Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

111481

Шифр ______________________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника ИВАНОВ ВСЕВОЛОД АЛЕКСЕЕВИЧ

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, № 1581

Регистрационный номер ШМ0508

Вариант задания 18

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника

С работой ознакомлен 16.03.18

$\Sigma = 56$ (пятьдесят шесть) ...

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
6	9	16	20	5	–					56

111481

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

111481

181

Вариант № 13

№1

Кол-во способов прозрачной укладки можно выразить как:

1) $n_{проз} = N - n_{непроз}$ (N – общее кол-во всех способов, $n_{непр}$ – кол-во непрозрачных укладок)

2) $N = 4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4 = 4^5 = 1024 = 16\cdot 64$? $5!\cdot 4^4$

3) $n_{непроз}$: Рас-им случаи, когда стопка непрозрачна $\Rightarrow$ в 4 слоях закрашены разные стороны, а в 5-м закрашеная сторона уже закрашена в другом слое; рассмотрим варианты с 5-м слоем. Пусть этим слоем будет:

1-й сверху: $n_5 = 4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot(1+1+1+1) = 4\cdot 24$ для первых 4-х слоёв

2-й сверху: $n_4 = 4\cdot3\cdot2\cdot1(1+1+1) = 3\cdot 24$ (т.к. случай, когда 1-й и 2-й сверху совпадает уже учтён)

3-й: $n_3 = 2\cdot 24$

4-й: $n_4 = 1\cdot 24$

5-й: $n_5 = 0\cdot 24 = 0$

(Аналогично с 2-м сверху слоем не учитываются уже существующие совпадения)

$\Rightarrow n_{непроз} = 24(4+3+2+1) = 24\cdot 10 = 8\cdot3\cdot2\cdot5 = 16\cdot 15 = 240$?

4) $n_{проз} = 16\cdot64 - 16\cdot15 = 16\cdot 49 = 784$

$\boxed{\text{Ответ: } \cancel{784}}$ 23520

6

№2

$\sin^4(2022x) + \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x) = 1$

1) $\sin^4(2022x) = (1-\cos^2(2022x))^2 = 1 - 2\cos^2(2022x) + \cos^4(2022x)$

$1 - 2\cos^2(2022x) + \cos^4(2022x) + \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x) = 1$

$\cos^2(2022x)\left(\cos^2(2022x) - 2 + \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x)\right) = 0$

1) $\cos^2(2022x) = 0$

$\cos 2022x = \pi k + \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2022}(k+\frac{1}{2}), k\in Z$

2) $\cos^2(2022x) + \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x) = 2$

$\Rightarrow \begin{cases}\cos^2(2022x) = 1\\ \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x) = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2022x = \pi k,\\ 2019x = \pi n\\ 2022x = \pi k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = \frac{\pi}{2022}\\ x = \frac{\pi}{2019}\end{cases}$?

$\begin{cases}k, n\in Z\\ \frac{\pi}{2\cdot3\cdot 674}k = \frac{\pi}{3\cdot 673}n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k, n\in Z\\ \frac{k}{674} = \frac{n}{673}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k/674\in Z\\ n/673\in Z\end{cases}$, Пусть $\begin{cases}l = \frac{1}{674}k\\ l = \frac{1}{673}n\end{cases} \Rightarrow l\in Z$

Тогда $x = \frac{\pi}{3}l$, $l\in Z$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2022}(k+\frac{1}{2}), k\in Z\\ x = \frac{\pi}{3}l, \ l\in Z\end{array}\right.$

9

№5

$6a+2ab\,tgx+2\sqrt{2(x-2b\,tgx+|x-2b\,tgx|)}=10+ax$

При $x-2b\,tgx<0 \Rightarrow b>\frac{x}{2tgx}$

$6a+2ab\,tgx=10+ax$

$b\cdot 2a\,tgx=ax+10-6a$

$b=\frac{x}{2tgx}-\frac{2(3a+5)}{2a\,tgx}$

$\frac{x}{2tgx}-\frac{3a+5}{a+tgx}>\frac{x}{2tgx}$

$\frac{3a+5}{a\cdot tgx}<0$. Т.к. tgx - периодичная функция, то у x больше 1 решения)

