Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1 Ихм

+1 Ихм

111436

Шифр ____________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Вожга Игорь Михайлович

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, лицей 1580, 11 М

Регистрационный номер ШМ 5055

Вариант задания 19

Дата проведения "11" марта 20 18 г.

Подпись участника ____________________

58 (пятьдесят восемь)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	9	16	20	10	0					58

111436

Шифр ____________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

№3 Дано:

$\triangle ABC$

$S_{ADE} = \frac{8}{3}$

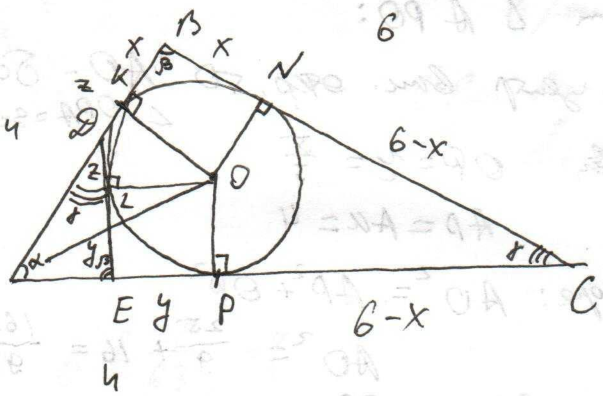
$AK = 4$

$BC = 6$

$\angle BAC = \alpha$

$\angle ABC = \beta$

$\angle ACB = \gamma$



Решение:

Рассмотрим $\triangle ABC$: Пусть вписанная в $BDEC$ окружность касается сторон AB, BC, AC, DE в точках: K, N, P, L соответственно, а $KB = x$, то

По теореме о двух касательных, проведённых из одной точки:

$AP = AK = 4$

$BK = BN = x$

$BC = 6$

$NC = PC = 6 - x$.

$$P_{ABC} = \frac{4 + x + x + 6 - x + 6 - x + 4}{2} = 10.$$

$AD = 4 - z$; $AP = 4 - y$

Пусть $DK = z$; $EP = y$, то $DE = DL + LE = z + y$

$$P_{ADE} = \frac{4 + 4 - z - y + z + y}{2} = 4.$$

Так как около $BDEC$ можно описать окружность, то:

$\angle ADE = 180 - \angle BDE = 180 - 180 + \angle ACB = \gamma$

$\angle AED = \beta$

Тогда $\triangle ABC \sim \triangle AED$ по двум углам.

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{P_{AED}}{P_{ABC}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

То $S_{ABC} = \frac{25}{4} S_{AED} = \frac{25}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{50}{3}$

№3 (продолжение): (O, r)

Т.к. Окружность, вписанная в $\triangle DEC$ касается сторон ~~AB~~, AB, BC, AC, то она является вписанной в $\triangle ABC$, отсюда:

$$S_{ABC} = p_{ABC} \cdot r$$

$$\frac{50}{3} = 10 \cdot r$$

$$r = \frac{5}{3}$$

Рассмотрим $\triangle APO$:

Т.к. О — центр вп. окр, то АО — биссектриса $\angle BAC \Rightarrow \angle PAO = \frac{\alpha}{2}$.

$\angle OPA = 90°$

~~AO~~ $OP = r = \frac{5}{3}$

$AP = AK = 4$

По т. Пифагора: $AO^2 = AP^2 + OP^2$

$$AO^2 = \frac{25}{9} + 16 = \frac{169}{9} \Rightarrow AO = \frac{13}{3}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{OP}{AO} = \frac{5}{13} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AP}{AO} = \frac{12}{13}$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{120}{169}$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{50}{169} = \frac{119}{169}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\angle BAC = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{120}{119}$$

Ответ: $\frac{120}{119} = \operatorname{tg}\angle BAC$

16

№4 | Решим неравенство:

$$\frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{2}\right) + \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} \geqslant 13g(g^3(x))$$

$$g(x) = \frac{6}{x^2 - 4x + 7}$$

ОДЗ: $2 - \frac{2}{g(x)} \geqslant 0$

$g(x) \geqslant 1$ т.к. т.к. подкоренное выражение.

Введём функцию:

$g(x) = \frac{6}{x^2-4x+1}$ $p(x) = x^2 - 4x + 7$, то: $x_в = 2$

$E_p = [3; \infty)$ $p_в = 3$.

