Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

218239

Шифр ______________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Савченко Никита Сергеевич

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Алматы КГУ гимназия №111
11 класс

Регистрационный номер UM6243

Вариант задания 24

Дата проведения "18" марта 2018 г.

Подпись участника [signature]

46 (сорок шесть)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
9	12	—	20	5	—					46

239

Шифр 218239

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

218239

Вариант № 24

№2

$$\frac{(x+6-4\sqrt{x+3})\log_2(x-2)}{(4^x-24\cdot 2^x+128)\log_3(8-x)} \geq 0$$

$$\frac{(x+3-4\sqrt{x+3}+4-1)\log_2(x-2)}{(2^{2x}-2\cdot 2^x\cdot 12+144-16)\log_3 8-x} \geq 0$$

$$\frac{((\sqrt{x+3}-2)^2-1)\log_2(x-2)}{((2^x-12)^2-16)\log_3(8-x)} \geq 0$$

$$\frac{(\sqrt{x+3}-2-1)(\sqrt{x+3}-2+1)\log_2(x-2)}{(2^x-12-4)(2^x-12+4)\log_3(8-x)} \geq 0$$

$$\frac{(\sqrt{x+3}-3)(\sqrt{x+3}-1)\log_2(x-2)}{(2^x-16)(2^x-8)\log_3(8-x)}$$

ОДЗ

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x+3\geq 0 \\ 8-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\geq -3 \\ x<8 \end{cases}$$

$x\in(2;8)$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3}-3=0 \\ \sqrt{x+3}-1=0 \\ \log_2(x-2)=0 \\ 2^x-16=0 \\ 2^x-8=0 \\ \log_2(8-x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-2 \\ x=3 \\ x=4 \\ x=3 \\ x=7 \end{array}\right.$$

$-$ $+$ $+$ $-$ $+$ $-$ $+$

2 3 4 6 7 8 x

$x\in(2;3)\cup(3;4)\cup[6;7)$

Ответ: $x\in(2;3)\cup(3;4)\cup[6;7)$

12

№4

$x^2+y^2+8(y-x)+7\leq 0$

$(x-4)^2+(y+4)^2\leq 25$

$O(4;-4)$ $R=25$

$y+|x-5|+4\leq 0$

	A	B	C
x	5	8	1
y	-4	-7	-8

$S = ?$

$BC = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2}$

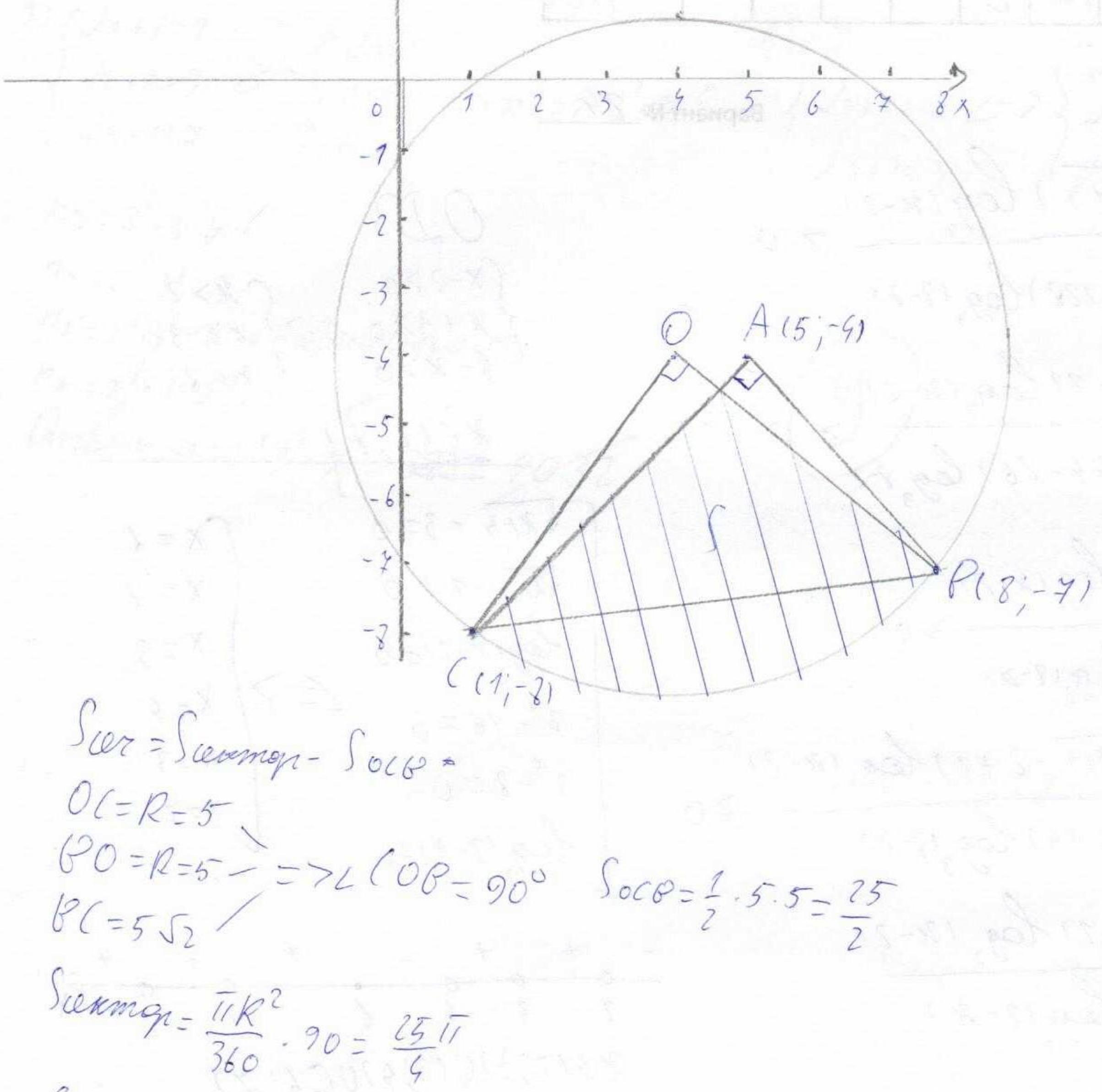
$AC = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

