Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

111546

+ 1 лист

Шифр ______________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Тяпкина Анна Михайловна

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, школа „Интеграл"

Регистрационный номер ШМ 5635

Вариант задания 18

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника

$\Sigma = 55$ (пятьдесят пять) [illegible]

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
6	9	–	20	–	20					55

111546

Шифр ______

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 18

№ 4.

$$\frac{3}{4}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)+\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}\geq 19g(g^3(x))$$

Рассмотрим функции:

$$y_1(x)=\frac{3}{4}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)+\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}$$

$$y_2(x)=19g(g^3(x))$$

20

Исследуем $y_1(x)$:

$$\frac{g(x)}{2}=\frac{2}{x^2-4x+6}=\frac{2}{(x-2)^2+2}\in(0;1]$$ значение 1 достигается при $x=2$

$$g\left(\frac{g(x)}{2}\right)=\frac{4}{\left(\frac{g(x)}{2}-2\right)^2+2}\in\left(\frac{4}{6};\frac{4}{3}\right]$$ значение $\frac{4}{3}$ достигается при $\frac{g(x)}{2}=1$, то есть ~~при~~ только при $x=2$.

Значит $\frac{3}{4}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)\in\left(\frac{1}{2};1\right]$ значение 1 достигается при $x=2$

$$\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}=\sqrt{2-\frac{x^2-4x+6}{2}}=\sqrt{1-\frac{(x-2)^2}{2}}\in[0;1]$$, значение 1 достигается при $x=2$

Исследуем $y_2(x)$

$$g^3(x)=\frac{64}{((x-2)^2+2)^3}\in(0;8]$$ значение 8 достигается при $x=2$.

$$g(g^3(x))=\frac{4}{((g^3(x))-2)^2+2)}\in\left[\frac{4}{38};2\right]$$ Значение $\frac{4}{38}$ достигается при $g^3(x)=8\Rightarrow$ при $x=2$

$19g(g^3(x)) \in [2; 38]$ значение 2 достигается при $x=2$

в итоге ~~имеется~~ имеем $y_1(x) \geqslant y_2(x)$ наше неравенство

$y_1(x) \leq 2$ $y_2(x) \geqslant 2$

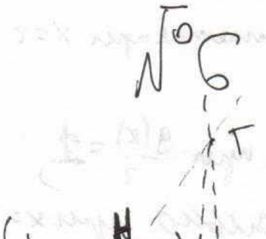
из полученных оценок выше

Значит если у неравенства есть решения, то они

должны удовлетворять $\begin{cases} y_2(x)=2 \\ y_1(x)=2 \end{cases}$

Из полученных ~~решения~~ оценок получаем, что неравенство имеет только одно решение при $x=2$

Ответ: [2]



1) Отметим точку H - середину B_1C_1 и точку N середину AC_1, пусть так же точка Q - центр симметрии $\square AA_1B_1B$, т.е. т. пересечения диагоналей п/у.

2). В $\triangle AC_1B_1$ NQ - ср.л. $\Rightarrow NQ \parallel C_1B_1$ и $NQ = \frac{C_1B_1}{2} = C_1H$

Значит C_1HQN - п/г по признаку $\Rightarrow C_1A \parallel HQ$

3) Значит наше сечение проходит через точки C; H; Q (чтобы быть параллельным AC_1).

Продлим CH до пересечения с B_1B и получившуюся точку назовем точкой T.

4) Затем в плоскости AA_1B_1B, соединим T и Q, продлим TQ до пересечения с A_1B_1 в точке L, а точку пересечения TL с AB назовем т. K.

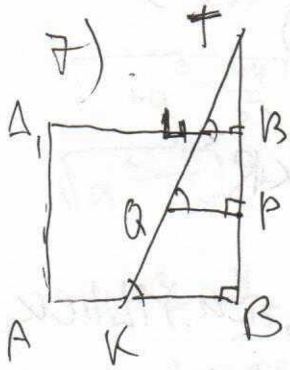
5) Соединим H и L, C и K.

Сечение HLKC построено и параллельно C_1A т.к. ~~сечение~~ содержит прямую $HQ \parallel C_1A$

6) $\angle C_1HC = \angle B_1HT$ (вертик.)
$C_1H = HB_1 = \frac{C_1B_1}{2}$
$\angle CC_1B_1 = \angle TB_1C_1 = 90°$
$\Rightarrow \triangle CC_1H = \triangle TB_1H$ (по признаку)

Значит: $CC_1 = TB_1$

7)



Построим $QP \perp B_1B$, P - середина B_1B, т.к. Q центр симметрии п/у A_1B_1BA

$\angle TB_1L = \angle TPQ = 90°$
$\angle PTQ$ - общий
$\Rightarrow \triangle TB_1L \sim \triangle TPQ$ по признаку

