Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

111445

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника КОРОЛЕНОК АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ

Город, № школы (образовательного учреждения) МОСКВА, ГБОУ школа на Юго-Востоке им. Маршала В. И. Чуйкова.

Регистрационный номер ШМ5861

Вариант задания 19

Дата проведения «11» МАРТА 2018 г.

Подпись участника Коро

47 (сорок семь) ...

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	3	4	20	5	15					47

111445

Шифр ______

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

111445

Вариант № 19

№1.

Для полной непрозрачности в вертикальном направлении нужно, чтобы в каждой из трех частей столбика была хотя бы одна непрозрачная пластинка треугольных.

Таких способов $C_5^3 \cdot 2 + C_3^2 \cdot C_5^2 + C_3^2 \cdot C_5^2 + C_5^2 \cdot C_3^2 + C_5^3 \cdot 2 + C_5^3 \cdot 2 = 6 \cdot C_5^3 + 3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2$

3,1,1 | 1,2,2 | 2,1,2 | 2,2,1 | 1,3,1 | 1,1,3

количества непрозрачных треугольников в каждой треугольной стопке

$= 6 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} + 3 \cdot \frac{5!}{3!\ldots}$

$= \frac{6 \cdot 4 \cdot 5}{2} + \frac{3 \cdot 4\ldots}{4}$

$= 6 \cdot 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 75$

Ответ: 75 способов различных.

0

№2.

$\sin^4(2016x) + \cos^{2017}(2025x) \cdot \cos^{2018}(2016x) = 1 \Leftrightarrow (1-\cos^2(2016x))^2 + \cos^{2017}(2025x)\cos^{2018}(2016x) = \ldots$

$1 + \cos^4(2016x) - 2\cos^2(2016x) + \cos^{2017}(2025x)\cos^{2018}(2016x) = \ldots$

$\cos^2(2016x)\left(\cos^2(2016x) - 2 + \cos^{2017}(2025x)\cos^{2016}(2016x)\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos^2(2016x) = 0 \\ \underset{\wedge\atop 1}{\cos^2(2016x)} + \underset{\wedge\atop 1}{\cos^{2017}(2025x)}\,\underset{\wedge\atop 1}{\cos^{2016}(2016x)} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos(2016x) = 0 \\ \left\{\begin{array}{l} \cos(2016x) = \pm 1 \\ \cos 2025x = 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2016x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \left\{\begin{array}{l} 2016x = \pi k \\ 2025x = 2\pi k \end{array}\right. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{4032} + \frac{\pi k}{2016} & (1) \\ \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi k}{2016} \\ x = \frac{2\pi k}{2025} \end{array}\right. & (2) \end{array}\right.$

$\frac{\pi k}{2016} = \frac{2\pi k}{2025}$

$\cancel{k}\ \frac{1}{2016} = \frac{2}{2025}$ — неверно, $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(1)\\ \varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow (1).$

3

буквы разные

Ответ: $x = \frac{\pi}{4032} + \frac{\pi k}{2016}.$

№5.

$8a + 3ab\,\mathrm{ctg}\,x + 2\sqrt{2(x + |x - 3\,\mathrm{ctg}x \cdot b| + 3b\,\mathrm{ctg}\,x)} = 12 + ax$

$8a - 12 + 2\sqrt{2(x - 3b\,\mathrm{ctg}x + |x - 3b\,\mathrm{ctg}x|)} = a(x - 3b\,\mathrm{ctg}x)$, $\boxed{x - 3b\,\mathrm{ctg}x = t.}$

$8a - 12 = 2\sqrt{2(t + |t|)} = at.$

1) $t < 0$: $8a - 12 = at$, $t = \frac{8a-12}{a} < 0$ — всегда? одно решение для t.

2) $f=0$: $8a-12=0$ № 5 (продолжение)

$a=1{,}5$

$x = 3b\,ctg\,x \rightarrow$ ~~одно решение при $b=0$~~ $\rightarrow$ нет случая с единственным решением для

~~$a=1{,}5,\ b=0$~~

$b \neq 0: \rightarrow x$ и $3b\,ctg\,x$ в бесконечном кол-ве точек

$b=0$: решений нет, т.к $ctg(0)$ неопределен.

