+1

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

111202

Шифр ______________________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Ахапкин Андрей Вячеславович

Город, № школы (образовательного учреждения) Раменское, „МОУ-Гимназия №2 г. Раменское", 11 класс

Регистрационный номер ШМ 5659

Вариант задания 20

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника Ахапкин

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

63 (шестьдесят три)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
12	9	16	20	5	0					63

Шифр 111202

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 20

4. $\frac{7}{9}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)+2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}} \geq 13\,g(g^2(x))$

$g(x)=\frac{9}{x^2-6x+12}$

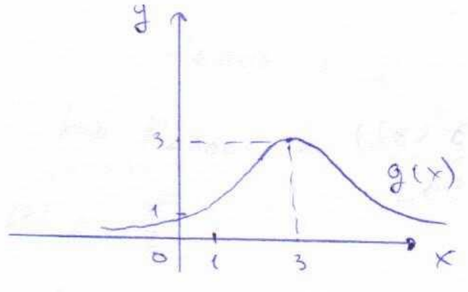
Рассмотрим функцию $g(x)$:

$D<0 \Rightarrow g(x)>0$

$g'(x)=-9\cdot\frac{2x-6}{(x^2-6x+12)^2}=\frac{-18(x-3)}{(x^2-6x+12)^2}$

$\overset{+}{\nearrow}\ 3\ \overset{-}{\searrow}$, max $\Rightarrow$ ~~максимальное~~ наибольшее значение принимает в $x=3$

$g(3)=\frac{9}{9-18+12}=3$



Рассмотрим множество значений каждого слагаемого в неравенстве:

1) $13\,g(g^2(x))$

$g(x)\in(0;3]$

$\Downarrow$

$g^2(x)\in(0;9]$

~~$g(g^2(x))\in($~~ ~~$g(g^2(x)$~~ $g(g^2(x))\in\left[\frac{9}{39};3\right]$

$g(9)=\frac{9}{81-54+12}=\frac{9}{39} \Rightarrow$

$g(0)=3$

$13\, g(g^2(x)) \in [3;\ 39]$

2. $\frac{7}{9}\, g\left(\frac{g(x)}{3}\right)$

$g(x) \in (0;\ 3]$

$\frac{g(x)}{3} \in (0;\ 1)$

$g\left(\frac{g(x)}{3}\right) \in \left[\frac{3}{4};\ \frac{9}{7}\right]$

$\frac{7}{9}\, g\left(\frac{g(x)}{2}\right) \in \left[\frac{7}{12};\ 1\right]$

3. $2\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}}$

$g(x) \in (0;3]$

$\frac{1}{g(x)} \in \left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$

$\frac{3}{g(x)} \in [1;\ +\infty)$

$-\frac{3}{g(x)} \in (-\infty;\ -1]$

$2 - \frac{3}{g(x)} \in (-\infty;\ 1]$

$\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}} \in [0;\ 1]$

$2\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}} \in [0;2]$

$$\frac{7}{9}\, g\left(\frac{g(x)}{3}\right) + 2\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}} \geq 13\, g(g^2(x))$$

$\left[\frac{7}{12};\ 1\right]$ $\qquad [0;\ 2]$ $\qquad [3;\ 39]$

Понимаем, что неравенство выполняется только когда левая и правая части равны, а это достигается при

$g(x) = 3$

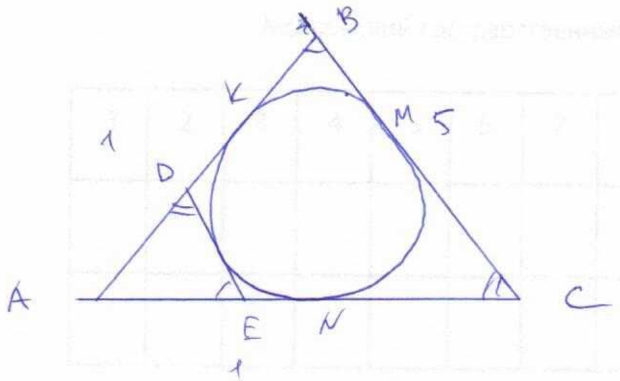
$\frac{9}{x^2 - 6x + 12} = 3$

$x^2 - 6x + 12 = 3$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x-3)^2 = 0 \qquad x = 3 \qquad$ Ответ: $x = 3$

3.



