Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1

111404

Шифр ______________________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Федорнова Дарья Сергеевна

Город, № школы (образовательного учреждения) 1580, Москва

Регистрационный номер ИМ5328

Вариант задания 17

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника ______________________

48 (сорок восемь)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

111404

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
3	9	16	→	20						48

Шифр ________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 17

№2

$\sin^4(2025x)+\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)=1$

$\sin^4(2025x)=(1-\cos^2 2025x)^2=1+\cos^4 2025x-2\cos^2 2025x$

$\cancel{1}+\cos^4 2025x-2\cos^2 2025x+\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)=\cancel{1}$

$\underset{(1)}{\cos^2(2025x)}(\cos^2 2025x+\underset{(2)}{\cos^{2019}(2016x)\cos^{2016}(2025x)}-2)=0$

(2) $\cos^2(2025x)+\cos^{2019}(2016x)(\cos^{2016}(2025x))=2$

$\cos\alpha\in[-1;1]$ => чтобы выполнялось данное равенство необходимо выполнение данного условия

$\begin{cases}\cos^2(2025x)=1\\ \cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2016}(2025x)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos^2(2025x)=1\\ \cos^{2019}(2016x)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos(2025x)=1\\ \cos(2025x)=-1\end{array}\right.\\ \cos(2016x)=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2025x=\pi\cdot k\\ 2016x=2\pi\cdot n\end{cases}\quad k,n\in\mathbb{Z}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi k}{2025}\\ x=\frac{2\pi\cdot n}{2016}=\frac{\pi\cdot n}{1008}\end{cases}\quad k,n\in\mathbb{Z}$ ✓ ✓

=> $x=\frac{\pi k}{9}$

$\frac{\pi k}{2025}=\frac{2\pi\cdot n}{2016}$

$k=\frac{2025}{1008}\cdot n$ => $k,n\in\mathbb{Z}$ Подберём:

k

(~~2016x = 2π·n~~ ~~т.к. 2016, четное число, то~~)

$k=0$	$n=0$	$x=0$
$k=2025$	$n=1008$	$x=\pi$
$k=4050$	$n=2\cdot1008$	$x=2\pi$
$k=-2025$	$n=-1008$	$x=-\pi$
$k=3\cdot2025$	$n=3\cdot1008$	$x=3\pi$

⇓

$x=\pi\cdot t,\ t\in\mathbb{Z}$

(1) $\cos^2 2025x=0$

$2025x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot q,\ q\in\mathbb{Z}$?

$x=\frac{\pi}{4050}+\frac{\pi q}{2025},\ q\in\mathbb{Z}$!

$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4050}+\frac{\pi q}{2025}\\ x=\pi t\end{array}\right.\quad q,t\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x\in\left\{\frac{\pi}{4050}+\frac{\pi q}{2025};\ \frac{2}{3}\pi t\right\}$ ✓

$q,t\in\mathbb{Z}$

9

№6

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$

$\alpha \parallel AC_1$

$C, O \in \alpha$

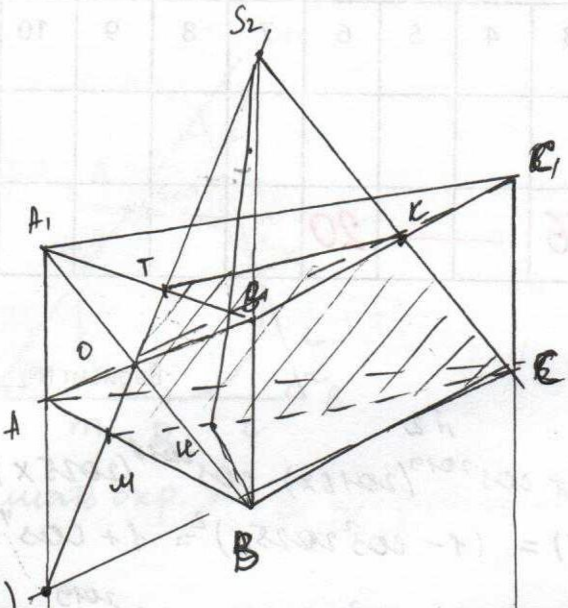
$AB_1 \cap A_1B = O$

$AB = 2\sqrt{14}$

$S_{сеч} = 21$

$V_1 : V_2$ - ?

