
 $A(1, 1) = A(0, A(1, 0)) = A(0, 2) = 3$ ;  
 $A(1, 2) = A(0, A(1, 1)) = A(0, 3) = 4$ ;  
...  
 $A(1, n) = A(0, A(1, n-1)) = A(0, n+1) = n+2$ ;
- 3)  $A(2, 0) = A(1, 1) = 3$   
 $A(2, 1) = A(1, A(2, 0)) = A(1, 3) = 5$ ;  
 $A(2, 2) = A(1, A(2, 1)) = A(1, 5) = 7$ ;  
...  
 $A(2, n) = A(1, A(2, n-1)) = 2*n+3$ ;

- 4)  $A(3, 0) = A(2, 1) = 5$ ;  
 $A(3, 1) = A(2, A(3, 0)) = A(2, 5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13$ ;  
 $A(3, 2) = A(2, A(3, 1)) = A(2, 13) = 2 \cdot 13 + 3 = 29$ .

Для наглядности результаты вычислений представим в табличной форме

m\n	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	5	7	9	11	13
3	5	13	29			

**Ответ:  $A(3, 2) = 29$ .**

**Задача 8 (12 баллов).** Укажите наибольшее целое число  $X$ , при котором логическое выражение  $(10 < X \cdot (X+1)) \rightarrow (10 > (X+1) \cdot (X+2))$  истинно.

**Решение задачи 8.**

- это операция импликации между двумя отношениями:  $A_0 = (10 < X \cdot (X+1))$  и  $B_0 = (10 > (X+1) \cdot (X+2))$ ;
- заметим, что по условию нас интересуют только целые числа, поэтому можно попытаться как-то преобразовать исходное выражение, получив равносильное высказывание (точные значения корней нас совершенно не интересуют!);
- рассмотрим неравенство  $A_0 = (10 < X \cdot (X+1))$ : очевидно, что  $X$  может быть как положительным, так и отрицательным числом;
- легко проверить, что в области  $X \geq 0$  высказывание  $A_0$  истинно при всех целых  $X \geq 3$ , а в области  $X \leq 0$  – при всех целых  $X \leq -4$  (чтобы не запутаться, удобнее использовать нестрогие неравенства);
- поэтому для целых  $X$  можно заменить  $A_0$  на равносильное выражение  $A = (X \leq -4) + (X \geq 3)$ ;
- область истинности выражения – объединение двух бесконечных интервалов;
- теперь рассмотрим второе неравенство  $B_0 = (10 > (X+1) \cdot (X+2))$ : очевидно, что  $X$  так же может быть как положительным, так и отрицательным числом;
- в области  $X \geq 0$  высказывание  $B_0$  истинно при всех целых  $X \leq 1$ , а в области  $X \leq 0$  – при всех целых  $X \geq -4$ , поэтому для целых  $X$  можно заменить  $B_0$  на равносильное выражение  $B = (-4 \leq X \leq 0) + (0 \leq X \leq 1) = (-4 \leq X \leq 1)$ ;
- область истинности выражения – закрытый интервал;
- вспомним таблицу истинности операции «импликация»:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

согласно таблице, заданное выражение истинно везде, кроме областей, где  $A = 1$  и  $B = 0$ .

- обратите внимание, что значение 3 уже не входит в эту область, потому что там  $A = 1$  и  $B = 0$ , то есть импликация дает 0;
- максимальное целое число в этой области будет 2.

**Ответ: 2.**

**Задача 9 (12 баллов).** Выпишите состояние массива  $a$  в конце выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre>const n=9; var a: array[0..n-1] of integer = (7, 3, 9, 4, 2, 5, 6, 1, 8); var i, first, p, v, t: integer; begin   first:=0; p:=first; v:=a[first];   for i:=first+1 to n-1 do     if (a[i]&lt;v) then       begin p:=p+1; t:=a[i]; a[i]:=a[p]; a[p]:=t;     end;   t:=a[first]; a[first]:=a[p]; a[p]:=t;</pre>	<pre>const int n = 9; int a[n] = {7, 3, 9, 4, 2, 5, 6, 1, 8}; int main() {   int i, first, p, v, t;   first=0; p=first; v=a[first];   for (i=first+1; i&lt;n; i++)     if (a[i]&lt;v) { p++; t=a[i]; a[i]=a[p]; a[p]=t; }   t=a[first]; a[first]=a[p]; a[p]=t;   return 0; }</pre>

end.

### Решение задачи 9.

Выпишем состояние массива **a** после каждого прохода **for**-цикла:

1-й проход: 7 3 9 4 2 5 6 1 8  
 2-й проход: 7 3 9 4 2 5 6 1 8  
 3-й проход: 7 3 4 9 2 5 6 1 8  
 4-й проход: 7 3 4 2 9 5 6 1 8  
 5-й проход: 7 3 4 2 5 9 6 1 8  
 6-й проход: 7 3 4 2 5 6 9 1 8  
 7-й проход: 7 3 4 2 5 6 1 9 8  
 8-й проход: 7 3 4 2 5 6 1 9 8

После выхода из **for**-цикла переменная **p** равна 6, и выполняется последняя перестановка элементов, после которой состояние массива **a** будет таким: 1 3 4 2 5 6 7 9 8.

**Ответ: 1, 3, 4, 2, 5, 6, 7, 9, 8.**

**Задача 10 (16 баллов).** Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее главной диагонали:

Pascal	C
<pre>const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 &lt;&gt; 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for j:=0 to n-1 do for i:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end.</pre>	<pre>#define MIN(X,Y) ((X) &lt; (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i&lt;n; i++) for (j=0; j&lt;n; j++) if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k&lt;2; k++) for (j=0; j&lt;n; j++) for (i=0; i&lt;n; i++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; }</pre>

### Решение задачи 10.

После инициализации матрица **D** будет иметь вид:

```
 1  -1  2  -2  3
-3  4  -4  5  -5
 6  -6  7  -7  8
-8  9  -9 10 -10
11 -11 12 -12 13
```

Для **k=0** матрица **D** будет иметь вид:

```
 1  -1  2  -2  3
-3  -4  -4  -5  -5
 6  -6  7  -7  8
-8  -9  -9 -10 -10
11 -11 12 -12 13
```

Для **k=1** матрица **D** будет иметь вид:

```
-4  -5  -9 -10 -10
-7  -8 -12 -13 -13
-13 -14 -26 -27 -27
-16 -17 -29 -30 -30
-18 -19 -31 -32 -32
```

В конце программы матрица **D** будет иметь вид:

-4	-5	-9	-10	-10
-7	-8	-12	-13	-13
-13	-14	-26	-27	-27
-16	-17	-29	-30	-30
-18	-19	-31	-32	-32

**Ответ:** -4 -8 -26 -30 -32.