1) Обозначим точки касание с другими сторонами как M и N

2) Около BDEC можно описать окружность ⇒

$$\left.\begin{array}{l}\angle ABC + \angle DEC = 180^\circ \\ \angle BCA + \angle EDB = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\angle ABC = \angle AED \\ \angle BCA = \angle ADE\end{array} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

3) $AN = AK = 1$, $KB = BM$, $NC = MC \Rightarrow KB + NC = 5$

$P_{ABC} = AK + KB + BM + MC + CN + AN = 1 + 5 + 5 + 1 = 12$

4) в BDEC вписана окружность ⇒ $BC + DE = DB + EC$ ⇒

⇒ $DE = DB + EC - BC$

$DE = \cancel{DK + KB + EN +} AK - AD + KB + AN - AE + NC - BC$

$DE = 1 - AD + 5 - AE - 5 + 1$

$DE + AD + AE = 2$

$P_{\triangle ADE} = 2$

$\cancel{k=} P_{\triangle ABC} = k \cdot AD + k \cdot AE + k \cdot DE = k \cdot P_{\triangle DEA} \Rightarrow k = 6$

$DE = \frac{5}{6}$

5) $S_{ADE} = p r_{ADE}$

$\frac{1}{18} = 1 \cdot r_{ADE}$

$r_{ADE} = \frac{1}{18}$

$r_{ABC} = k r_{ADE} = \frac{1}{3}$

$S_{ABC} = p \cdot r_{ABC} = \frac{12}{2} \cdot \frac{1}{3} = 2$

6) Пусть ~~KB~~ $NC = x$, тогда $MC = x$, $BM = 5-x$, $KB = 5-x$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = 2$$

$$\sqrt{6\cdot(6-1-5+x)(6-5)(6-1-x)} = 2$$

$$\sqrt{6x(5-x)} = 2$$

$$6x(5-x) = 4$$

$$6x^2 - 30x + 4 = 0$$

$$3x^2 - 15x + 2 = 0$$

$$D = 225 - 24 = 201$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{201}}{6}$$, мы можем взять любой из x и поровнять к сторонам

$$AB = 6 - x = 6 - \frac{15+\sqrt{201}}{6} = \frac{21-\sqrt{201}}{6}$$

$$AC = 1 + x = 1 + \frac{15+\sqrt{201}}{6} = \frac{21+\sqrt{201}}{6}$$, если взять другой x, то значения поменяются местами, но для нахождения угла это не имеет значения.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC = 2$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{21-\sqrt{201}}{6}\right)\left(\frac{21+\sqrt{201}}{6}\right)\cdot\sin\angle BAC = 2$$

$$\frac{441-201}{72}\cdot\sin\angle BAC = 2$$

$$\frac{240}{72}\cdot\sin\angle BAC = 2$$

$$\sin\angle BAC = \frac{2\cdot 72}{240} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\angle BAC = \sqrt{1-\sin^2\angle BAC} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{3\cdot 5}{5\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

Ответ: $\frac{3}{4}$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 11/202

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 20

2. $\sin^4(2019x) + \cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2018}(2019x) = 1$

$\cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2018}(2019x) = 1-\sin^4(2019x)$

$\cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2018}(2019x) = \cos^2(2019x)\left(1+\sin^2(2019x)\right) \Leftrightarrow$

$\cos^2(2019x)\left(\cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2016}(2019x) - 1-\sin^2(2019x)\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos(2019x) = 0 \quad (1)\\ \cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2016}(2019x) - 1-\sin^2(2019x) = 0 \quad (2)\end{array}\right.$

(1)

$\cos 2019x = 0$

$2019x = \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

$x = \frac{\pi}{4038}+\frac{\pi k}{2019},\ k\in Z$

(2) $\cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2016}(2019x) - \sin^2(2019x) = 1$

$0 \le \sin^2 2019x \le 1$

$-1 \le \cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2016}(2019x) \le 1$

Равенство достигается только при $\sin^2(2019x) = 0$ и $\cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2016}(2019x) = 1$, ~~т.к~~

т.к $\sin^2 2019x = 0$, то $\cos 2019x = 1 \Rightarrow$ ~~cos 2022~~ $\cos 2022x = 1$

$\begin{cases}\sin 2019x = 0\\ \cos 2022x = 1\end{cases}$ $\begin{cases}x = \frac{\pi k}{2019},\ k\in Z\\ x = \frac{2\pi n}{2022},\ n\in Z\end{cases}$ $\begin{cases}x = \frac{\pi k}{2019},\ k\in Z\\ x = \frac{\pi n}{1011},\ n\in Z\end{cases}$

Пересекаются эти решения только в $x = \pi m,\ m\in Z$

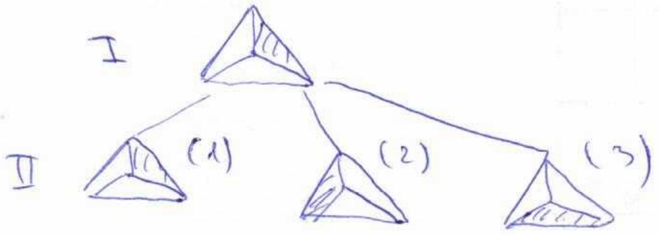
??