При $x-2b\,tgx\geq 0$

$6a+2ab\,tgx+4\sqrt{x-2b\,tgx}=10+ax$

$6a+4\sqrt{x-2b\,tgx}=10+a(x-2b\,tgx)$

$t=\sqrt{x-2b\,tgx}$, $t\geq 0$

$6a+4t=10+at^2$

$at^2-4t-(6a-10)=0$

Для 1 решения t $D=0 \Rightarrow 0=16+8a(3a-5)=8(3a^2-5a+2)$

расположение корней?

5

$a_1=1$ $\quad a_2=\frac{2}{3}$

$t_1=\frac{4}{2a_1}=2$ $\quad t_2=\frac{4}{2a_2}=\frac{4}{\frac{4}{3}}=3$

Т.к. $t=\sqrt{x-2b\,tgx}$. Т.к. tgx - периодичная ф-ия, то с ней у x о[...] бесконечность решений $\Rightarrow b=0$, тогда $t=\sqrt{x} \Rightarrow$ возможно 1 [...] при

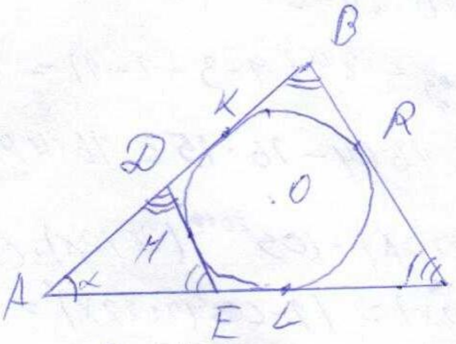
I) $2=\sqrt{x}$
$x=4$ $(a=1, b=0)$

II) $3=\sqrt{x}$
$x=9$ $(a=\frac{2}{3}, b=0)$

Ответ: $a=1;\ b=0;\ x=4$
$a=\frac{2}{3};\ b=0;\ x=9$

?

№3



Дано:
$\triangle ABC$
$BC=13$
$D\in AB$
$E\in AC$
$S_{ADE}=24$
BDEC - впис. и опис. чет-ик
AK - кас
$AK=12$
$(K\in(O\cap AB))$

$tg\angle A=?$

Решение:

1) BCDE - опис. чет-ик $\Rightarrow$
$\begin{cases}\angle B+\angle DEC=180^\circ\\ \angle BDE+\angle C=180^\circ\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\angle DEC=180^\circ-\angle B\\ \angle BDE=180^\circ-\angle C\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}\angle ADE=\angle C\\ \angle AED=\angle B\end{cases} \Rightarrow \triangle AED\sim\triangle ABC \Rightarrow \begin{cases}AD=kAC\\ AE=kAB\\ DE=kBC\end{cases}$, k - коэфф. по[добия]

2) BCDE - опис. чет-ик $\Rightarrow DB+EC=BC+DE$

$\Rightarrow (AB-AD)+(AC-AE)=BC+kBC$

$AB(1-k)+AC(1-k)=BC(k+1)$

$AB+AC=BC\frac{k+1}{1-k}$

3) Пусть $L=AC\cap O \Rightarrow AK=AL$

$M=DE\cap O$

$R=BC\cap O$

4) Т.к. $BCED$ – ~~впис~~ опис. чет-ик

$$\begin{cases} DH = DK = AK - AD \\ HE = EL = AK - EL \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &DE = DH + HE = 2AK - k(AB+AC) \\ &\underline{kBC = 2AK - k(AB+AC)} \end{aligned}$$