Тогда $g(x) = \frac{6}{p(x)}$

$g(p) = \frac{6}{p}$

$D_g = E_p = [3;\infty) \Rightarrow E_g = (0;2]$

Учитывая ОДЗ: $E_g = [1;2]$.

Тогда: Найдём область значений некоторых функций:

тогда в силу монотонности функций область определения функции будет совпадать с областью значений функции, выступающей в роли аргумента

(Если $f(g) = g(x)$, то $D_f = E_g$)

1) $f(x) = \frac{g(x)}{2}$

$E_f = [\frac{1}{2};1]$

$l(g) = g(f) = g(\frac{g(x)}{2})$ $\quad g(1) = \frac{6}{1-4+7} = \frac{3}{2}$

$D_e = E_f = [\frac{1}{2};1]$ $\quad g(\frac{1}{2}) = \frac{24}{21}$

$E_e = [\frac{24}{21};\frac{3}{2}]$

$k(l) = \frac{2}{3}e$

$E_k = [\frac{48}{63};1]$

тогда $k(x) = \frac{2}{3}g(\frac{g(x)}{2}) \in [\frac{48}{63};1]$

2) $m(g) = \frac{2}{g(x)}$

$D_m = E_g = [1;2]$

$E_m = [1;2]$

$n(m) = 2 - m = 2 - \frac{2}{g(x)}$

$D_n = E_m = [1;2]$

$E_n = [0;1]$

$r(n) = \sqrt{n}$

$D_r = E_n = [0;1]$

$E_r = [0;1]$

т.е. $\sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} \in [0;1]$

3) $s(g) = (g(x))^3$

$D_s = E_g = [1;2]$

$E_s = [1;8]$

$t(s) = g(s)$

$D_t = E_s = [1;8]$

$E_t = [\frac{2}{13};\frac{3}{2}]$ $\quad g(1) = \frac{3}{2}$

$g(8) = \frac{6}{39} = \frac{2}{13}$

$u(t) = 13t$

$D_u = E_t = [\frac{2}{13};\frac{3}{2}]$

$E_u = [2;\frac{39}{2}]$

т.е. $13g(g^3(x)) \in [2;\frac{39}{2}]$

+.

Заметим, что в силу полученных областей значений функций неравенство будет выполняться только тогда:

$\frac{2}{3}g(\frac{g(x)}{2}) = 1$ $\quad 13g(g^3(x)) = 2$

$\sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} = 1$

Пусть:

$t = g(x) \quad t \in [1;2]$

$p = t^3$, то: $p \in [1;8]$

$$\frac{2}{3} g\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{\frac{t^2}{4} - 2t + 7} = 1$$

$$\frac{16}{t^2 - 8t + 28} = 1$$

$t^2 - 8t + 28 = 16$

$t^2 - 8t + 12 = 0$

$D_1 = 16 - 12 = 4$

$t = \frac{4 \pm 2}{1}$

$\underline{t = 6}$ $\quad \underline{t = 2}$

пост. корень

$$\sqrt{2 - \frac{2}{t}} = 1$$

$2 - \frac{2}{t} = 1$

$\underline{t = 2}$

$$\frac{13 \cdot 6}{p^2 - 4p + 7} = 2$$

$39 = p^2 - 4p + 7$

$p^2 - 4p - 32 = 0$

$D_1 = 4 + 32 = 36$

$p = 2 \pm 6$

$\underline{p = 8}$ $\quad p = -4$

пост. корень

$t^3 = 8$

$t = 2$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) = 1 \\ \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} = 1 \\ 13\, g((g(x))^3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow g(x) = 2$$

$$\frac{6}{x^2 - 4x + 7} = 2$$

$3 = x^2 - 4x + 7$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x = 2$

Ответ: $x \in \{2\}$.