3) $f>0$:

$8a-12+2\sqrt{4f} = af$

$4\sqrt{f} = (af-8a+12) \geq 0$

$16f = a^2f^2 - 2af(8a-12) + (8a-12)^2$

$a^2f^2 + 2f(-8-8a^2+12a) + (8a-12)^2 = 0$

$\frac{D}{4} = (8a^2-12a+8)^2 - a^2(8a-12)^2 = 16\left((2a^2-3a+2)^2 - a^2(2a-3)^2\right)$

$= 16\left((2a^2-3a+2)^2 - a^2(2a-3)^2\right)$

$a=0: -16f=0$

$a \neq 0$: $f=0, \rightarrow x = 3b\,ctg\,x$ – нет случая с единственным решением для x (п. 2))

единственное решение для $x \rightarrow$ единств. реш-е для $f \Rightarrow \frac{D}{4}=0$:

$(2a^2-3a+2)^2 = a^2(2a-3)^2$.

$4a^4 - 12a^3 + 17a^2 - 12a + 4 = 4a^4 - 12a^3 + 9a^2$.

$8a^2-12a+4=0$

$2a^2-3a+1=0$ $\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a=1: f=-4 \\ a=\frac{1}{2}: f=-16 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ x-3b\,ctg\,x=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ x-3b\,ctg\,x=-16 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ x+4=3b\,ctg\,x \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ x+16=3b\,ctg\,x. \end{cases} \end{array}\right.$ – уравнения будут иметь единственное решение, если $b=0$ (иначе прямая, параллельная $y=x$, пересечет график $y=3b\,ctg\,x$ в бесконечном кол-ве

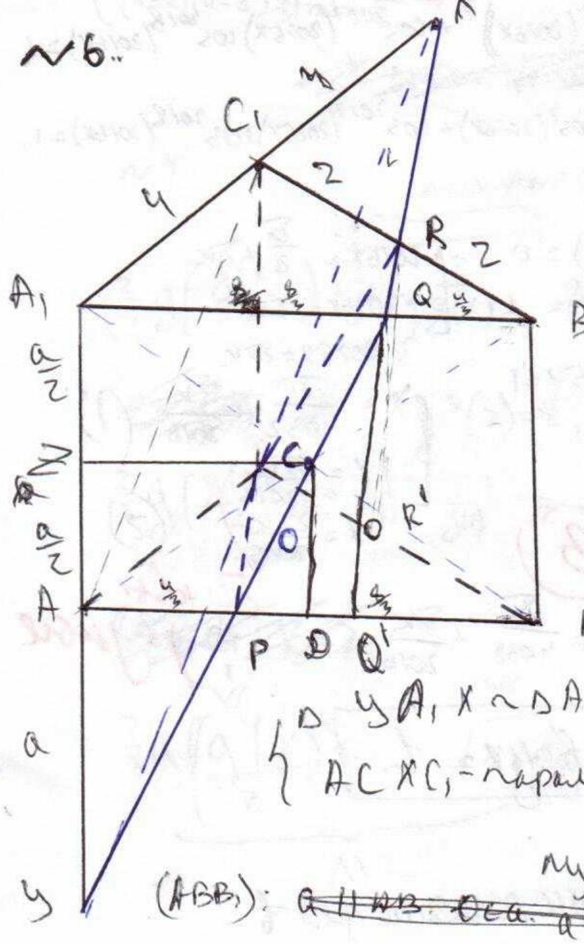
5

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+4=3\cdot 0\,ctg\,x \\ a=1 \\ b=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \\ x+16=0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-4 \\ a=1 \\ b=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \\ x=-16 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: при $a=\frac{1}{2}, b=0$ (x ...

при $a=1, b=0$ ($x=$ ...

№ 6.



(ACC_1): $l \parallel AC_1$: $C \in l$.

$l \cap A_1C_1 = X$.

$l \cap AA_1 = Y$.

$YO \cap AB = P$

$YO \cap A_1B_1 = Q$

$QX \cap C_1B_1 = R$.

