Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1

+1

218223

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Кадырова Ясмин Рашидовна

Город, № школы (образовательного учреждения) Алматы, Специализированный лицей №165, 11

Регистрационный номер ШМ 6201

Вариант задания 22

Дата проведения "18" марта 2018 г.

Подпись участника ____________

44 (сорок четыре)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

218223

Шифр ______________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

223

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12	5	10	5	0					44

Вариант № 22

N 4

$$\begin{cases} x^2+y^2+6(y-x)\le 7 & (1) \\ y+|x-4|+3\le 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow x^2+y^2+6y-6x\le 7$

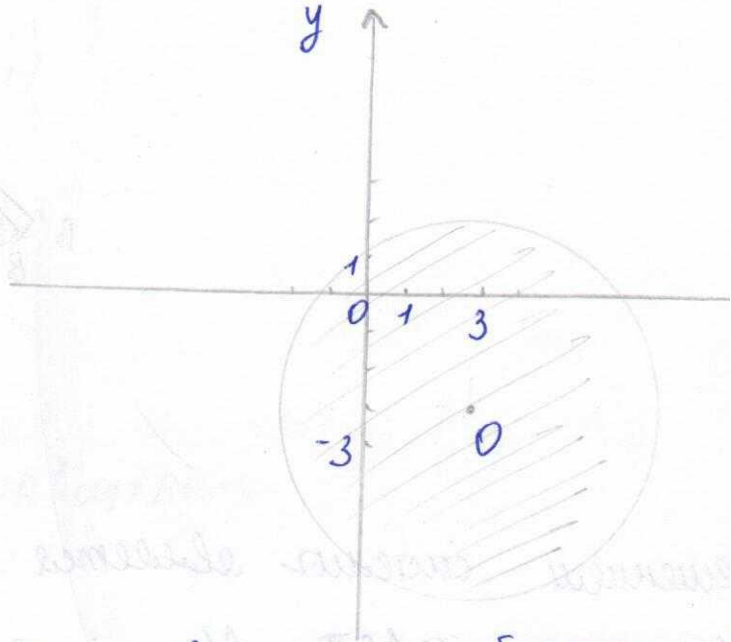
$x^2-6x+9-9+y^2+6y+9-9\le 7$

$(x-3)^2-9+(y+3)^2-9\le 7$

$(x-3)^2+(y+3)^2\le 18+7$

$(x-3)^2+(y+3)^2\le 25$

$(x-3)^2+(y+3)^2\le 5^2$



Решением данного неравенства является область, ограниченная окружностью (включая саму окружность), задающейся формулой:

$(x-3)^2+(y+3)^2=5^2$; $R=5$, $O(x_0;y_0)=O(3;-3)$ - центр окружнос

(2): $y+|x-4|+3\le 0$

1) $\begin{cases} x-4\ge 0 \\ y+x-4+3\le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 4 \\ x+y-1\le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 4 \\ y\le 1-x \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-4<0 \\ y-x+4+3\le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<4 \\ y-x+7\le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<4 \\ y\le x-7 \end{cases}$

