+1

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

11

Шифр 216945

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету Математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Вартанов Дмитрий Александрович

Город, № школы (образовательного учреждения) Город Рубцовск, МБОУ "Гимназия "Планета Детства"

Регистрационный номер ШМ6469

Вариант задания 13

Дата проведения “16” 02 2018 г.

Подпись участника Вартанов

49 (сорок девять)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12	–	20	5	0					49

216945

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

945

Вариант № 13

№2

$$\frac{(|x-4|-|x|)\cdot \log_2(5-x)}{(9^x-4\cdot 3^x+3)\cdot \log_5(x+1)} \le 0$$

1) ОДЗ: $\begin{cases} 9^x-4\cdot 3^x+3\ne 0 \\ \log_5(x+1)\ne 0 \\ x+1>0 \\ 5-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x\ne 1 \\ 3^x\ne 3 \\ x>-1 \\ x<5 \\ x+1\ne 1 \end{cases}$ (из квадратного ур-ия $3^{2x}-4\cdot 3^x+3\ne 0$)

В итоге: $\begin{cases} x\ne 0 \\ x\ne 1 \\ x>-1 \\ x<5 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;5)$

2) Решим методом интервалов:

$\begin{cases} |x-4|-|x|=0 \\ \log_2(5-x)=0 \\ 9^x-4\cdot 3^x+3\ne 0 \\ \log_5(x+1)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-4|-|x|=0 \\ x=5-1=4 \\ \left[\begin{array}{l} x\ne 0 \\ x\ne 1 \end{array}\right. \\ x\ne 0 \end{cases}$

2а) $|x-4|-|x|=0$

а) $x<0$

$-x+4+x=0$

$x\in\varnothing$

б) $x\in[0;4]$

$-x+4-x=0$

$x=2$

в) $x\ge 4$

$x-4-x=0$

$-4=0;\ x\in\varnothing$

3)

$x\in(-1;0)\cup(0;1)\cup[2;4]$

Ответ: $x\in(-1;0)\cup(0;1)\cup[2;4]$

12

20

№4

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x-y)\le 23 \\ y \geq |x+2|+1 \end{cases}$$

1) $x^2+y^2+2(x-y)\le 23$

$x^2+2x+1+y^2-2y+1\le 25$

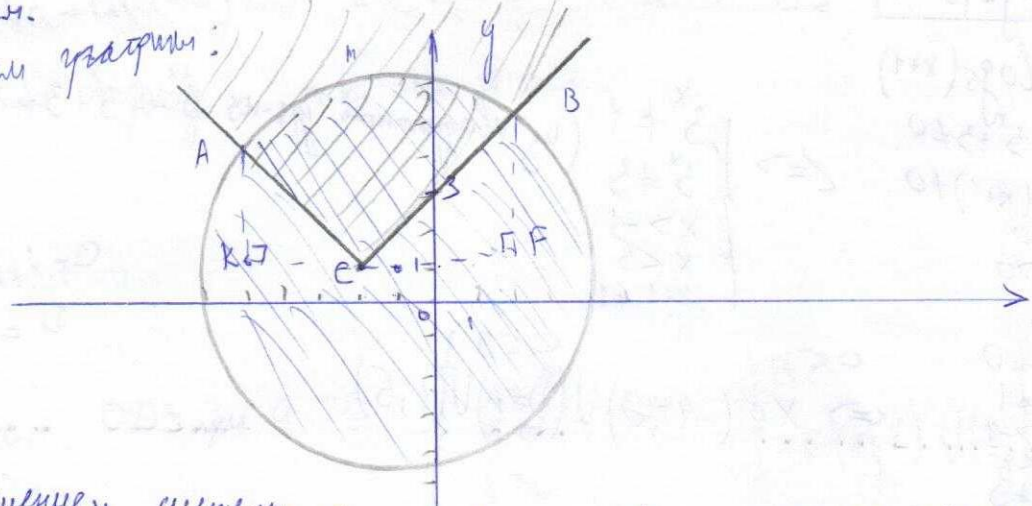
$(x+1)^2+(y-1)^2\le 5^2$

Решениями неравенства будут являтся все пары, лежащие внутри окр. с ц. О $((-1;1)$

2) $y\geq |x+2|+1$

Решениями неравенства будут являться все ~~точки~~ пары чисел, лежащие над графиком.

