Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1 Мц

111239

Шифр ________________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Мамонтов Степан Антонович

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва ; Школа № 1208 ; 11 класс

Регистрационный номер ШМ 5622

Вариант задания 17

С работой ознакомлен 16.03.18.

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника

49 (сорок девять)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

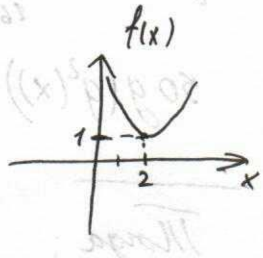
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
–	9	–	20	20.	–					49

Шифр 111239

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 17

№4 $\frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)+2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}\geq 50\,g(g^2(x))$ $\qquad g(x)=\frac{3}{x^2-4x+5}$



ОДЗ: $2-\frac{3}{g(x)}\geq 0$

$f(x)=x^2-4x+5$

$x_в=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$

$\frac{3}{g(x)}\leq 2$

$\cancel{f(2)}\ f(2)=4-8+5=1$

$\frac{3-2g(x)}{g(x)}\leq 0 \quad (g(x)>0)$ $\qquad f(x)\in[1;+\infty) \Rightarrow g(x)\in(0;3]$

без учёта ОДЗ

$3-2g(x)\leq 0$

$-2g(x)\leq -3$

$g(x)\geq\frac{3}{2} \Rightarrow g(x)\in\left[\frac{3}{2};3\right]$

$\frac{g(x)}{3}\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

$\cancel{g\left(\frac{g(x)}{3}\right)}$ $f(x)$ монотонно убывает ~~на~~ ~~отрезке~~ ~~интервале~~ при $x\in$ $(-\infty;2] \Rightarrow g(x)$ возрастает при $x\in(-\infty;2]$

$g\left(\frac{g(x)}{3}\right)$ возрастает при $\frac{g(x)}{3}\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

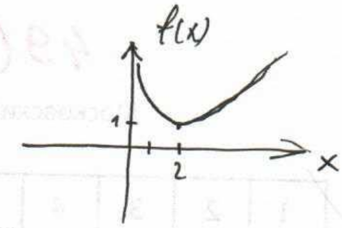
$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{12}{13}$

$g(1)=\frac{3}{2}$ $\quad\Rightarrow g\left(\frac{g(x)}{3}\right)\in\left[\frac{12}{13};\frac{3}{2}\right] \Rightarrow \frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)\in\left[\frac{12}{13}\cdot\frac{2}{3};1\right]$

$\frac{3}{g(x)}\in[1;2] \Rightarrow 2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}\in[0;2]$

$g^2(x)\in\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2;3^2\right] \Rightarrow g^2(x)\in\left[\frac{9}{4};9\right]$

рассмотрим $g(g^2(x))$



$\cancel{g(x)}$ $f(x)$ возрастает при $x \in [2; +\infty)$

$g(x)$ убывает при $x \in [2; +\infty)$

$g^2(x) \in \left[\frac{9}{4}; 9\right]$ $\Rightarrow g(g^2(x)) \in \left[\cancel{g\left(\frac{9}{4}\right); g(}\ g(9); g\left(\frac{9}{4}\right)\right]$

$$g(9) = \frac{3}{81-36+5} = \frac{3}{50}$$

$$g\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{3}{\frac{81}{16} - 9 + 5} = \frac{3 \cdot 16}{17} \quad \Rightarrow g(g^2(x)) \in \left[\frac{3}{50}; \frac{3 \cdot 16}{17}\right]$$

$$50 g(g^2(x)) \in \left[3; \frac{3 \cdot 16 \cdot 50}{17}\right]$$

Тогда:
$$\underbrace{\frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{3}\right)}_{\left[\frac{12}{13} \cdot \frac{2}{3}; 1\right]} + \underbrace{2\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}}}_{[0; 2]} \geq \underbrace{50 g(g^2(x))}_{\left[3; \frac{3 \cdot 16 \cdot 50}{17}\right]}$$

Значит неравенство верно только при

$$\begin{cases} \frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{3}\right) = 1 \\ 2\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}} = 2 \\ 50 g(g^2(x)) = 3 \end{cases}$$