$f(x)=1-x$
$x\ge 4$

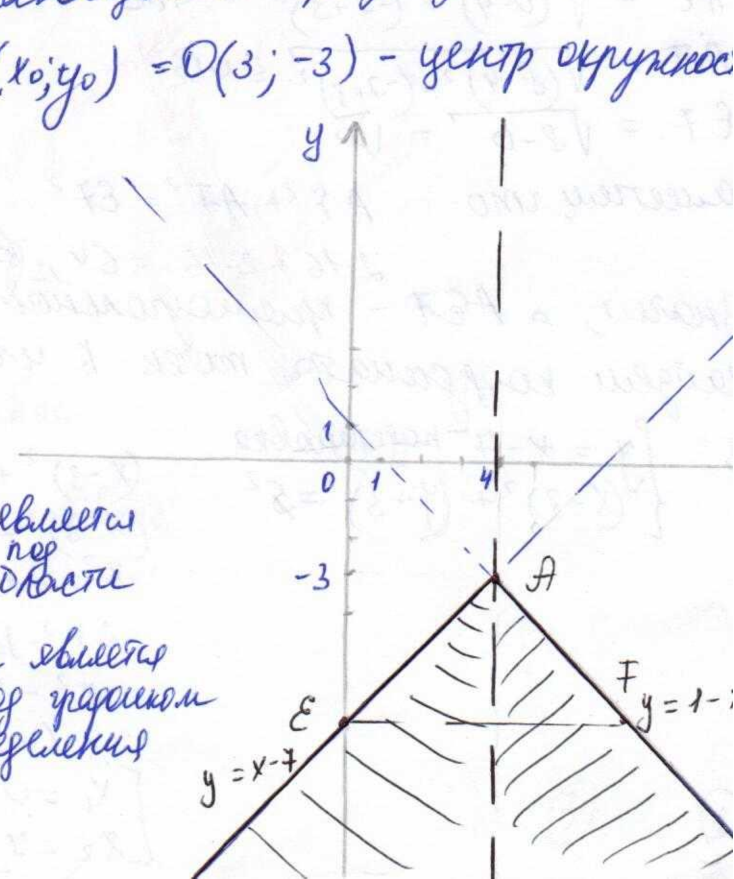
x	4	5
y	-3	-4

Решением системы является область лежащая под графиком $f(x)$ в области определения