$CPQR$ – сечение призмы.

$A_1B \cap AB_1 = O$ – центр симметрии бок. грани ABB_1A_1

Так $RQ \parallel CP$, лежат в одно плоскости на разных основ-ях призмы одновреме...

$\begin{cases} \Delta YA_1X \sim \Delta AA_1C_1 \text{ по 2 углам}, \\ ACXC_1 \text{ – параллелограмм}, \end{cases} \Rightarrow C_1X = A_1C_1 = 4$

пусть $AA_1 = a$, $\Rightarrow AA_1 = AY = a$

(ABB_1): ~~$a \parallel AB$. $O \in a$. $a \cap AA_1 = Z$.~~ $OD \parallel BB_1$: $D \in AB$

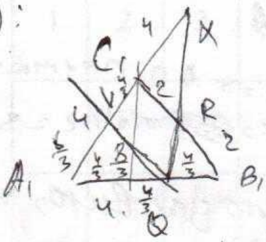
$OZ \parallel AB$: $Z \in AA_1$ $AZ = \frac{AA_1}{2}$

$\triangle YZO \sim \triangle YAP$ по 2 углам, $\Rightarrow \frac{AP}{ZO} = \frac{AY}{ZY} = \frac{1}{1{,}5}$, $\Rightarrow AP = \frac{ZO \cdot 2}{3} = \frac{1}{3}AB = \frac{4}{3}$

~~$AO = AO \cdot AP = 2 \cdot \frac{4}{1} = \frac{2}{3}$~~

$\triangle YAP \sim \triangle YA_1Q$ по 2 углам, $\Rightarrow \frac{A_1Q}{AP} = \frac{A_1Y}{AY} = \frac{2}{1}$, $\Rightarrow A_1Q = \frac{2\cdot 4}{3} = \frac{8}{3}$, $\Rightarrow B_1Q = $ +

$(A_1B_1C_1)$:



$C_1U \parallel RQ$: $U \in A_1B_1$. по теореме Фалеса ($\angle XA_1Q$) $\frac{A_1C_1}{C_1X} = \frac{AU}{UQ}$, $\Rightarrow AU = UQ = \frac{8}{3\cdot 2} = \frac{4}{3}$

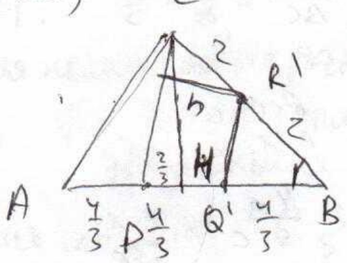
по теореме Фалеса (в $\angle C_1B_1U$) $\frac{C_1R}{RB_1} = \frac{UQ}{QB_1} = \frac{1}{1}$, $\Rightarrow C_1R = B_1R = $ +

$QV \parallel C_1B_1$: $V \in A_1C_1$. по т. Фалеса ($\angle C_1A_1B_1$) $\frac{C_1V}{A_1V} = \frac{QB_1}{A_1Q} = \frac{1}{2}$, $\Rightarrow C_1V = \frac{4}{3}$, $A_1V = \frac{8}{3}$. по т. Фалеса ($\angle VXQ$) $\frac{XR}{RQ} = \frac{XC_1}{C_1V} = \frac{1}{3}$, $\Rightarrow \frac{XR}{XQ} = \frac{3}{4}$

$Q' = Q(ABC)$ $\quad R' = R(ABC)$ $\quad RQ = R'Q'$, $AQ' = AQ = \frac{8}{3}$

$(QQ' \parallel AA_1)$ $\quad (RR' \parallel AA_1)$ $\quad RQ \parallel R'Q'$. $R'C = C_1R = 2$.