Решим первое ур-ие системы, а после подставим полученные корни ~~..~~ во второе и третье ур-ие для исключения лишних корней

$$\frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{3}\right) = 1$$

$$g\left(\frac{g(x)}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{\left(\frac{g(x)}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{g(x)}{3}\right) + 5} = \frac{3}{2} \quad \left(\text{Пусть } \frac{g(x)}{3} = t\right)$$

$$t^2 - 4t + 5 = 2$$
$$t^2 - 4t + 3 = 0$$
$$D = 16 - 12 = 4$$
$$t_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 3; 1$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{g(x)}{3} = 3 \\ \frac{g(x)}{3} = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = 9 \ (\cancel{\text{не под}}) \\ g(x) = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 9 = \frac{3}{x^2 - 4x + 5} \\ 3 = \frac{3}{x^2 - 4x + 5} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 5 = \frac{1}{3} \ (\text{корней нет}) \\ x^2 - 4x + 5 = 1 \Rightarrow x = 2 \end{array}\right.$$

$x=2 \Rightarrow g(x)=3$

$$\begin{cases} 2\sqrt{2-\frac{3}{3}}=2 \\ 50\,g(3^2)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{1}=2 \text{ (верно)} \\ 50\,g(9)=3 \end{cases} \Rightarrow 50\cdot\frac{3}{50}=3 \Rightarrow 3=3 \text{ (верно)}$$

$x=2$ – ~~реш~~ решение

Ответ: $x=2$ V

20

№5 a, b – ? ед. решение

$$6a-2ab\,tg\,x+\sqrt{2(x+|x+b\,tg\,x|+b\,tg\,x)}=4+2ax$$

$$6a-2ab\,tg\,x-2ax+\sqrt{2(x+b\,tg\,x+|x+b\,tg\,x|)}=4$$

$$6a-2a(x+b\,tg\,x)+\sqrt{2(x+b\,tg\,x+|x+b\,tg\,x|)}=4$$

Пусть $x+b\,tg\,x=t$; $6a-2a\cdot t+\sqrt{2(t+|t|)}$

Если $b\neq 0$, то ур-ие $x+b\,tg\,x=t$ имеет бесконечно много решений

~~$f(x)=x+b\,tg\,x-t=0$~~

~~$f'(x)=1+b\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=0$~~

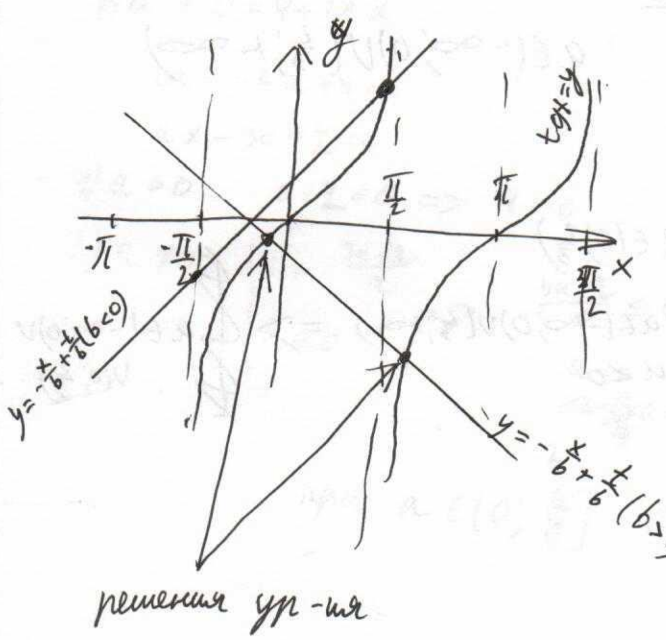
~~$f'(x)=\frac{\cos^2 x+b}{\cos^2 x}=0$~~

$tg\,x\in(-\infty;+\infty)$ с периодом π

$$tg\,x=\frac{t-x}{b} \Rightarrow tg\,x=-\frac{x}{b}+\frac{t}{b}$$

$\frac{t-x}{b}$ – монотонно убывает ($b>0$) или возрастает ($b<0$)

$tg\,x\in(-\infty;+\infty)$ с периодом π



решения ур-ия

$\Rightarrow$ чтобы решение было единственным, $b=0$

Подставим в исходное ур-ие

$$6a+\sqrt{2(x+|x|)}=4+2ax$$

~~Пусть~~ 1) $\boxed{x>0}$

$$6a+\sqrt{4x}=4+2ax$$

$$\sqrt{x}=z;\quad z>0$$

$$6a+2z=4+2az^2$$

$$az^2-z-3a+2=0$$

1) $\boxed{a=0}$ $\quad -z+2=0$

$z=2$

$\boxed{x=4}$ ~~верно~~ удв. усл.