20

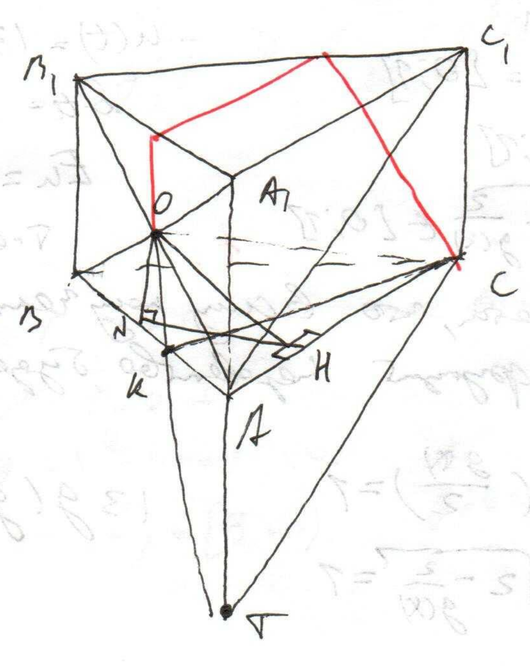
№6

$ABCA_1B_1C_1$

$A_1 \ \alpha$

$S_{сеч} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$AB = Ca = 4$



Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

111436

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

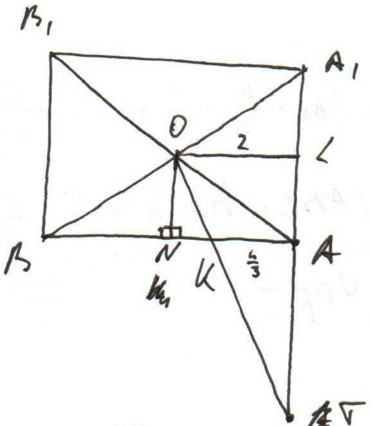
Вариант № 19

№ 6 (продолжение):

1) Построим сечение:

из точки C проведём $CT \parallel AC_1$, то $CT \cap AA_1 = T$, причём $AT = AA_1$

2) Рассмотрим плоскость (ABB_1):



Обозначим $AA_1 = h$, то:

$OL = 2$

$TL = \frac{3}{2}h$

$AT = h$

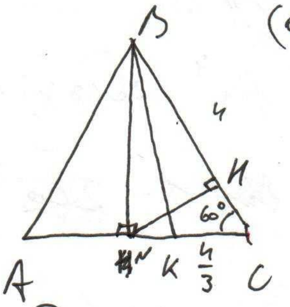
$\triangle AKT \sim \triangle LOT$:

$$\frac{AK}{OL} = \frac{AT}{LT} = \frac{h}{\frac{3}{2}h} = \frac{2}{3}$$

$AK = \frac{4}{3}$ +. Тогда (OKC) — искомое сечение, т.к. $O \in (OKC)$, $C \in (OKC)$, $(OKC) \parallel (AC_1)$

неверно!

3) Рассмотрим плоскость (ABC):



т.к. ABC — равносторонний, то:

$BC = 4$

$\angle K\cancel{BA}CB = 60^\circ$

$KC = \frac{4}{3}$

$$S_{пр} \neq S_{\triangle KBC} = \frac{1}{2} \cdot KC \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

0

4) Из точки O опустим $ON \perp AB$, где $N = Пр^{\perp}_{ABC} O$

проведём $(NH) \perp (AC)$, тогда $NH = Пр^{\perp}_{ABC} OH$

т.к. $\triangle NOH$ — ортогональный, отсюда: $\angle((ABC); \alpha) = \angle NHO = \angle\varphi$

$NH = \frac{1}{2} BN = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ по т. Пифагора: $OH = \sqrt{3 + \frac{h^2}{4}}$ $\cos\angle\varphi = \frac{NH}{OH} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 + \frac{h^2}{4}}}$

$ON = \frac{AA_1}{2} = \frac{h}{2}$

Тогда

$$S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\angle\varphi}$$

$$\frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3+\frac{h^2}{4}}}{3\cdot\sqrt{3}}$$

$$\frac{27}{4\sqrt{5}} = \sqrt{3+\frac{h^2}{4}}$$

$$\frac{27^2}{80} = 3+\frac{h^2}{4}$$

$$\frac{729 - 240}{80} = \frac{h^2}{4}$$

$$\frac{489}{20} = h^2$$

$$h = \frac{\sqrt{489}}{2\sqrt{5}}$$

$$\begin{array}{r|l} 489 & 3 \\ 163 & \end{array}$$

Тогда

$$V_{OKCA} = S_{пр}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{163}}{3\cdot3\cdot2\cdot2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{163}}{3\sqrt{5}} \text{ ед}^3$$

$$V_{призм} = S_{ABC}\cdot h = \frac{1}{3}h\cdot\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}h\cdot 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{489}}{2\sqrt{5}} = \frac{4\cdot\sqrt{163}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{163}}{\sqrt{5}} \text{ ед}^3$$

$$V_2 = V_{пр} - V_{OKCA} = \frac{\sqrt{163}}{\sqrt{5}}\left(2-\frac{1}{3}\right) = \frac{5\sqrt{163}}{3\sqrt{5}} \text{ ед}^3$$

Ответ: $V_1 = \frac{\sqrt{163}}{3\sqrt{5}}$ ед^3; $V_2 = \frac{5\sqrt{163}}{3\sqrt{5}}$ ед^3.

