Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

111057

Шифр ____________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Панкратов Сергей Андреевич

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Иваново, МБОУ "Лицей №33"

Регистрационный номер ШМ4444

Вариант задания 20

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

44 (сорок четыре) Гкоб

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
~~8~~	12	0	20	0	0					44
~~8~~ 12										

Шифр 111057

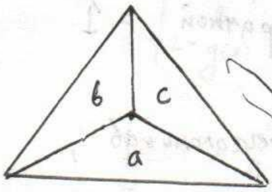
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

111057

1057

Вариант № 20

1.



Разделим стопку на 3 части и назовём их a, b, c (как показано на рисунке)

Вероятность того, что в 1 треугольнике часть a прозрачная равна $\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ Вероятность того, что во всей стопке часть a прозрачная $=\left(\frac{2}{3}\right)^5$

Аналогично для части b и c.

Причём вероятность того, что одновременно части a и b в стопке прозрачные равна вероятности того, что только часть c - непрозрачная $=\left(\frac{1}{3}\right)^5$

Аналогично для (a и c) и (b и c)

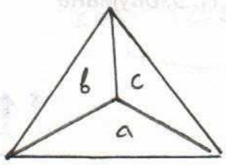
$\Rightarrow$ Вероятность того, что хотя бы 1 из частей прозрачна

равна $3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{31}{3^4}=\frac{31}{81}=\frac{93}{243}$, т.к. всего способов выложить треугольники ~~[illegible]~~, $3^4=81$

~~Ответ~~: ~~[illegible]~~ то $\frac{93}{243}\cdot$ ~~[illegible]~~ 81 $=$ ~~[illegible]~~ 31 способов выложить треугольники так, чтобы стопка в итоге оказалась частично прозрачной

Ответ: ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

1.



Найдём количество различных вариантов укладки стёкол в стопку, чтобы стопка оказалась хотя бы частично прозрачной в вертикальном направлении без учёта цветов закрашенных частей треугольников.

Пусть а, в, с – одинаковые части стопки.
(см. рисунок вид сверху)

Тогда количество вариантов поворотов треугольников так, чтобы часть а была прозрачной $= 2^5$

Аналогично для частей в и с.

Причём количество вариантов поворотов треугольников так, чтобы и часть а, и часть в были прозрачной $= 1$

Аналогично для а и с, в и с.

Тогда количество вариантов поворотов треугольников, удовлетворяющих условию задачи $= (3 \cdot 2^5 - 3 \cdot 1) : 3$

(Делим на 3, т.к. поворот всей стопки на 120° равносилен повороту каждого треугольника на 120° (по и против часовой стрелки $\Rightarrow$ лишь $\frac{1}{3}$ полученных вариантов различна)

$2^5 - 1 = 31$

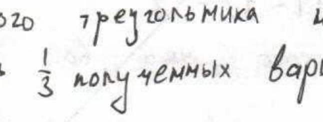
Т.к. все треугольники имеют различные цвета, то $(2^5-1) \cdot 5!$ – количество искомых вариантов.

$31 \cdot 120 = 3720$

Ответ: 3720

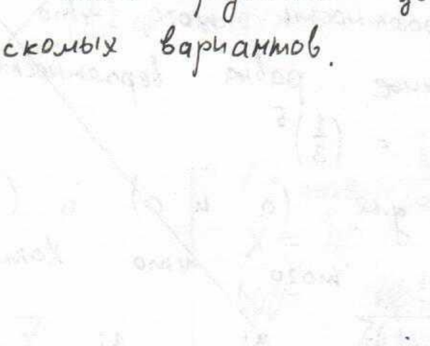
4. Рассмотрим $g(x) = \dfrac{9}{x^2-6x+12}$ $D(g): \mathbb{R}$ $E(g)$: $g \in (0; 3]$

$g' = \dfrac{-9(2x-6)}{(x^2-6x+12)^2}$



Нули: $x = 3$

$D(g)$: $x \in \mathbb{R}$



ОДЗ: $2 - \frac{3}{g(x)} \geq 0$

$g(x) \geq \frac{3}{2}$

$x^2 - 6x + 6 \leq 0$ $\qquad$ $+ \quad - \quad +$; $3-\sqrt{3}$, $3+\sqrt{3}$, x

$x \in (3-\sqrt{3}; 3+\sqrt{3})$

$k = \frac{g(x)}{3} \in [\frac{1}{2}; 1]$

$g(k) \in [\frac{36}{37}; \frac{9}{7}]$ $\qquad$ $\frac{7}{9} g(k) \in [\frac{4}{259}; 1]$

$2\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}} \in [0; 2]$

$g(x) \in [\frac{3}{2}; 3]$

$g^2(x) \in [\frac{9}{4}; 9]$

$g(g^2(x)) \in [\frac{9}{39}; 3]$

$13g(g^2(x)) \in [3; 39]$

$$\underbrace{\frac{7}{9} g\left(\frac{g(x)}{3}\right)}_{\leq 1} + \underbrace{2\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}}}_{\leq 2} \geq \underbrace{13 g(g^2(x))}_{\geq 3}$$

$$\frac{7}{9} g\left(\frac{g(x)}{3}\right) + 2\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}} = 13 g(g^2(x))$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}} = 2 \\ \frac{7}{9} g\left(\frac{g(x)}{3}\right) = 1 \\ 13 g(g^2(x)) = 3 \end{cases}$$

$g(x) = 3$

$\frac{9}{x^2 - 6x + 12} = 3$ $\qquad$ k4

$x^2 - 6x + 12 = 3$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x-3)^2 = 0$

$x = 3$

Ответ: $\underline{3}$

2. $\sin^4(2019x) + \cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2018}(2019x) = 1$

$$\underbrace{\cos^{2019}(2022x)\cos^{2018}(2019x)}_{\geq 0} = \underbrace{1-\sin^4(2019x)}_{\geq 0} = \cos^4(2019x) + 2\sin^2(2019x)\cos^2(2019x)$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(2022x) \geq 0$$

$$\underbrace{2\sin^2(2019x)\cos^2(2019x)}_{\in[0;2]} = \underbrace{\underbrace{\cos^4(2019x)}_{\in[0;1]}\underbrace{\left(\cos^{2019}(2022x)\cos^{2014}(2019x)-1\right)}_{\in[-1;0]}}_{\in[-1;0]}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\sin^2(2019x)\cos^2(2019x)=0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos^4(2019x)=0 \\ \underbrace{\cos^{2019}(2022x)\cos^{2014}(2019x)}_{\in[0;1]}=1 \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 4\sin^2(2019x)\cos^2(2019x)=0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos^4(2019x)=0 \\ \left\{\begin{array}{l} \cos^{2019}(2022x)=1 \\ \cos^{2014}(2019x)=1 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sin^2(4038x)=0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos(2019x)=0 \\ \left\{\begin{array}{l} \cos(2022x)=1 \\ \cos(2019x)=\pm 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \sin(4038x)=0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos(2019x)=0 \\ \left\{\begin{array}{l} \cos(2022x)=1 \\ \cos(2019x)=\pm 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\pi n}{4038} \\ x=\frac{\pi}{4038}+\frac{\pi m}{2019} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\pi n}{4038} \\ x=\frac{\pi m}{1011} \\ x=\frac{\pi k}{2019} \end{array}\right. \end{array}\right. \quad k, m, n \in \mathbb{Z} \qquad \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4038}+\frac{\pi n}{2019} \\ x=\frac{\pi n}{3} \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}$$

, где

Ответ: $x = \frac{\pi}{4038} + \frac{\pi n}{2019}$; $x = \frac{\pi n}{3}$