$g(x)=x-7$
$x<4$

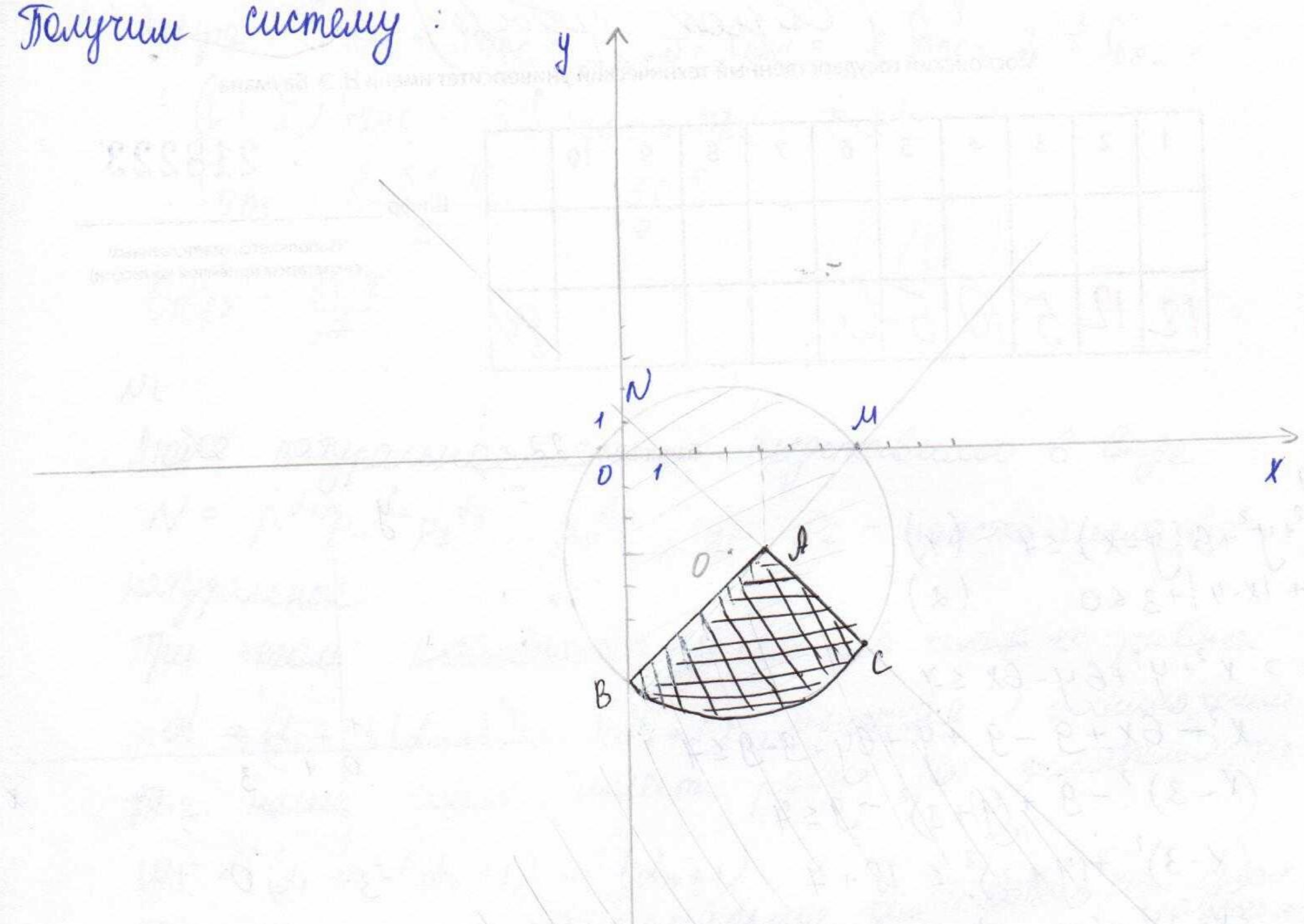
x	4	3
y	-3	-4

Решением системы является область, лежащая под графиком $g(x)$ в области определения



1

Получим систему:



Решением системы является фигура ABC

Рассмотрим $\triangle AEF$: $A(4;-3)$; $E(0;-7)$, $F(8;-7)$

$$AE = \sqrt{(0-4)^2+(-7+3)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$AF = \sqrt{(8-4)^2+(-7+3)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$EF = 8-0 = 8$$

Заметим, что $AE^2 + AF^2 = EF^2$

$2\cdot16 + 2\cdot16 = 64$, верно

Значит, $\triangle AEF$ – прямоугольный $\Rightarrow AE \perp AF. \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ$

Найдем координаты точек B и C.

B: $\begin{cases} y = x-7 \text{ – подстановка} \\ (x-3)^2+(y+3)^2=5^2 \end{cases}$

$$(x-3)^2+(x-7+3)^2=5^2$$
$$(x-3)^2+(x-4)^2=5^2$$
$$x^2-6x+9+x^2-8x+16=25$$
$$2x^2-14x=0$$
$$x^2-7x=0$$
$$x(x-7)=0$$

$\left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=7 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y_1=-7 \\ y_2=0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow B(0;-7)$, $M(7;0)$

$C: \begin{cases} y = 1-x \text{ — подстановка} \\ (x-3)^2+(y+3)^2=5^2 \end{cases}$

$(x-3)^2+(1-x+3)^2=5^2$

$(x-3)^2+(4-x)^2=5^2$

$x^2-6x+9+16-8x+x^2=25$

$2x^2-14x=0$

$x^2-7x=0$

$x(x-7)=0$

$\left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=7 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y_1=1 \\ y_2=-6 \end{array}\right. \Rightarrow C(7;-6)$, $N(0;1)$

$A(4;-3);\ M(7;0)$

$AM=\sqrt{(7-4)^2+(0+3)^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt2$.

$A(4;-3);\ B(0;-7)$

$AB=\sqrt{(0-4)^2+(-7+3)^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt2$

$\frac{AM}{AB}=\frac{3\sqrt2}{4\sqrt2}=\frac34=\frac{S_{MAC}}{S_{BAC}}$ (т.к. $AC\perp BM$).