Решение:



Решение

а) 1. Построение:

Если $\alpha \parallel AC_1 \Rightarrow l \subset \alpha$ и $l \parallel AC_1$

Построим l (зная, что $C \in \alpha$, и C и AC_1 - лежат в одной плоскости) S_1

$l \subset (AA_1C) \wedge l \cap (AA_1C) = S_1C$ $\quad S_1 \in \alpha$

2. Центр симметрии AA_1BB_1 - это пересечение её диагоналей $= O$

$\begin{cases} S_1 \in (AA_1B) \\ O \in (AA_1B) \end{cases} \Rightarrow OS_1 \in (AA_1B)$ $\quad MT \in \alpha$

$OS_1 \cap (AA_1B) = MT$

$OS_1 \cap BB_1 = S_2$ $\quad (S_2 \in \alpha)$; $(C \in \alpha)$

3. $\begin{cases} S_2 \in (BB_1C) \\ C \in (BB_1C) \end{cases} \Rightarrow S_2C \in (BB_1C)$

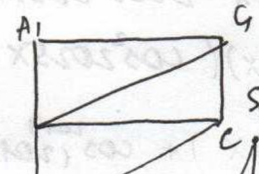
$S_2C \cap (BB_1C) = KC$

$KC \in \alpha$

4. $MTKC$ - искомое сечение α

Расчет точек

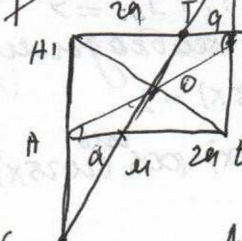
1.



$AC_1 \parallel S_1C$, $AC_1 = S_1C \Rightarrow$ AS_1CC_1 - пар-м

$C_1C = AS_1 = AA_1$

2.



$\dfrac{\triangle S_1AM}{\triangle S_1A_1T} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{S_1A}{S_1A_1}$

$\triangle AOM = \triangle OTB_1$

($AO = OB_1$, $\angle MAB_1 = \ldots$, $\angle AOM = \angle TOB_1$, как ...)

$AM = a = TB_1$

$A_1T = 2a = MB$

$\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{TB_1}{TA_1} = \dfrac{1}{2}$

$\triangle S_1AM = \triangle TS_2B_1$

$AS_1 = B_1C$

3.

$\triangle B_1S_2K = \triangle KC_1C$ (по углам и катету)

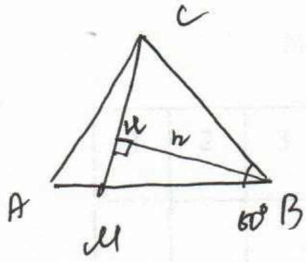
$\Rightarrow B_1K = KC_1$

$\dfrac{B_1K}{KC_1} = \dfrac{1}{1}$

б) $\begin{cases} BH \perp MC \text{ (по построен)} \\ BS_2 \perp MC \text{ (по св-ву фиг.)} \end{cases} \Rightarrow MC \perp (BHS_2)$

$\begin{cases} MC \perp (BHS_2) \\ MC \subset (MTKC) \end{cases} \Rightarrow (BHS_2) \perp (MTKC)$

$\Rightarrow BHS_2$ - ортог. плоскость



$AB = 2\sqrt{14}$

$MB = \frac{2}{3} AB = \frac{4\sqrt{14}}{3}$

$CB = 2\sqrt{14}$

По т. косинусов

$MC = \sqrt{MB^2 + CB^2 - 2MB \cdot CB \cos 60} = \sqrt{\frac{16 \cdot 14}{9} + 4 \cdot 14 - \frac{\cancel{2} \cdot 4\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{14}}{\cancel{2} \cdot 3}}$

$S_{MCB} = h \cdot \frac{1}{2} MC = MB \cdot CB \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 60°$

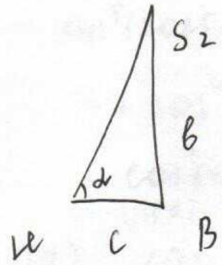
$= \sqrt{\frac{16 \cdot 14 + 9 \cdot 4 \cdot 14 - 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 14}{9}} = \sqrt{\frac{14(16 + 36 - 24)}{9}} = \sqrt{\frac{14 \cdot 28}{9}}$

$= \sqrt{\frac{2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 7}{9}} = \frac{2 \cdot 7\sqrt{2}}{3} = \frac{14}{3}\sqrt{2}$

$\frac{1}{\cancel{2}} h \cdot \frac{14}{\cancel{3}}\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{14}}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$h = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = HB$

2)