3) Начертим графики:



4) Итак, решением системы будут являтся все пары чисел, лежащие в двойной штр

5) $P(AmBC) = AmB + AC + BC$

6) $CB^2 = BF^2 + CF^2$ $\quad (F(2;1) \Rightarrow CF=4,\ BF=4)$

$CB = 4\sqrt{2}$

Аналогично, $CA^2 = KA^2 + CK^2 = 2\cdot 9$; $CA = 3\sqrt{2}$

7) $AB = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2} = 5\sqrt{2}$

По Т Cos: $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AB\cdot CB\cdot \cos(C)$, откуда $\cos(C)=0$; $\angle C = 90^\circ$

8) Тогда: $AmB = \frac{1}{4}C$ (C - длина окружности)

$AmB = \frac{2\pi R}{4} = \frac{5\pi}{2} = 2{,}5\pi$

9) $P(AmBC) = 2{,}5\pi + 7\sqrt{2}$

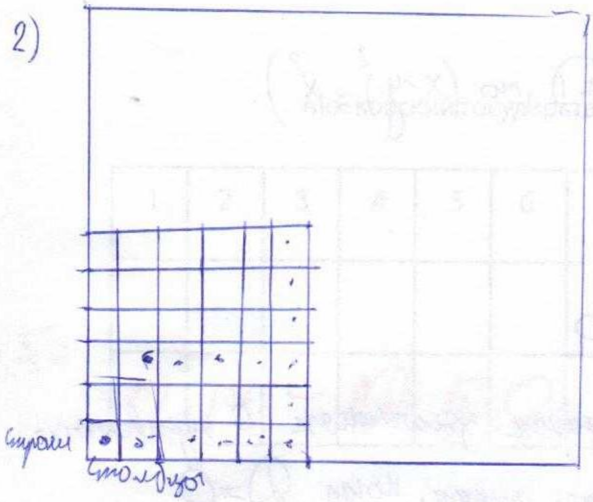
Ответ: $P(AmBC) = 2{,}5\pi + 7\sqrt{2}$

20

№1

1) Учтем то, что кони разного цвета. Т.е. для каждой позиции будет разных варианта (поменять коней местами).

2)

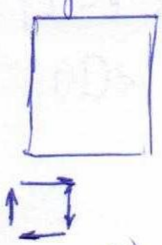


а) Разберём перестановку коней по горизонталям. Не меня строки, кол-во возможных вариантов будет равно 15 т.к. кони упираются в край доски (между конями в ~~столбцах~~ строках расстояние - 1 клетка).

б) Разберём перестановку коней по вертикалям. Не меня столбцы, кол-во возможных вариантов будет равно 14 (т.к. м/д конями в столбцах расстояние - 2 клетки).

3) В итоге, если мы не двигаем доску и двигаемся слева направо, общее кол-во вариантов будет равно $15 \cdot 14 \cdot 2 = 420$

4) Однако мы можем переворачивать доску на 90°, тем самым кони будут занимать другие поля при повторении. Всего возможны четыре разных положения доски.



$\Downarrow$

5) Общая сумма всех вариантов равна: $15 \cdot 14 \cdot 2 \cdot 4 = 1680$ вариантов

Ответ: 1680 вариантов.

12

№5

$$\begin{cases} \log_{|x-2|}(ax-a) = 2\log_{|x-2|}(x+y) \\ 4-x = \sqrt{x^2-8x+16+y} \end{cases}$$

– 1 решение

1) Рассмотрим: $(4-x) = \sqrt{x^2-8x+16+y} \iff \begin{cases} (x-4)^2 = (x-4)^2 + y \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$ +

2) Рассмотрим: $\log_{|x-2|}(ax-a) = 2\log_{|x-2|}(x+y)$

а) ОДЗ: $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ ax-a > 0 \\ x+y > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \neq 2 \\ ax > a \\ x > -y \end{cases}$ $\quad$ $|x-2| \neq 1$

$x \neq 3 \quad x \neq 1$

Рассмотрим два случая, когда $a > 0$ и $a < 0$ (при $a = 0$ $x \in \varnothing$):

a₁) $\begin{cases} a > 0 \\ x \neq 2 \\ x > 1 \\ x > -y \end{cases}$ $\quad$ a₂) $\begin{cases} a < 0 \\ x \neq 2 \\ x > -y \\ x < 1 \end{cases}$

№5 (продолжение)

б) $\log_{|x-2|}(ax-a) = \log_{|x-2|}(x-y)^2$ (т.к. $y=0$ из п.1, то $(x-y)^2 = x^2$)

$\log_{|x-2|}\left(\frac{(ax-a)}{x^2}\right)=0$; $\begin{cases} x\le 4 \text{ (из п.1)} \\ x\ne 2 \\ x>0 \quad (y=0) \\ ax>a \end{cases}$

$|x-2|^0 = 1 \Rightarrow \frac{(ax-a)}{x^2}=1$; $x^2-ax+a=0$

3) Т.к. $y=0$ - постоянное число, то найдем, при каких значениях a уравнение $x^2-ax+a=0$ - имеет единств. решение. Это будет тогда, когда $D=0$

$x^2-ax+a=0$

$D=a^2-4a=a(a-4)=0 \Rightarrow a=0 \quad \vee a=4$

4) а) $a=0$ - не подходит, т.к. $ax-a>0$.