$S_{BAC}=\frac43 S_{MAC}=\frac47 S_{BMC}$

~~в $\triangle BOM$: $B(0;-7)$, $M(7;0)$, $O(3;-3)$~~

~~$BM=\sqrt{(7-0)^2+(0+7)^2}=\sqrt{7^2\cdot2}=7\sqrt2$~~

~~$OB=OM=5=R$~~

~~по т. косинусов в $\triangle BOM$:~~

~~$BM^2=R^2+R^2-2R^2\cos\angle BOM=2R^2-2R^2\cos\angle BOM$~~

~~$49\cdot2=2\cdot25(1-\cos\angle BOM)$~~

~~$1-\cos\angle BOM=\frac{49\cdot2}{2\cdot25}=\frac{49}{25}$~~

~~$\cos\angle BOM=1-\frac{49}{25}=\frac{25-49}{25}=\frac{24}{25}$.~~

$A(4;-3);\ N(0;1)$

$AN=\sqrt{(0-4)^2+(1+3)^2}=\sqrt{16\cdot2}=4\sqrt2$

$A(4;-3),\ C(7;-6)$

$AC=\sqrt{(7-4)^2+(-6+3)^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt2$.

$AM=3\sqrt2$

$AB=4\sqrt2$

$AN=4\sqrt2$

$AC=3\sqrt2$

$\frac{S_{MAC}}{S_{BAC}}=\frac34 \Rightarrow S_{MAC}=\frac34 S_{BAC}$.

для

$\frac{AC}{AN}=\frac{3\sqrt2}{4\sqrt2}=\frac34=\frac{S_{MAC}}{S_{MAN}}=\frac{\frac34 S_{BAC}}{S_{MAN}}$

$S_{MAN}=\frac{\frac34 S_{BAC}}{\frac34}=S_{BAC}$.

$S_{ANB}=S_{AMC}=\frac34 S_{BAC}$

треугольников верно, для частей круга нет.

3

$S_{круга} = S_{BAC} + S_{MAC} + S_{NAN} + S_{BAN} = 2S_{BAC} + 2 \cdot \frac{3}{4} S_{BAC} =$
$= \left(2 + \frac{3}{2}\right) S_{BAC} = 3\frac{1}{2} S_{BAC} = \pi R^2 = \pi \cdot 5^2.$

$S_{BAC} = \frac{2 \cdot 5^2 \cdot \pi}{7} = \frac{50\pi}{7}.$

10

Ответ: $\frac{50\pi}{7}$.

N1.

Любое натуральное число представимо в виде
$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n}$, где p_i – простые числа, α_i – натуральное

При этом количество делителей числа N равно:
$d = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$, включая 1 и само число
Т.к. наше число имеет ровно 105 делителей, то

$105 = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$
$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ => максимальное количество различных p_i равно трем
Т.к. наше число наименьшее, то $p_1, p_2, \ldots p_n$ – наименьшие => они равны 2, 3 и 5.
Пусть в разложении числа N присутствуют все простые 2, 3, 5 в различных степенях.
$(\alpha_1+1) = 3 => \alpha_1 = 2$
$(\alpha_2+1) = 5 => \alpha_2 = 4$
$(\alpha_3+1) = 7 => \alpha_3 = 6$

Получим варианты: $N = \left[\begin{array}{l} 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 64 \cdot 81 \cdot 25 \\ 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4 = 64 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 25 \\ 2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^4 = 4 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 25 \\ 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6 = 4 \cdot 81 \cdot 125 \cdot 125 \\ 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^6 = 16 \cdot 9 \cdot 125 \cdot 125 \\ 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2 = 16 \cdot 81 \cdot 9 \cdot 25 \end{array}\right.$

Наименьшее из данных чисел – $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2$
Пусть в разложении числа N присутствуют только 2 и 3. в различных степенях
$105 = 15 \cdot 7$ $\quad$ $105 = 21 \cdot 5$
$105 = 35 \cdot 3$

2 $\quad$ 4

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 218223

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 22

1) $\alpha_1 = 14$
$\alpha_2 = 6$
$N = \left[\begin{array}{l} 2^{14}\cdot 3^{6} \\ 2^{6}\cdot 3^{14} \end{array}\right.$

2) $\alpha_1 = 34$
$\alpha_2 = 2$
$N = \left[\begin{array}{l} 2^{33}\cdot 3 \\ 3^{33}\cdot 2 \end{array}\right.$

3) $\alpha_1 = 20$
$\alpha_2 = 4$
$N = \left[\begin{array}{l} 2^{4}\cdot 3^{20} \\ 2^{20}\cdot 3^{4} \end{array}\right.$

Наименьшие $- 2^{14}\cdot 3^{6}$
$2^{33}\cdot 3$
$2^{20}\cdot 3^{4}$

наименьшее из всех $= 2^{14}\cdot 3^{6}$.