$HB = c$

$S_2B - b$

$\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 + b^2}}$

$S_{сеч} = \frac{S_{проек}}{\cos\alpha} = 21$

$\frac{7\sqrt{3}\sqrt{c^2+b^2}}{c} = 21$

$7\sqrt{3}\sqrt{c^2+b^2} = 21c$

$\sqrt{3}\sqrt{c^2+b^2} = 3c \quad \uparrow^2$

$3c^2 + 3b^2 = 9c^2$

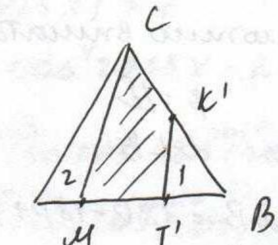
$3b^2 = 6c^2$

$b^2 = 2c^2$

$b = c\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{3}$

$BS_2 = 4\sqrt{3}$; $BB_1 = 2\sqrt{3}$

3)



T' – проекция T

K' – проекция K

$S_\triangle MCK'T'$ – проекция сечения $MTKC$

Пусть $S_{\triangle ABB} = S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{14} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$

1) $\frac{S_{T'BK'}}{S_{\triangle AHB}} = \frac{T'B}{BA} \cdot \frac{BK'}{BC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

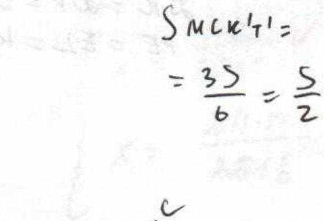
$S_{T'BK'} = \frac{1}{6} S$

2) $\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle AHB}} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$

$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{3} S$

$S_{MCK'T'} = S - \frac{S}{3} - \frac{S}{6} = \frac{6S - 2S - S}{6} =$

$= \frac{3S}{6} = \frac{S}{2} = 7\sqrt{3}$ ед^2



$S_{MCB} = MB \cdot CB \cdot \frac{1}{2} \sin 60°$

$= \frac{2 \cdot 4\sqrt{14}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{14}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{14 \cdot 2\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{28\sqrt{3}}{3}$

$S_{T'K'B} = S_{TKB} = T'B \cdot K'B \cdot \frac{1}{2} \sin 60$

$= \frac{2\sqrt{14}}{3} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{14\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

4) $V_{MBCS_2} = S_2B \cdot S_{MCB} \cdot \frac{1}{3}$

$= \frac{4\sqrt{3} \cdot 28\sqrt{3} \cdot 1}{3 \cdot \cancel{3}} = \frac{4 \cdot 28}{3}$

$V_{TKB_1S_2} = B_1S_2 \cdot S_{TKB_1} \cdot \frac{1}{3} =$

$= \frac{2\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{3}}{3 \cdot \cancel{3}} = \frac{14}{3}$

$V_{MTKB_1BC} = V_{MBCS_2} - V_{TKB_1S_2} = \frac{4 \cdot 28}{3} - \frac{14}{3} = \frac{14 \cdot 7}{3}$ ед^3 $= \frac{98}{3}$ ед^3 $= V_1$

5) $V_{AA_1BB_1CC_1} = AA_1 \cdot S_{ACB} = 2\sqrt{3} \cdot 14\sqrt{3} = 6 \cdot 14$ ед^3

$V_{AA_1MTKCC_1} = V_{AA_1BB_1CC_1} - V_{MTKB_1BC} = 6 \cdot 14 - \frac{14 \cdot 7}{3} = 14\left(6 - \frac{7}{3}\right) = \frac{14(18-7)}{3} =$

$= \frac{14 \cdot 11}{3} = \frac{154}{3}$ ед^3 $= V_2$

Ответ: $V_1 = \frac{98}{3}$ ед^3

$V_2 = \frac{154}{3}$ ед^3

20

№3

Дано:

$S_{\triangle ADE} = 0{,}5$

$AK = 3$

$BL = 15$

ω_1 (окр. вписан. в $BDEC$)

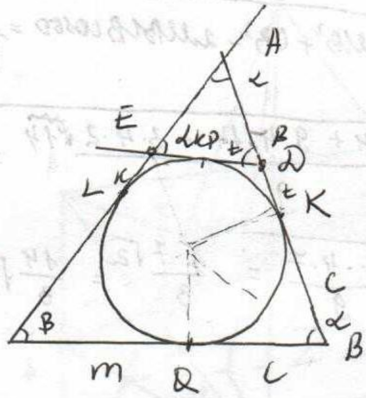
$AB \cap \omega_1 = K$

$AK = 3$

ω_2 (окр. описан. около $BDEC$)

$BC = 15$

$tg A$ - ?