2) $a\neq 0$

$$D=1-4a(-3a+2)=1+12a^2-8a=12a^2-8a+1\geq 0$$

$$D=64-48=16$$

$$\left[\begin{array}{l} a=\frac{8+4}{24} \\ a=\frac{8-4}{24}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{6}\end{array}\right.$$

$+\quad \frac{1}{6} \quad - \quad \frac{1}{2} \quad +\quad a$

Тогда $a\in(-\infty;\frac{1}{6}]\cup[\frac{1}{2};+\infty)$, то $D\geq 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ll} z=\frac{1+\sqrt{12a^2-8a+1}}{2a} & (1) \\ z=\frac{1-\sqrt{12a^2-8a+1}}{2a} & (2)\end{array}\right. \\ z>0 \\ a\neq 0 \\ 12a^2-8a+1\geq 0\end{array}\right.$$

(1) $\frac{1+\sqrt{12a^2-8a+1}}{2a}>0 \Rightarrow a>0$

(2) $\frac{1-\sqrt{12a^2-8a+1}}{2a}>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 1-\sqrt{12a^2-8a+1}>0 \\ a>0\end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 1-\sqrt{12a^2-8a+1}<0 \\ a<0\end{array}\right.\end{array}\right.$

$1-\sqrt{12a^2-8a+1}>0$

$1>\sqrt{12a^2-8a+1}$

$\cancel{1}>12a^2-8a+\cancel{1}$

$0>a(12a-8)$

$a=0 \quad a=\frac{8}{12}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$+\quad 0 \quad - \quad \frac{2}{3} \quad + \quad a$

$a\in(0;\frac{2}{3})$

$1-\sqrt{12a^2-8a+1}<0$

$1<\sqrt{12a^2-8a+1}$

$0<(12a-8)a$

$a\in(-\infty;0)\cup(\frac{2}{3};+\infty)$

(2) $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a\in(0;\frac{2}{3}) \\ a>0\end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a\in(-\infty;0)\cup(\frac{2}{3};+\infty) \\ a<0\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\left[\begin{array}{l} a\in(0;\frac{2}{3}) \\ \left\{\begin{array}{l} a\in(-\infty;0)\cup(\frac{2}{3};+\infty) \\ a<0\end{array}\right.\end{array}\right.\right. \Rightarrow \left\{ a\in(-\infty;0)\cup(0;\frac{2}{3})\right.$

~~Пусть~~

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

111239

Шифр

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 17

№ 5 продолжение

Тогда изначальная система ~~имеет вид~~ имеет вид

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} z_1 = \frac{1+\sqrt{12a^2-8a+1}}{2a} \\ z_2 = \frac{1-\sqrt{12a^2-8a+1}}{2a} \end{array}\right. \\ z>0 \\ a \neq 0 \\ a \in (-\infty; \frac{1}{6}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty) \end{cases}$$

Z_1 ~~существует~~ удв. условию при $a>0$

Z_2 ~~существует~~ удв. условию при $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{2}{3})$

$\cancel{x_1 = \sqrt{z_1}}$ $x_1 = z_1^2 = \left(\frac{1+\sqrt{12a^2-8a+1}}{2a}\right)^2$ при $a>0$

$x_2 = z_2^2 = \left(\frac{1-\sqrt{12a^2-8a+1}}{2a}\right)^2$ при $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{2}{3}))$

$\Big\} \; a \in (-\infty; \frac{1}{6}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$