(ABC):



$S_{\triangle CPB} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle Q'R'B} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}$, $\Rightarrow S_{PQ'R'C} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$ +

$= \underbrace{\frac{4}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt3}}_{S_{\triangle ABC}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{\sqrt3 \cdot 2} = \cancel{\frac{4}{\sqrt3}}$ $\frac{2}{2}\cdot\frac{16\sqrt3}{4}$ $= 2\sqrt3$

$\parallel$ $S_{CPQR(ABC)}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle(CPQR, ABC) = \frac{\frac{4}{\sqrt3}}{\frac{9}{\sqrt5}} = \frac{4\sqrt5}{9\sqrt3}$ (−)

пусть высота трапеции $CPQ'R' = h$, тогда $\quad \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{h}\right) = \arccos\left(\frac{4\sqrt5}{9\sqrt3}\right) = \alpha$.

$\frac{1}{tg^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$, $\frac{1}{tg^2\alpha} = \frac{81\cdot3 - 80}{80}$, $tg^2\alpha = \frac{80}{163}$, $tg\,\alpha = \frac{4\sqrt5}{\sqrt{163}} = \frac{a}{h}$.

$\frac{h\cdot(CP + Q'R')}{2} = \frac{4}{\sqrt3}$, $\Rightarrow h = \frac{8}{\sqrt3(CP+Q'R')}$

$CH \perp AB$: $H \in AB$. $PH = \frac{AB}{2} - AP = \frac{2}{3}$, $CH = \frac{4}{\sqrt3}$. Тогда по теореме Пифагора ($\triangle CPH$)

$CP = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{3}} = \sqrt{\frac{52}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{13}$.

$Q'R'$ – ср. линия $\triangle CPB$, $\Rightarrow Q'R' = \frac{1}{2}CP = \frac{\sqrt{13}}{3}$. $h = \frac{8}{\sqrt3(CP+Q'R')} = \frac{8}{\sqrt3\sqrt{13}}$

$\frac{a}{h} = \frac{4\sqrt5}{\sqrt{163}}$, $\Rightarrow a = \frac{4\sqrt5\sqrt{163}\cdot 8}{\sqrt{39}} = \frac{32\sqrt5\sqrt{163}}{\sqrt{39}}$, ~~$V_{ABCA_1B_1C_1} = V_0$~~

пусть $V_{ABCA_1B_1C_1} = V_0$. $\quad V_0 = a \cdot \frac{4}{\sqrt3} = \frac{128\sqrt5\sqrt{163}}{\sqrt{117}}$

$V(A_1XQY) = 2\cdot2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{V_0}{3} = \frac{8}{9}V_0$, $V(ACPY) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}V_{A_1XQY} = \frac{1}{9}V_0$, $V(XC_1RC) = \frac{1}{2}\frac{XR}{XQ}\cdot\frac{1}{2}V_0\cdot\frac{8}{9}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9}V_0 = \frac{V_0}{6}$. $\quad V(APCC_1RQA_1) = V_0\left(\frac{8}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{6}\right) = \frac{16-2-3}{18}V_0 = \frac{11}{18}V_0$.

Тогда $V(RQB, BPC) = \left(1 - \frac{11}{18}\right)V_0 = \frac{7}{18}V_0 = \frac{128\sqrt5\sqrt{163}\cdot 7}{18\sqrt{117}} = \frac{7\cdot64}{9}\sqrt{\frac{5\cdot163}{117}}$

$7\cdot64 = 420+28 = 448$.

$5\cdot163 = 815$.

$11\cdot64 = 704$.

$\frac{11\cdot128\sqrt5\sqrt{163}}{18\sqrt{117}} = \frac{11\cdot64}{9}\sqrt{\frac{5\cdot163}{117}}$

Ответ: ~~$V(APCC_1RQA_1) = 448\sqrt{815}$~~

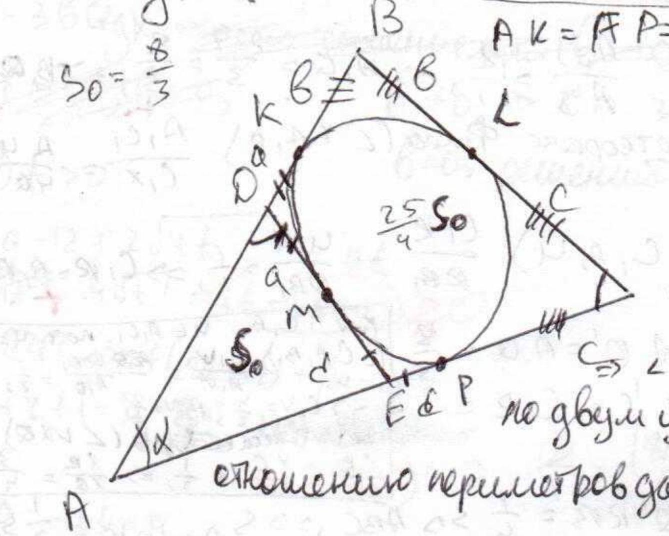
$V(RQB, BPC) = \frac{448\sqrt{815}}{9\sqrt{117}}$