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4038}+\frac{\pi k}{2019},\ k\in Z\\ x = \pi m,\ m\in Z\end{array}\right.$

1. Для начала посчитаем количество способов, когда стекла раскрашивают в один цвет.

Мы ставим ~~верхнего~~ верхний кусок, и тогда рассматриваем несколько случаев.

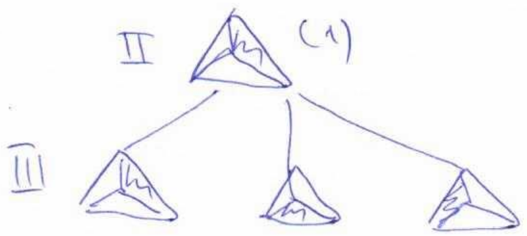
~~I, II~~ (римские цифры - уровни I верхний)



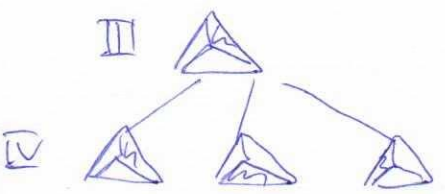
~~Обвер~~ Рассматриваем (2) и (3) случаи.

Нам нужно сделать так, чтобы ~~част~~ стопка была частично прозрачна. Тогда мы всегда одну часть стекла оставляем прозрачной и у нас есть две способа положить закрашенную часть. И ~~з~~ получается
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ способов

Рассматриваем (1) случай



Тогда, когда мы кладем закрашенную часть не прозрачную, у нас $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ способов (как в (2) и (3))



Здесь ~~в~~ когда кладем закрашенную часть на прозрачную, у нас $2 \cdot 2 = 4$ способов

И остается еще всего 3 способа для случая, когда мы 4 стекла положим ~~да~~ так, что закрашенные части были друг под другом.

Всего $16+8+4+3 = 31$ способ

~~Также мы можем верхнее верхнее стекло выбрать тремя старыми способами~~

~~Но в каждой такой стопке мы можем~~

Однако у нас все стекла разного цвета. И выбрать раскраску этой стопки мы можем $5!$ способами

Всего получается $31 \cdot 5!$ способ

~~В решении~~ В решении поворот верхнего стекла не дает новых способов укладки

Ответ: $31 \cdot 5! = ?$

5. $2a - ab\,ctg x + 2\sqrt{2(x+|x+b\,ctg x| + b\,ctg x)} = 6 + ax$

ОДЗ: $x \in R$

$2a - ab\,ctg x - ax + 2\sqrt{2(x+|x+b\,ctg x| + b\,ctg x)} = 6$

$a(2-(x+b\,ctg x)) + 2\sqrt{2(x+b\,ctg x + |x+b\,ctg x|)} = 6$

$x + b\,ctg x = t$

$a(2-t) + 2\sqrt{2(t+|t|)} = 6$

I $t<0$

$2a - at = 6$

$2 - t = \frac{6}{a}$

$t = 2 - \frac{6}{a}$

II $t>0$

$2a - at + 2\sqrt{4t} = 6$

$2a - at + 4\sqrt{t} = 6$

$at - 4\sqrt{t} + 6 - 2a = 0$

$\sqrt{t} = k$, $k>0$

$ak^2 - 4k + 6 - 2a = 0$

$\frac{D}{4} = 4 - a(6 - 2a) = 4 - 6a + 2a^2$

$\cancel{4a^2 - 6a + 2 \geq 0}$

$\cancel{2a^2 - 3a + 1 \geq 0}$

$2a^2 - 6a + 4 \geq 0$

$a^2 - 3a + 2 \geq 0$

$1 \quad 2 \quad a$

$k = \dfrac{2 \pm \sqrt{2a^2 - 6a + 4}}{a}$

$t = \dfrac{\left(2 \pm \sqrt{2a^2 - 6a + 4}\right)^2}{a^2}$, но $t < 0$

$\cancel{\begin{cases} t \geq 0 \\ t = 2 - \frac{6}{a} \end{cases}}$

~~$t < 0$~~

~~$t = 2 \pm \sqrt{2a^2 - 6a}$~~

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t < 0 \\ t = 2 - \frac{6}{a} \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} t \geq 0 \\ t = \dfrac{\left(2 \pm \sqrt{2a^2 - 6a + 4}\right)^2}{a^2} \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

(1) $2 - \frac{6}{a} < 0$

$\frac{6}{a} > 2$

$a < 3$

(2) $a \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$