№2 Реш. урав:

$$\sin^4(2016x) + \cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2018}(2016x) = 1$$

$$1 - 2\cos^2(2016x)\cdot\underbrace{\sin^2(2016x)}_{=\sin^2(2016x)} - \cos^4(2016x) + \cos^{2017}(2025x)\cos^{2018}(2016x) = 1$$

$$\cos^2(2016x)\left(\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x) - 2\sin^2(2016x) - \cos^2(2016x)\right) = 0$$

$$\cos(2016x) = 0$$

$$\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x) = 1+\sin^2(2016x)$$

т.к. $1+\sin^2(2016x) \geq 1$

$\cos^{2017}(2025x)\cos^{2016}(2016x) \leq 1$, то:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos^{2017}(2025x)=1\\ \cos^{2016}(2016x)=1\end{cases}\\ \cos(2016x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos(2025x)=1\\ \cos 2016x=-1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 2025x=1\\ \cos 2016x=1\end{cases}\\ \cos 2016x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{2\pi n}{2025}\\ x=\dfrac{2\pi k}{2016}+\dfrac{\pi}{2016}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{2\pi m}{2025}\\ x=\dfrac{2\pi l}{2016}\end{cases}\\ x=\dfrac{\pi}{4032}+\dfrac{\pi d}{2016}\end{array}\right. \text{, где } n,k,m,l,d\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{2\pi n}{2025}=\frac{2\pi k}{2016}+\frac{\pi}{2016}$$

$$\frac{2n}{2025}=\frac{2k}{2016}+\frac{1}{2016}$$

$$\frac{2n}{2025}=\frac{2k+1}{2016}$$

$n=2025s$ ~~$2k+1=2\cdot2016s$~~ $k=2016s-\frac{1}{2}$

поэт. $k\in\mathbb{Z}$, то $\frac{2\pi n}{2025}\neq\frac{2\pi k}{2016}+\frac{\pi}{2016}$

$$\frac{2\pi m}{2025}=\frac{2\pi l}{2016}$$

$m=2025r$

$l=2016r$

есть общие

Ответ: $\left\{2\pi r;\ \frac{\pi}{4032}+\frac{\pi d}{2016}\right\}$, где $r;d\in\mathbb{Z}$

9

$\frac{2\pi m}{2025}=\frac{2\pi k}{2016}=2\pi r$

$k=2025r$

$l=2016r$

№5) $8a+3ab\operatorname{ctg}x+2\sqrt{2(x+|x-3b\operatorname{ctg}x|-3b\operatorname{ctg}x)}=12+ax$

1) $x-3b\operatorname{ctg}x\geq0$

$$4\sqrt{x-3b\operatorname{ctg}x}=12+ax-8a-3ab\operatorname{ctg}x$$

$$4\sqrt{x-3b\operatorname{ctg}x}=12+a(x-3b\operatorname{ctg}x)-8a$$

Пусть $t=\sqrt{x-3b\operatorname{ctg}x}$; $t\geq0$

$$4t=12+at^2-8a$$

$$at^2-4t-8a+12=0$$

(2) $at^2 - 4t - 8a + 12 = 0$ $\qquad t = \dfrac{2 \pm \sqrt{8a^2-12a+4}}{a}$

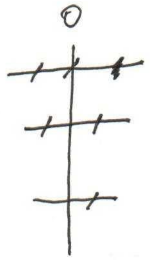
Линейный случай: при $\underline{a=0}$. $t = 3$ — 1р $\qquad t \geq 0$