Решение

1. Т.к. в $BEDC$ можно вписать окр. => Σ противоположных углов $= 180°$

$\angle EDB = 180 - \beta$ $\quad \beta = \angle C$

$\angle CED = 180 - \alpha$ $\quad \alpha = \angle B$

$\angle EDA = 180 - \angle EDB = 180 - 180 + \beta = \beta$

$\angle AED = \alpha$

$\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ACB$ (по углам)

$$\frac{ED}{CB} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \quad (*)$$

2. $AL \cap \omega_1 = L$ ($AL = AK$ как касат. из одной точки)

$CB \cap \omega_1 = Q$

$ED \cap \omega_1 = P$

(Аналогично: $QB = BK = c$, $QC = CL = m$, $DK = DP = t$, $PE = EL = k$)

$CQ + QB = m + c = 15$

$c = 15 - m$

(3) $ED = t + k$

$CB = 15$

$AD = 3 - t \quad AC = 3 + m$

$AE = 3 - k \quad AB = 3 + c = 3 + 15 - m = 18 - m$

$$(*) \quad \underset{(')}{\frac{t+k}{15}} = \underset{('')}{\frac{3-t}{3+m}} = \underset{(''')}{\frac{3-k}{18-m}}$$

$(') = (''')$: $3t + 3k + mt + mk = 45 - 15t$

$k(3+m) = 45 - 18t - mt$

$$k = \frac{45 - t(18+m)}{3+m}$$

$('') = (''')$: $18t + 18k - mt - mk = 45 - 15k$

$33k - mk = 45 - 18t + mt$

$k(33-m) = 45 + t(m-18)$

$$k = \frac{45 + t(m-18)}{33-m}$$

$$\frac{45 - t(18+m)}{3+m} = \frac{45 + t(m-18)}{33-m}$$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

111404

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 17

$(33-m)45 - t(18+m)(33-m) = 45(3+m) + t(m-18)(3+m)$

$(33-m-3-m)45 = t((m-18)(3+m) + (18+m)(33-m))$

$(30-2m)45 = t(\cancel{3m}+\cancel{m^2}-54-\cancel{18m}+\overset{594}{18\cdot 33}-18m+\cancel{33m}-\cancel{m^2})$

$90(15-m) = t\cdot 540$

$15-m = 6t$

$t = \frac{15-m}{6}$ $\Rightarrow AD = 3-t = 3-\frac{15-m}{6} = \frac{18-15+m}{6} = \frac{3+m}{6}$

$AC = 3+m$

$\frac{AD}{AC} = \frac{(3+m)}{6(3+m)} = \frac{1}{6} = \frac{ED}{CB}$

$ED = \frac{CB}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

$ED = k+t = \frac{5}{2}$

$k = \frac{5}{2} - t$

$AE = 3-k = 3-\frac{5}{2}+t$

$= \frac{1}{2}+t$

$\frac{P}{2} = 3$

$P_{AED} = AE+AD+ED$

$= \frac{1}{2}+\cancel{t}+3-\cancel{t}+\frac{5}{2} = \frac{6}{2}+3 =$

По формуле Герона

$S = \sqrt{3(3-\frac{1}{2}-t)(3-\frac{5}{2})(\cancel{3}-\cancel{3}+t)}$

$\sqrt{3\cdot\frac{1}{2}(\frac{5}{2}-t)t} = \frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}t(\frac{5}{2}-t) = \frac{1}{4}$ $\times 4$

~~$\frac{4\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 2}t - \frac{4\cdot 3t^2}{2} = 1$~~

~~$6t^2 - 9t + 1 = 0$~~

$\frac{4\cdot 3t}{2}(\frac{5}{2}-t) = 1$

$15t - 6t^2 = 1$

$6t^2 - 15t + 1 = 0$

~~$(1) = (2)$~~

~~$\frac{3-t}{3+m} = \frac{3-k}{18-m}$~~

~~$(3+m)\left(3 - \frac{45-t(18+m)}{3+m}\right) = (3-t)(18-m)$~~

~~$3(3+m) - (45-t(18+m)) = (3-t)(18-m)$ $|\times 6$~~

~~$18(3+m) - 6(45-t(18+m)) = 6(3-t)(18-m)$~~

~~$18(3+m) - 6\cdot 45 + \frac{6\cdot(15-m)(18+m)}{6} = (18-\overset{3+m}{15+m})(18-m)$~~

~~$54+18m-270+15\cdot 18+15m-18m-m^2 = 3\cdot 18-3m+18m-m^2$~~

~~$(1) = (3)$~~

~~$(t+k)(18-m) = 15(3-k)$~~

~~$\left(t+\frac{45-t(18+m)}{3+m}\right)(18-m) = 15\left(3-\frac{45-t(18+m)}{3+m}\right)$ $|\times(3+m)$~~