б) $a=4$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$x=2$

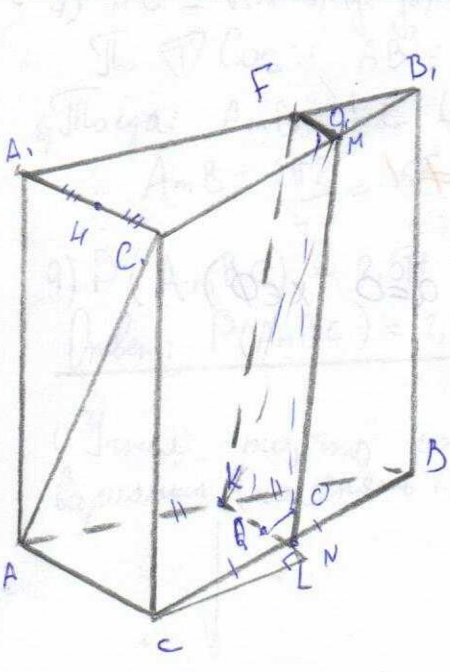
Но учтем ОДЗ при $a>0$: $\begin{cases} a>0 \\ x\ne 2 \\ x>1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ x\in(1;2)\cup(2;+\infty) \end{cases}$

При $a=4$ $x=2$ не принадлежит ОДЗ $\Rightarrow$ при $a=4$ $x\in\varnothing$

5) Значит, при любом значении параметра a не будет единственного решения.

Ответ: $a\in\varnothing$.

5



№6

Дано: $AA_1B_1BC_1C$ - правильная

$AK=KB$

$MC_1=3B_1M$

$CN=1$

$CB=2\sqrt{14}$

$S(FMKN)=?$

Решение:

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 216945

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 13

№6 (продолжение)

1) Т.к. $AC_1 \parallel FMKN$, то $KN \parallel AC_1$; $KF \parallel AC_1$; $NM \parallel AC_1$ ...

2) $KN \parallel AC_1$, т.к. $AA_1 \perp AC$, $KN \parallel AC$ (KN – средняя линия) $\Rightarrow KN \parallel (AA_1C)$; $KN \parallel AA_1$

3) ~~Рассмотрим MK: $(ACNKMC_1)$ $AC_1 \parallel MK$, если $KN \parallel AC_1$, $KN \parallel AC_1$, $MN \parallel AC$, $MN \parallel AC_1$, $AC_1 \parallel MK$~~

4) $MF \parallel AC_1$, когда $MF \parallel (A_1AC_1) \Rightarrow MF \parallel A_1C_1$ и $MF \parallel AA_1$

Т.к. $\Delta A_1B_1C_1$ – равносторон., то если $A_1C_1 \parallel MF$, то $\frac{MB_1}{FB_1} = 1$.

5) $MF \parallel AC$ – соответственно $\Rightarrow MF \parallel AA_1C$; $MF\ AC_1$

6) $FB_1 = MB_1 = \frac{\sqrt{14}}{2}$

$KN = \sqrt{14}$

7) Пусть O_1O – перпендикуляр к основаниям призмы. Тогда $O_1O \perp QO$.

$(FO_1 = O_1M;\ KO = ON)$

8) $QO = BQ - BO$; $BO = B_1O_1$ $\qquad B_1O_1 = \frac{1}{4}B_1H = \frac{\sqrt{14}}{2} \cdot \sin 60 = \frac{\sqrt{42}}{4}$

$BQ = \frac{1}{2}B_1H = \frac{\sqrt{42}}{2} \Rightarrow QO = BQ - B_1O_1 = \frac{\sqrt{42}}{4}$

9) ΔOO_1Q – прямоуг. $\Rightarrow QO_1^2 = OO_1^2 + QO^2$; $QO_1 = \sqrt{56 + \frac{42}{16}} = \sqrt{\frac{938}{16}}$

$FMNK$ – трапеция $(FM \parallel KN) \Rightarrow S_{тр.} = \frac{FM + NK}{2} \cdot QO_1$

$FM = \frac{1}{4}A_1C_1$ (из $\Delta A_1C_1B_1$) $\quad FM = \frac{\sqrt{14}}{2}$

$NK = \sqrt{14}$

$S_{тр.} = \frac{3\sqrt{14}}{4} \cdot \frac{\sqrt{938}}{4} = \frac{3\sqrt{7 \cdot 269}}{8} = = \frac{3}{8} \cdot \sqrt{1883}$ $\qquad$ Ответ: $S_{тр.} = \frac{3}{8} \cdot \sqrt{1883}$