Пусть в разложении числа N присутствует только 2, тогда $N = 2^{104}$

получим варианты: $N = \left[\begin{array}{ll} 2^{6}\cdot 3^{4}\cdot 5^{2} & = 81\cdot 32\cdot 50 \\ 2^{14}\cdot 3^{6} & = 32\cdot 32\cdot 16\cdot 27\cdot 27 \\ 2^{104} & \end{array}\right.$

12

Из них минимальное $N = 81\cdot 32\cdot 50 = 129600$

Ответ: 129600.

N5

$$\begin{cases} \log_{|x-4|}(5a-ax) = 2\log_{|x-4|}(y-x) & (1) \\ \sqrt{x^2-4x+y-2} = x-2 & (2) \end{cases}$$

1) ОДЗ: $|x-4| \neq 1$ $\begin{cases} x-4\neq 1 \\ x-4\neq -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 5 \\ x\neq 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 5a-ax>0 \\ y-x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} a(5-x)>0 \\ y>x \end{cases}$

$x^2-4x+y-2 \geq 0$

5

Значит, $\begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq 3 \\ a(5-x) > 0 \\ y > x \\ x^2 + 4x + y - 2 \geq 0 \end{cases}$

$x \neq 4$

(2): $\sqrt{x^2-4x+y-2} = x-2$

$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-4x+y-2 = (x-2)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-4x+y-2 = x^2-4x+4 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 2 \\ y-2 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ y = 6 \end{cases}$ – подстановка

(1): $\log_{|x-4|}(5a-ax) = 2\log_{|x-4|}(y-x)$

$\log_{|x-4|}(5a-ax) = \log_{|x-4|}(y-x)^2$

ОДЗ

$2 \leq x < 6$

$x \neq 5; 4; 3$

$5a - ax = (y-x)^2$

$5a - ax = (6-x)^2$

$5a - ax = 36 - 12x + x^2$

$x^2 - 12x + ax + 36 - 5a = 0$

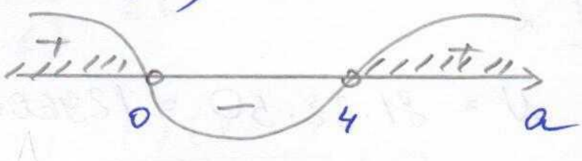
$x^2 - x(12-a) + 36 - 5a = 0$

Так как система имеет два различных решения, то $D > 0$

$D = (12-a)^2 - 4\cdot(36-5a) = 144 - 24a + a^2 - 144 + 20a =$

$= a^2 - 4a > 0$

$a(a-4) > 0$



$a \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$

$x_{12} = \dfrac{12 - a \pm \sqrt{a(a-4)}}{2}$

Т.к. $x \geq 2$, то

$\dfrac{12 - a \pm \sqrt{a(a-4)}}{2} \geq 2$

$12 - a \pm \sqrt{a(a-4)} \geq 4$

$-a \pm \sqrt{a(a-4)} \geq -8 \quad | \times(-1)$

$a \mp \sqrt{a(a-4)} \leq 8$

$$\left[\begin{array}{l} a-8 \le \sqrt{a(a-4)} \\ 8-a \ge \sqrt{a(a-4)} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a(a-4) \ge a^2-16a+64 \\ \begin{cases} 8-a>0 \\ 8^2-16a+a^2 \ge a(a-4) \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a^2-4a \ge a^2-16a+64 \\ \begin{cases} a<8 \\ 64-16a+a^2 \ge a^2-4a \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 0 \ge -12a+64 \\ \begin{cases} a<8 \\ 12a \le 64 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 12a \ge 64 \\ \begin{cases} a<8 \\ 12a \le 64 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a \ge \frac{16}{3} \\ \begin{cases} a<8 \\ a \le \frac{16}{3} \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a \ge \frac{16}{3} \\ a \le \frac{16}{3}. \end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ для a:

~~$a \in (-\infty; 0) \cup (4; \frac{16}{3} + \infty)$~~

5

7

N2

$$\frac{(x+7-4\sqrt{x+4})\log_2(x-1)}{(4^x-12\cdot 2^x+32)\log_3(7-x)} \geq 0$$

1) ОДЗ $\begin{cases} x+4\geq 0 \\ x-1>0 \\ 7-x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -4 \\ x>1 \\ x<7 \end{cases}$ $\begin{cases} x>1 \\ x<7 \end{cases}$ $=x\in(1;7)$

$(4^x-12\cdot 2^x+32)\log_3(7-x)\neq$

$\left[\begin{array}{l} \log_3(7-x)\neq 0 \\ (x-3)(x-2)\neq 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 7-x\neq 1 \\ x-3\neq 0 \\ x-2\neq 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x\neq 6 \\ x\neq 2 \\ x\neq 3 \end{array}\right.$

$=> x\in(1;2)\cup(2;3)\cup(3;6)\cup(6;7)$

2) $$\frac{(x+4-4\sqrt{x+4}+3)(\log_2(x-1)-\log_2 1)}{(2^{2x}-12\cdot 2^x+32)(\log_3(7-x)-\log_3 1)} \geq 0$$

Пусть $\sqrt{x+4}=t$, $2^x=a$, тогда

$$\frac{(t^2-4t+3)(x-1-1)(2-1)}{(a^2-12a+32)(7-x-1)(3-1)} \geq 0$$

$$\frac{(t^2-3t-t+3)(x-2)}{(a^2-8a-4a+32)(6-x)} \geq 0$$

$$\frac{(t-3)(t-1)(x-2)}{(a-8)(a-4)(6-x)} \geq 0$$

$$\frac{(t-3)(t-1)(x-2)}{(a-8)(a-4)(x-6)} \leq 0$$

$$\frac{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}-1)(x-2)}{(2^x-8)(2^x-4)(x-6)} \leq 0$$

$$\frac{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}-1)(x-2)}{(x-3)(2-1)(x-2)(2-1)(x-6)} \leq 0$$

$$\frac{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)(x-6)} \leq 0$$

$$\frac{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}-1)}{(x-3)(x-6)} \leq 0 \quad \Big| \times(\sqrt{x+4}+3)(\sqrt{x+4}+1)>0$$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 218223

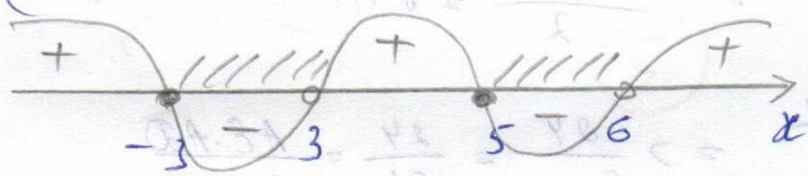
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 22

$$\frac{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}+3)(\sqrt{x+4}-1)(\sqrt{x+4}+1)}{(x-3)(x-6)}\le 0$$

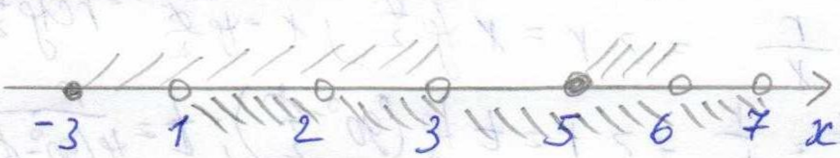
$$\frac{(x+4-9)(x+4-1)}{(x-3)(x-6)}\le 0$$