$V(APCC_1RQA_1) = \frac{704\sqrt{815}}{9\sqrt{117}}$

15

№3 $tg\alpha = ?$ (точки K, L, P, M — см. рис.)

$S_0 = \frac{8}{3}$



$AK = AP = 4$, $PC = LC$, $BL = KB$ => $PC + KB = BL + LC = 6$. $AK + KP = 8 \Rightarrow P_{\triangle ABC} = 6+6+8=$ [illegible]

$DM = KD$, $ME = EP$, => $AP = AK$, => $AE+EP+AD+DM$ => $AD+DM+ME+AE =$
$= AE+EP+AD+DK = 4\cdot 2 = 8$, => [illegible]
$=8$ +!

BCED — вписанный по условию, => $\angle BDE + \angle BCE = 180^\circ$, => $\angle BCE = \angle ADE$

по двум углам $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ с коэффициентом, равным отношению периметров данных треугольников: $\frac{DE}{BC} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

$DE = \frac{12}{5}$.

Пусть $DM = DK = a$, $KB = BL = b$, $LC = CE = c$, $EP = EM = d$. Тогда $\angle DAE = \alpha$.

$b+c=6$

$a+d=\frac{12}{5}$

$\frac{4-a}{4+c} = \frac{4-d}{4+b}$

$(4-a)(4-d)\sin\alpha = \frac{16}{3}$

Окружность, вписанная в DBCE, вписана также в $\triangle ABC$, так что $\frac{S_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{S_{DBCE}}{P_{DBCE}}$

$\frac{29 S_0}{4\cdot 20} = \frac{\frac{25 S_0}{4}}{20-8-(a+d)}$ $\qquad \frac{29}{20} = \frac{25}{12+20+2b}$

$$\begin{cases} \frac{29}{10} = \frac{25}{6+a+b} \ (1) \\ b+c=6 \\ \frac{4-a}{4+c}=\frac{4-d}{4+b} \\ a+d=\frac{12}{5} \\ (4-a)(4-d)\sin\alpha=\frac{16}{3} \end{cases}$$

? дальше

~~$c = 6 - b$~~ ~~$a = \frac{12}{5} - d$~~ => (1) ~~$a = \frac{174}{290} - d$~~

$tg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$

$\frac{1}{ctg^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$

4

№4.

$$\overbrace{\frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) + \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}}}^{\text{max при } g(2)} \geq 13 g(g^3(x))$$

$g(x) = \frac{6}{x^2-4x+7}$ $\qquad x^2-4x+7$, $D<0$

$g(x)_{max} = g(x_в) = g\left(\frac{4}{2}\right) = g(2) = \frac{6}{4-\ldots} = 2$

$g^3(2) = 8$, $13g(8) = \frac{6\cdot 13}{3\cdot 13} = 2$.

$g^3(x)_{max} = g^3(2)$ ⇓ $13g(g^3(x))_{min} =$ [illegible] достигается при

$\frac{2}{3}g\left(\frac{g(2)}{2}\right) + \sqrt{2-\frac{2}{g(2)}} = \frac{2}{3}g(1)+\sqrt{1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{4}+\sqrt{1} = 2.$

~~Ответ: x=2.~~

$\underbrace{\frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)}_{\geq 1}+\underbrace{\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}}_{\leq 1} \geq \underbrace{13g(g(x))}_{\geq 2}$, => нестрогое неравенство выполняется при $13g(g(x)) = 2$,

верно при $x = 2$.

Ответ: $x=2$.

20