$D_1 = 4 + 8a^2 - 12a.$ $\qquad 8a^2-12a+4=0$

$D_1 = 36-32=4$

$a = \frac{6\pm 2}{8}$ $\quad a = \frac{1}{2}; 1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{f(0)}{a} < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} D > 0 \\ \frac{f(0)}{a} = 0 \\ x_в < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} D = 0 \\ x_в > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{-8a+12}{a} < 0 \\ a \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1;\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} a \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1;\infty) \\ a = \frac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ a = 1 \end{array}\right. \\ \frac{2}{a} > 0 \end{cases} \\ a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \in (-\infty;0) \cup (\frac{3}{2};\infty) \\ a = \frac{3}{2} \\ a = 1 \\ a = \frac{1}{2} \\ a = 0 \end{array}\right.$$



при $a \in (-\infty;0] \cup [\frac{3}{2};\infty) \cup \{\frac{1}{2}\} \cup \{1\}$

$\sqrt{x - 3b\,ctg\,x} = t$ (где t — имеет единственное значение)

(3) $x = 3b\,ctg\,x + t^2$

Т.к. $ctg\,x$ функция периодичная, то при любом $b \neq 0$ (3) имеет ∞ кол-во решений, т.е.

$b = 0$

$x = t^2 = \left(\dfrac{2 + \sqrt{8a^2-12a+4}}{a}\right)^2$ $\quad +.$

знак

при $x - 3b\,ctg\,x < 0$

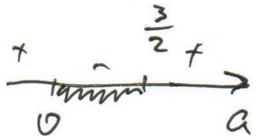
$8a + 3ab\,ctg\,x = 12 + ax$

$ax = 8a + 3ab \cdot ctg\,x - 12$

при $\forall\, b \neq 0$ прямая ax пересечёт $8a - 12 + 3ab\,ctg\,x$ ∞ кол-во раз, поэтому $b = 0$

$\begin{cases} ax = 8a - 12 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8a-12}{a} \\ x < 0 \end{cases}$

$\frac{8a-12}{a} < 0$ $\qquad a \in (0; \frac{3}{2})$



Ответ: 1) при $b=0$ при $a \in (-\infty;0] \cup [\frac{3}{2};\infty) \cup \{\frac{1}{2}\} \cup \{1\}$

$x = \left(\dfrac{2+\sqrt{8a^2-12a+4}}{a}\right)^2$

2) при $b = 0$; $a \in (0; \frac{3}{2})$

$x = \dfrac{8a-12}{a}$.

наложение

10

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3										

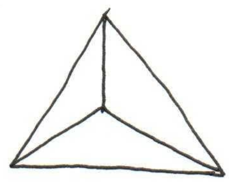
Шифр 111436

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

N 1

~~Рассмотрим 3 случая~~:

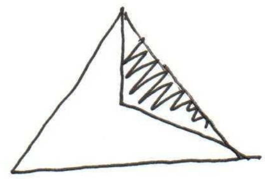


Найдём, сколькими способами можно повернуть треугольник так, чтобы донце было непрозрачным:

Рассмотрим 3 случая:

1) Когда первые 3 треугольника лежат закрывая закрашенные части:

тогда



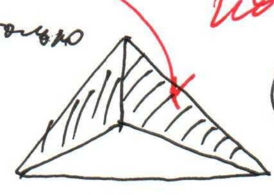
(1)

Т.к. таких частей три, а остальные 2 треугольника можно расположить двумя способами, то:

$k_1 = 2 \cdot 3 = 6$?

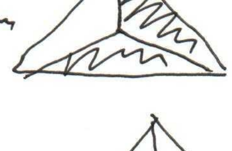
повторы

2) Когда первые 3 треугольника закрывают только $\frac{2}{3}$ дна, то:



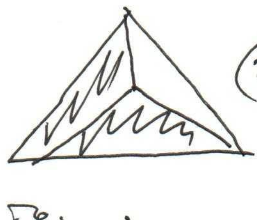
(2, 1)

~~Этим~~ Эти 3 треугольника можно расположить $k_2 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \cdot 18$ способами



(2.2)

3) Когда первые 3 треугольника полностью закрывают донце:



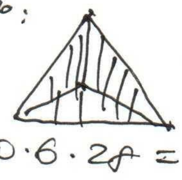
(2.3)

$k_3 = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 6 \cdot 9$ способов

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 72 \\ \hline 56 \\ +196 \\ \hline 2016 \end{array}$$

3

4) Т.к. 5 треугольников можно менять местами, то:



(3)

$K_0 = 5!(k_1 + k_2 + k_3) = 5! \cdot 6(1 + 9 + 18) =$

$= 6 \cdot 28 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \cdot 6 \cdot 28 = 20160$

Ответ: 20160