5) Т.к. $BCED$ – опис. чет-ик:

$$\begin{cases} BR = KB = AB - AK \\ RC = LC = AC - AK \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &BC = BR + RC = AB + AC - 2AK \\ &\underline{AB + AC = BC + 2AK} = 18 + 24 = 42 \end{aligned}$$

6) $kBC = 2AK - k(BC + 2AK)$

$2k(BC + AK) = 2AK \Rightarrow k = \frac{AK}{BC+AK} = \frac{12}{18+12} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{k = \frac{2}{5}}$

7) $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = $ k^2

8) $S_{ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot AE \cdot \sin A$

$\sin A = \frac{2S}{AD \cdot AE}$

$$\Rightarrow \underline{tgA} = \frac{\frac{2S}{k^2 AB \cdot AC}}{\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB \cdot AC}} = \underline{\frac{4S}{k^2(AB^2+AC^2-BC^2)}}$$

9) $P_{ADE} = \frac{AD+DE+AE}{2} = \frac{k}{2}(AB+BC+AC) = \frac{k}{2}(42+18) = 30k = p$

$S = \sqrt{30k(30k - kAB)(30k - kAC)(30k - kBC)}$

$S = k^2 \sqrt{30 \cdot 12 (30 - AB)(30 - AC)}$

$S = 6k^2 \sqrt{10(30-AB)(30-AC)}$

$\frac{24}{6 \cdot \frac{4}{25}} = \sqrt{10(30-AB)(30-AC)}$

$25^2 = 10(900 - 30(AB+AC) + AB \cdot AC)$

$\frac{125}{2} = 900 - 30 \cdot 42 + AB \cdot AC$

$AB \cdot AC = \frac{125}{2} + 30 \cdot 12$

$2AB \cdot AC = 125 + 60 \cdot 12 = 5(25 + 144) = 169 \cdot 5$

10) $AB^2 + AC^2 = (AB+AC)^2 - 2AB \cdot AC = 42^2 - 169 \cdot 5$

$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 42^2 - 18^2 - 13^2 \cdot 5 = 60 \cdot 24 - 13^2 \cdot 5 = 595 = 5 \cdot 119$

11) $tgA = \frac{4 \cdot 24 \cdot 25}{4(5 \cdot 119)} = \frac{24 \cdot 5}{119} = \frac{120}{119} = 1\frac{1}{119}$

Ответ: $1\frac{1}{119}$

$\frac{42}{161}$

$\begin{array}{r} 24 \\ \times 60 \\ \hline 1440 \end{array}$

16

№4

Иссл-ем ф-цию $y(x) = \frac{4}{x^2 - 4x + 6} = \frac{4}{(x-2)^2 + 2}$

~~минимальное $y(x)$ получается при $(x-2)^2$~~

максимальное $y(x)$ получается при $(x-2)^2 + 2 = min \Rightarrow x = 2$;

$(2-2)^2 + 2 = 2 \Rightarrow y(2) = \frac{4}{2} = 2$ – y_{max}

Сравним $\frac{3}{4} y\left(\frac{y(x)}{2}\right)$ и $12\, y(y^3(x))$. Т.к. во второй ф-ции аргумент всегда больше, чем в 1-й, то $19 y(y^3(x)) - \frac{3}{4} y\left(\frac{y(x)}{2}\right)$ будет минимальна при $y(x) = max$

20

Ф-ия $\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{g(x)}}$ обратно пропорциональна $g(x) \Rightarrow \sqrt{2-\frac{2}{g(x)}} = max$ при $g(x)$

$\Rightarrow \cancel{x} \in 2 \Rightarrow g(x) = 2$

$\frac{3}{4} g\left(\frac{g(2)}{2}\right) + \sqrt{2-\frac{2}{g(2)}} \geq 19\, g(g^3(2))$

$\frac{3}{4} g(1) + \sqrt{2-1} \geq 19\, g(8)$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} + 1 \geq 19 \cdot \frac{2}{19}$

$1+1 \geq 2$

$2 \geq 2 \Rightarrow$ Ответ: $x \in \{2\}$