~~$((3+m)t+45-t(18+m))(18-m) = 15(3(3+m)-45+t(18+m))$~~

~~$(t(3+m-18-m)+45)(18-m) = 15(3(3+m)-45+t(18+m))$~~

~~$(45-15t)(18-m) = 15(3(3+m)-45+t(18+m))$~~

~~$(3-t)(18-m) = (3(3+m)-45+t(18+m))$~~

~~$\left(3-\frac{15-m}{6}\right)(18-m) = \left(9+3m-45+\frac{15-m}{6}(18+m)\right)$~~

~~$\frac{(18-15+m)}{6}(18-m) = \left(9+3m-45+\frac{(15-m)(18+m)}{6}\right)$ $|\times 6$~~

~~$(18-m)(3+m) = 6\cdot 3m - 6\cdot 36 + (15-m)(18+m)$~~

~~$18\cdot 3 - 3m + 18m - m^2 =$~~

$$\sqrt{3\left(3-\frac{5}{2}\right)\left(3-\frac{1}{2}-t\right)(3-3+t)}=\frac{1}{2}=0{,}5$$

$$\sqrt{3\cdot\frac{1}{2}t\left(\frac{5}{2}-t\right)}=\frac{1}{2}\quad\uparrow^2$$

$$\frac{3t}{2}\left(\frac{5}{2}-t\right)=\frac{1}{4}$$

$$\frac{15t}{4}-\frac{3t^2}{2}=\frac{1}{4}\quad\times 4$$

$$15t-6t^2=1$$

$$6t^2-15t+1=0$$

$$D=225-24=201$$

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{15+\sqrt{201}}{12}\\ t=\frac{15-\sqrt{201}}{12}\end{array}\right.$$

$$AD=3-\frac{15-\sqrt{201}}{12}=\frac{36-15+\sqrt{201}}{12}=\frac{21+\sqrt{201}}{12}$$

$$AE=\frac{1}{2}+\frac{15-\sqrt{201}}{12}=\frac{6+15-\sqrt{201}}{12}=\frac{21-\sqrt{201}}{12}$$

$$AD=3-\frac{15+\sqrt{201}}{12}=\frac{36-15-\sqrt{201}}{12}=\frac{21-\sqrt{201}}{12}$$

$$AE=\frac{6+15+\sqrt{20}}{12}=\frac{21+\sqrt{201}}{12}$$

(т.е. аналоги

$$S_{AED}=\frac{1}{2}AE\cdot AD\sin\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{(21+\sqrt{201})(21-\sqrt{201})}{12\cdot 12}\right)\sin\alpha=1$$

$$\left(\frac{441-201}{12\cdot 12}\right)\sin\alpha=1$$

$$\sin\alpha=\frac{144}{240}=\frac{72}{120}=\frac{36}{60}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

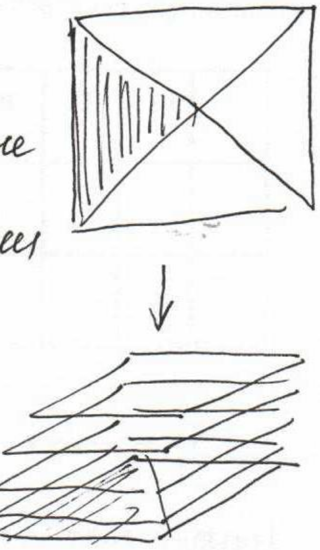
$$tg^2\alpha=\frac{25}{16}-1$$

$$tg^2\alpha=\frac{9}{16}$$

$$tg\,\alpha=\frac{3}{4}\qquad \alpha=\angle BAC$$

Ответ: $tg\,BAC=\frac{3}{4}$ ✓ 16

№1



1. Когда мы кладем первое стекло расположение этого квадрата можно обозначить 4-мя способами
2. раз. 3-мя
3. раз 2-мя
4. раз 1-м
5. 4 мя способами

1 раз ~~кладем~~ можем положит 5 квадратов — 4-мя способами.

$5 \cdot 4 = 20$

2 раз можем положить ~~5~~ 4 кадрата 4мя способам

т.е 1 всегда можно расположить в 4 порядке, 3 должны быть фиксированы и 5 опять в 4 поряд

$5 \cdot 4$	$5 \cdot 4$
$4 \cdot 4$	$4 \cdot 3$
$3 \cdot 3$	$3 \cdot 2$
$2 \cdot 2$	$2 \cdot 1$
$1 \cdot 1$	$1 \cdot \cancel{5}4$

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 16 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 5 = 11520$ (можно расположить стопку)

но учитавая, что 5 кусок может перемещаться в 4-х положениях, что

$$S = \begin{array}{r} 11520 \\ \times \quad 4 \\ \hline 46080 \end{array}$$

3

Ответ: 46080 способов. ? 7200