Значит: $\frac{LB_1}{QP} = \frac{TB_1}{TP} = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow LB_1 = \frac{4}{3}$

$QP = \frac{AB}{2} = 2$

аналогично $\angle TPQ = \angle TBA = 90°$
$\angle PTQ$ общий
$\Rightarrow \triangle TBK \sim \triangle TPQ$ по признаку

значит $\frac{KB}{QP} = \frac{TB}{TP} = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow KB = \frac{8}{3}$

$QP = 2$

8) Найдем HL по т. косинусов из $\triangle HB_1L$:

$HL^2 = HB_1^2 + LB_1^2 - 2HB_1 \cdot LB_1 \cdot \cos 60°$

$HL = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

9) Найдем: CK по т. косинусов из $\triangle CBK$:

$CK^2 = CB^2 + KB^2 - 2CB \cdot KB \cdot \cos 60^\circ$

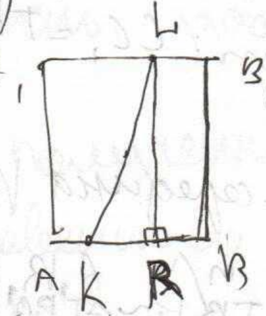
$CK = \frac{4\sqrt7}{3}$

10) Пусть высота призмы равна a, тогда по теореме Пиф для ΔCC_1H

$CC_1^2 + C_1H^2 = CH^3$

$CH^2 = 4 + a^2$

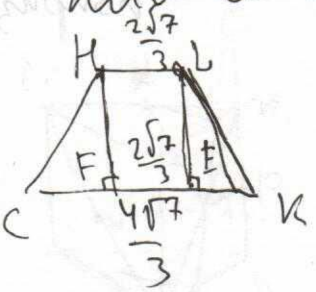
11)



Опустим из L перпендикуляр к AB (в точке R)
тогда LB, BR — $\pi/2$ по определению
ведь $LR \parallel B_1B$ и $LB_1 \parallel RB$)
Значит: $KR = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$
по т. Пифагора $KL^2 = LR^2 + KR^2$

$KL^2 = a^2 + \frac{16}{9}$

12) Вынесем сечение: (оно — трапеция, т.к. $HL \parallel CK$, ведь эти прямые — прямые пересечения параллельных плоскостей основания с плоскостью сечения).



Опустим высоты HF и LE.

$S_{CHLK} = \frac{HL + CK}{2} \cdot HL$

$\frac{12}{\sqrt5} = \frac{6\sqrt7}{6} \cdot HF \Rightarrow HF = \frac{12}{\sqrt{35}}$

$CF = \cos\angle C \cdot HL = \sqrt{1 - \sin^2\angle C} \cdot HC = \sqrt{1 - \frac{144}{35 \cdot HC^2}} \cdot HC$

аналогично $EK = \sqrt{1 - \sin^2\angle C} \cdot KL = \sqrt{1 - \frac{144}{35 \cdot KL^2}} \cdot KL$

$CF + FE + EK = CK$

~~Подставляем все полученные значения и~~
~~получаем, что CK = 28~~

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

111546

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 18

$\cancel{\sqrt{HC^2-\frac{144}{35}}+\frac{2\sqrt{7}}{3}+\sqrt{\quad}+8}$

$\sqrt{HC^2-\frac{144}{35}}+\frac{2\sqrt{7}}{3}+\sqrt{KL^2-\frac{144}{35}}=\frac{4\sqrt{7}}{3}$

$\sqrt{4+a^2-\frac{144}{35}}+\sqrt{\frac{16}{9}+a^2-\frac{144}{35}}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

$\sqrt{a^2-\frac{4}{35}}+\sqrt{a^2+\frac{16\cdot 35-9\cdot 144}{9\cdot 35}}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

$2a^2-\frac{4}{35}-\frac{28}{9}-\frac{736}{9\cdot 35}=2\sqrt{\left(a^2-\frac{4}{35}\right)\left(a^2-\frac{736}{9\cdot 35}\right)}$

$2a^2-\frac{584}{105}=2\sqrt{\left(a^2-\frac{4}{35}\right)\left(a^2-\frac{736}{9\cdot 35}\right)}$

$a^4-2a^2\cdot\frac{292}{105}+\left(\frac{292}{105}\right)^2=a^4-\frac{4}{35}a^2-\frac{736}{9\cdot 35}a^2+\frac{4}{35}\cdot\frac{736}{9\cdot 35}$

$a^2\left(\frac{584}{105}-\frac{4}{35}-\frac{736}{9\cdot 35}\right)=\left(\frac{292}{9\cdot 35}\right)^2-\frac{4\cdot 736}{35^2\cdot 9}$