$AB = 3\sqrt{2}$

$BC^2 = AC^2 + AB^2$

$50 = 32 + 18 \Rightarrow \angle CAB = 90^\circ$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 12$



$S_{сег} = S_{сектор} - S_{OCB}$

$OC = R = 5$

$BO = R = 5 \Rightarrow \angle COB = 90^\circ \quad S_{OCB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}$

$BC = 5\sqrt{2}$

$S_{сектор} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot 90 = \frac{25\pi}{4}$

$S_{сег} = S_{сектор} - S_{OCB} = \frac{25\pi}{4} - \frac{25}{2} = \frac{25}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

$S = S_{сег} + S_{ACB} = 12 + \frac{25}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

20

Ответ: $S = 12 + \frac{25}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

№5 $\begin{cases} \log_{|x-1|}(2a - ax) = 2\log_{|x-1|}(y-x) \\ \sqrt{x^2+2x+y-2} = x+1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a(2-x) = (y-x)^2 \ (1) \\ x^2+2x+y-2 = (x+1)^2 \ (2) \end{cases}$

ОДЗ

1. $|x-1| \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$, $x \neq 2$ 2. $a(2-x) > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a > 0 \\ x < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ x > 2 \end{cases}\end{array}\right.$ 3. $y - x > 0 \Rightarrow y > x$

$x \neq 1$

4. $x^2 + 2x + y - 2 \geq 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(y-2)}}{2} = -1 \pm \sqrt{3-y}$$

$x \leq -1 - \sqrt{3-y}$

$x \geq -1 + \sqrt{3-y}$

(2): $x^2 + 2x + y - 2 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow y = 3$

$-1 \leq x < 3$

$x \neq 0; 1; 2$

(1): $x^2 - 6x + ax + 9 - 2a = 0$

$x^2 - x(6-a) + 9 - 2a = 0$

$$x = \frac{6 - a \pm \sqrt{a^2 - 12a + 8a}}{2} = \frac{6 - a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$$

$a^2 - 4a > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a > 0 \\ a > 4 \end{array}\right.$

I случай

$a < 0 \Rightarrow x > 2$

$x < y \Rightarrow x \in (2; 3)$

$$2 < \frac{6 - a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2} < 3$$

Ответ: $a < 0$ $x = \frac{6 - a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$

5

II случай

$a > 4 \Rightarrow x < 2$

$x \neq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)$

$x = \frac{6 - a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$ $\varnothing$

$$\frac{6 - a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2} < 2$$

$x \neq 0 \Rightarrow \frac{6 - a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2} \neq 0 \Rightarrow a \neq 4,5$

Ответ: $a \in (4; 4,5) \cup (4,5; \cancel{\infty})$ $x = \frac{6 - a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$ 2 решения?

№1 Найдите наим. натур. число, имеющ. ровно 42 натур. делителя

$42 = 2\cdot 3\cdot 7$

$n = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot \cancel{7}^{\alpha_3}$ 5

$\tau(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1) = 2\cdot 3\cdot 7$

1) $\begin{cases}\alpha_1+1=2\\ \alpha_2+1=3\\ \alpha_3+1=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_2=2\\ \alpha_3=6\end{cases} \Rightarrow n_1 = 2\cdot 3^2\cdot 7^6$

2) $\begin{cases}\alpha_1+1=2\\ \alpha_2+1=7\\ \alpha_3+1=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_2=6\\ \alpha_3=2\end{cases} \Rightarrow n_2 = 2\cdot 3^6\cdot 7$

$n_3 = 2^2\cdot 3\cdot 7^6$

$n_4 = 2^2\cdot 3^6\cdot 7$

$n_5 = 2^6\cdot 3^2\cdot 7$ — наименьшее

$n_6 = 2^6\cdot 3\cdot 7^2$

Ответ: $n = 2^6\cdot 3^2\cdot \cancel{7}^{5} = \cancel{\;} \cancel{4032}$

9