② Если $x \leq 0$

$6a + 0 = 4 + 2ax$

$2ax - 6a + 4 = 0$

$ax - 3a + 2 = 0$

1) $a = 0$ $\quad 0 + 2 = 0 \Rightarrow a \neq 0$

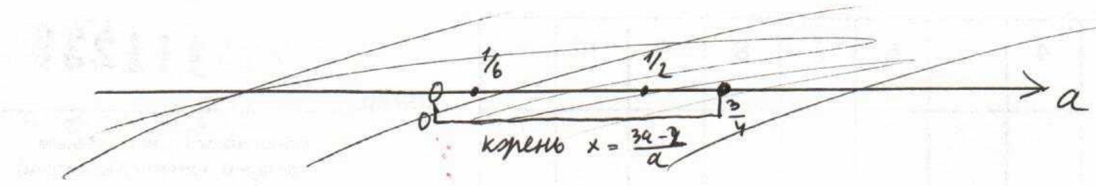
2) $a \neq 0$ $\quad \begin{cases} x = \frac{3a-2}{a} \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{3a-2}{a} \leq 0$

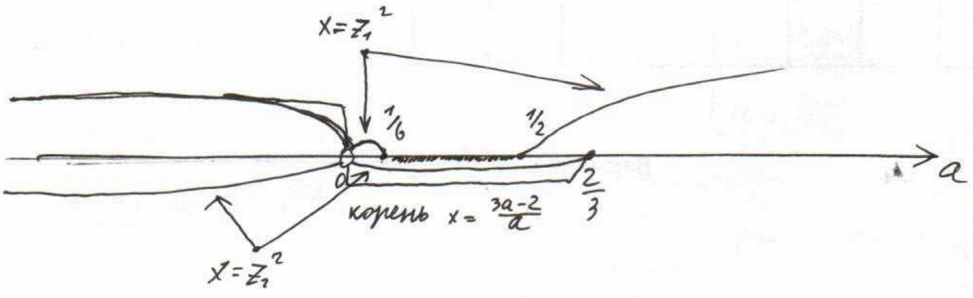
$a = 0$

$a = \frac{2}{3}$

$+ \quad 0 \quad - \quad \frac{2}{3} \quad + \quad a$

при $a \in (0; \frac{2}{3}]$ есть корень $\cancel{x = \frac{3a-4}{a}}$ $x = \frac{3a-2}{a}$





в т. $a = 0$ $\quad \underline{x = 4}$

Ответ: ① $a \in (-\infty; 0)$; $b = 0$

$$x = \left(\frac{1 - \sqrt{12a^2 - 8a + 1}}{2a}\right)^2$$

② $a = 0$; $b = 0$

$x = 4$

③ $a \in \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$; $b = 0$

$$x = \frac{3a-2}{a}$$

④ $a \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$; $b = 0$

$$x = \left(\frac{1 + \sqrt{12a^2 - 8a + 1}}{2a}\right)^2$$

О.Д.З ?

$\cos x \neq 0$

20.

№2 $\sin^4(2025x) + \cos^{2019}(2016x) \cdot \cos^{2018}(2025x) = 1$

$\cancel{1} - \cos^4(2025x) + \cos^{2019}(2016x) \cdot \cos^{2018}(2025x) = \cancel{1}$

$\cos^4(2025x)\left(\cos^{2019}(2016x) \cdot \cos^{2014}(2025x) - 1\right) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos^4(2025x) = 0 \quad ① \\ \cos^{2019}(2016x) \cdot \cos^{2014}(2025x) = 1 \quad ② \end{array}\right.$$

$\cos t \in [-1; 1]$

$\cos^{2019} t \cdot \cos^{2014} y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^{2019} t = 1 \\ \cos^{2014} y = 1 \end{cases}$

① $\cos 2025x = 0$

$2025x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in Z$

$x = \frac{\pi}{4050} + \frac{\pi k}{2025}; k \in Z$

② $\cos^{2019}(2016x) \cdot \cos^{2014}(2025x) = 1$

$\begin{cases} \cos(2016x) = 1 \\ \cos(2025x) = \pm 1 \end{cases}$?

$2016x = 2\pi n; n \in Z$

$x = \frac{\pi n}{1008}; n \in Z$

$2025x = 2\pi a; a \in Z$

$x = \frac{2\pi a}{2025}; a \in Z$

$\frac{\pi n}{1008} = \frac{2\pi a}{2025}$

$2025n = 2a \cdot 1008$

$a = \frac{2025}{2016} \cdot n$

но $n; a \in Z \Rightarrow \begin{matrix} n = 2016b \\ a = 2025b \end{matrix}; b \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4050} + \frac{\pi k}{2025}; k \in Z$

$x = 2\pi b; b \in Z$?

9