$a^2\cdot\frac{28}{9}=\frac{112}{5}$

$a^2=\frac{12}{5}$

$a=\frac{2}{5}\sqrt{15}$

13) $V_{CBKHB_1L}=V_{TCBK}-V_{THB_1L}=\frac{1}{3}TB\cdot S_{CBK}-\frac{1}{3}TB_1\cdot S_{HB_1L}=$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\sqrt{15}\cdot\frac{1}{2}\sin 60^\circ\cdot 4\cdot\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{15}}{9}\cdot\frac{1}{2}\sin 60^\circ\cdot 2\cdot\frac{4}{3}=\frac{28}{15}\sqrt{5}$

14) $V_{ABCA_1B_1C_1}=AA_1\cdot S_{ABC}=\frac{2}{5}\sqrt{15}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4\cdot 4=\frac{24\sqrt{5}}{5}$

15) $V_{AKKA_1C_1ML} = V_{ABCA_1B_1C_1} - V_{CBKMB_1L} = \frac{24\sqrt{5}}{5} - \frac{28\sqrt{5}}{15} = \frac{4}{5}\sqrt{5}(6-$

$= \frac{44}{15}\cdot\sqrt{5}$

20

Ответ: $\frac{28}{15}\sqrt{5}$ и $\frac{44}{15}\sqrt{5}$

№ 2.

$\sin^4(2022x) + \cos^{2017}(2019x)\cos^{2018}(2022x) = 1$

$\sin^4(2022x) + \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2018}(2022x) \leq \sin^4(2022x) + \cos^{2018}(2022x) \leq$

$\leq \sin^2(2022x) + \cos^2(2022x) \overset{=1}{}$ то есть если решения существуют, то в них ~~должно~~ ~~совпад~~ должны достигаться равенства в неравенствах выше

равенства в неравенствах:

$\sin^4(2022x) \leq \sin^2(2022x)$

$\cos^{2018}(2022x) \leq \cos^2(2022x)$ достигаются

только в случаях:

$\begin{cases} \sin(2022x) = \pm 1 \\ \cos(2022x) = 0 \end{cases}$ либо $\begin{cases} \cos(2022x) = \pm 1 \\ \sin(2022x) = 0 \end{cases}$

I случай:

$\sin(2022x) = \pm 1 \Rightarrow \cos^{2018}(2022x) = 0$

уравнение приобретает вид: $\sin^4(2022x) + 0 = 1$

$\sin^4(2022x) = 1$

$\sin(2022x) = \pm 1$

$2022x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$x = \frac{\pi}{4044} + \frac{\pi k}{2022}, k \in \mathbb{Z}$

II случай: $\cos(2022x) = \pm 1 \Rightarrow \sin(2022x) = 0$

уравнение приобретает вид:

$0 + \cos^{2017}(2019x) \cdot \cos^{2018}(2022x) = 1$

$\cos^{2017}(2019x) \cdot \cos^{2018}(2022x) = 1$

$\begin{cases} \cos^{2017}(2019x) = 1 \\ \cos^{2018}(2022x) = 1 \Rightarrow \cos(2022x) = \pm 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4038} + \frac{2\pi n}{2018}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi m}{2022}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$?

9

проверим, есть ли у этих серий общие решения.

$\frac{\pi}{4038} + \frac{2\pi n}{2019} = \frac{\pi m}{2022}$

$2019 + 8088n = 4038m \quad |:3$

$673 + 2696n = 1346m$

$673 = 2(673m - 1348n)$

Нет решений в целых числах (нечетное равно четному) ?

Ответ: $\frac{\pi}{4044} + \frac{\pi k}{2022}, k \in \mathbb{Z}$

№1.

Всего различных способов уложить 5 стекол в стопку с учетом поворотов

$5! \cdot 4^5$

Случаи которые не подходят:

если в каждом вертикальном направлении встречается хоть одно заштрихованное стекльшко сначала выберем в каком из четырех вертикальных направлений будут две закрашенные (в остальных по одной) части. выбираем из 4 случаев, теперь выберем в каких ~~случаях они будут~~ слоях они будут C_5^2 случаев, выберем какого они будут цвета $5 \cdot 4$.

Осталось три вертикальн. направления. Выбираем одно из них выберем слой из трех оставшихся, где закрашенная и выберем один из трех оставшихся цветов аналогично для двух оставшихся выбираем слой и цвет, тогда последний однозначно фиксирован

Теперь перемножим все, что учли, т.к выбор независим

$4 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 5! \, 4^2 \cdot 15$?

Итог: все случаи - плохие:

$5! \cdot 4^5 - 5! \cdot 4^2 \cdot 15 = 5! \cdot 4^2 (64 - 15) = 49 \cdot 4^2 \cdot 5!$ ← все ~~хорошие~~ подходящие случаи

Ответ: $49 \cdot 4^2 \cdot 5!$

6

23520