$$\frac{(x-5)(x+3)}{(x-3)(x-6)}\le 0$$



$x \in [-3;3) \cup [5;6)$

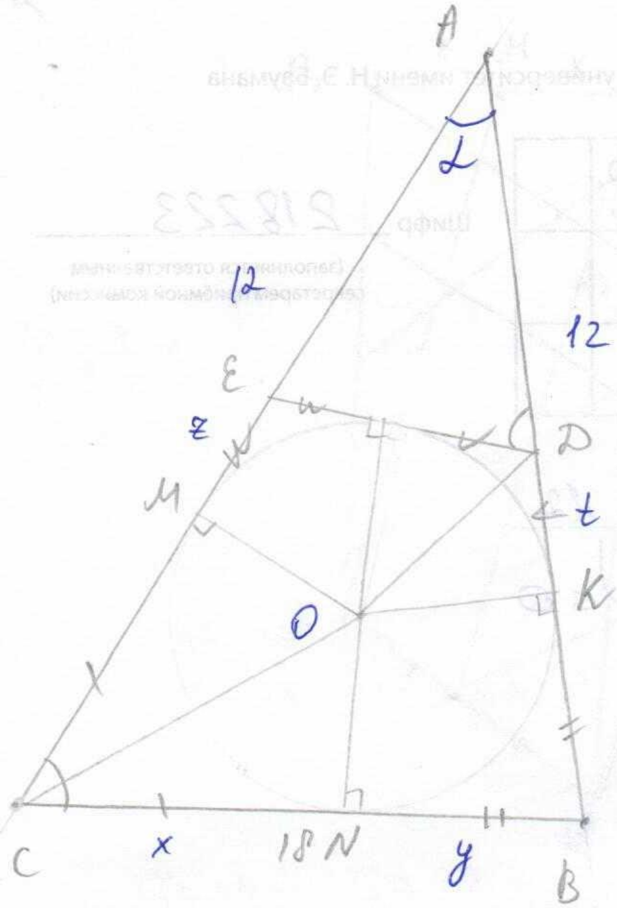
Учитывая ОДЗ:



$x \in (1;2) \cup (2;3) \cup [5;6)$

Ответ: $(1;2) \cup (2;3) \cup [5;6)$

12



Окружность, вписанная в BDEC является вписанной окружностью $\triangle ABC$

AK, AM – отрезки касательных AB и AC к ω $\Rightarrow AK = AM = 12$

т.к. BDEC – описанный, то

$ED + BC = EC + DB$

$BC = x + y = CM + BK$

$z + t + 18 = z + x + t + y$

$18 = x + y$

Полупериметр $\triangle ABC$ равен:

$p = \frac{BC + AC + AB}{2} = \frac{18 + AM + MC + AK + KB}{2}$

$= \frac{18 + 12 + 12 + MC + KB}{2} = \frac{18 + 12 \cdot 2 + x + y}{2} =$

$= \frac{18 \cdot 2 + 12 \cdot 2}{2} = 18 + 12 = 30$

$S_{ABC} = pr = 30r$. +.

$S_{ADE} = 24 = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AD \sin\alpha$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \sin\alpha$

$\Rightarrow \frac{24}{S_{ABC}} = \frac{24}{30r} = \frac{AE \cdot AD}{AC \cdot AB}$.

Так как BDEC – вписанный, то $\angle C = \gamma$, $\angle D = 180° - \gamma$

$\angle OCN = \frac{\gamma}{2}$; $\angle ODK = \frac{180 - \gamma}{2} = 90 - \frac{\gamma}{2}$

В $\triangle ONC$: $tg\frac{\gamma}{2} = \frac{ON}{CN} = \frac{r}{x} \Rightarrow r = x\, tg\frac{\gamma}{2}$; $x = \frac{r}{tg\frac{\gamma}{2}} = r\, ctg\frac{\gamma}{2}$

В $\triangle OKD$: $tg\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{OK}{t} = \frac{r}{t} \Rightarrow r = t\, tg\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)$; $t = \frac{r}{tg\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)}$

$= \frac{r}{ctg\frac{\gamma}{2}} = r\, tg\frac{\gamma}{2} = \frac{r^2}{x}$.

Аналогично для z и y: $z = \frac{r^2}{y}$; $y = \frac{r}{tg\frac{\beta}{2}}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \sin\gamma \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot \sin\gamma \cdot AC = 9 \sin\gamma\, AC$

$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot ED \cdot \sin\gamma = 24$

$\sin\gamma = \frac{48}{AD \cdot ED}$.

$S_{ABC} = \frac{9 \cdot AC \cdot 48}{AD \cdot ED} = \frac{48 \cdot 9}{ED} \cdot \frac{AC}{AD} = \frac{48 \cdot 9}{ED} \cdot \frac{BC}{ED} = \frac{48 \cdot 9 \cdot 18}{ED^2} =$

$$= \frac{48\cdot 9\cdot 18}{(z+t)^2} = \frac{48\cdot 9\cdot 18}{z^2+t^2+2zt} = \frac{48\cdot 9\cdot 18}{\left(\frac{r^2}{y}+\frac{r^2}{x}\right)^2} = \frac{48\cdot 9\cdot 18}{r^4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2} = \frac{48\cdot 9\cdot 18}{r^4\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} =$$

$$\frac{48\cdot 9\cdot 18\cdot (xy)^2}{r^4\cdot 18^2} = \frac{48\cdot 9\cdot (xy)^2}{r^4\cdot 18} = 30r$$

$$\frac{48\cdot 9\cdot \left(r\,ctg\frac{\alpha}{2}\cdot r\,ctg\frac{\beta}{2}\right)^2}{r^4\cdot 18} = \frac{48\cdot 9\cdot r^4\cdot ctg^2\frac{\alpha}{2}\cdot ctg^2\frac{\beta}{2}}{r^4\cdot 18} = \frac{48}{2}ctg^2\frac{\alpha}{2}ctg^2\frac{\beta}{2} =$$

$$= 24\,ctg^2\frac{\alpha}{2}\cdot ctg^2\frac{\beta}{2}$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot AD\sin\alpha = 24 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{48}{AE\cdot AD}$$

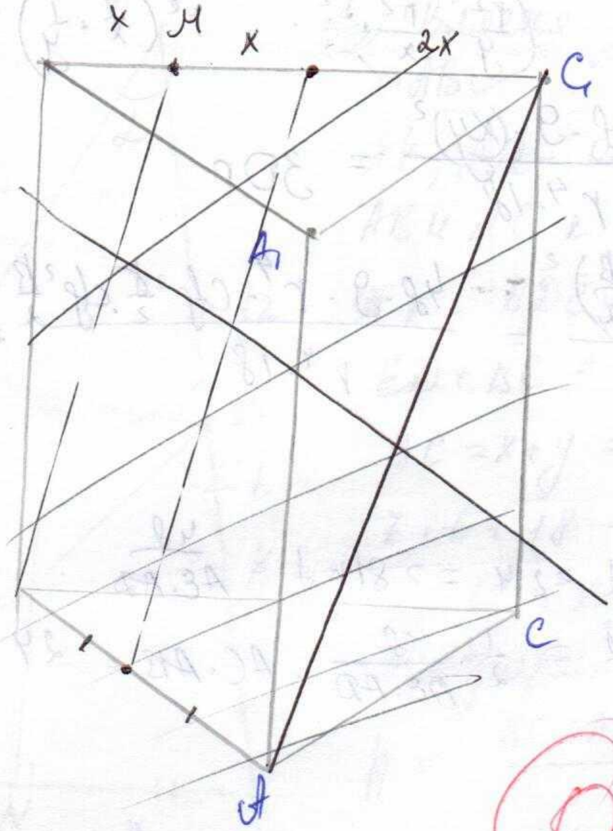
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot AB\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{48}{AE\cdot AD}\cdot AC\cdot AB = 24\,\frac{AC\cdot AB}{AE\cdot AD} =$$

$$= \frac{24(12+x)(12+y)}{(12-z-x)(12-t-y)}$$

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{18}{2\sin\alpha} = \frac{9}{\sin\alpha} = \frac{9\,AE\cdot AD}{48} = \frac{3\,AE\cdot AD}{16}$$

5

~~№6~~



0