Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

216903

Шифр ______________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Алексеева Нария Николаевна

Город, № школы (образовательного учреждения) город Якутск, МОБУ Якутская городская национальная гимназия, 11 „А" класс

Регистрационный номер ШМ 6408

Вариант задания 13

Дата проведения “16” февраля 2018 г.

Подпись участника

54 (пятьдесят четыре)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12	—	20	5	5					54

216903

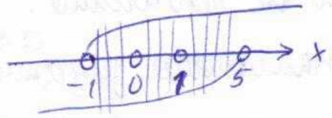
Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 13

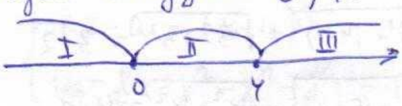
N2. $\dfrac{(|x-4|-|x|)\log_2(5-x)}{(9^x-4\cdot 3^x+3)\log_5(x+1)} \le 0$

ОДЗ: $\begin{cases} 5-x>0 \\ x+1>0 \\ 9^x-4\cdot3^x+3\neq 0 \\ \log_5(x+1)\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<5 \\ x>-1 \\ x\neq 0;\ x\neq 1 \\ x\neq 0 \end{cases}$



$x\in \left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ 0<x<1 \\ 1<x<5 \end{array}\right.$

Нули модуля: 0; 4.

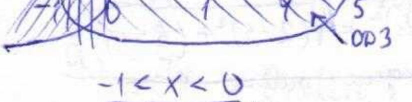


I При $x<0$

$\dfrac{(-x+4+x)\log_2(5-x)}{(9^x-4\cdot3^x+3)\log_5(x+1)} \le 0$

$\dfrac{4\log_2(5-x)}{(3^x-1)(3^x-3)\log_5(x+1)} \le 0$

Нули: 0; 1; 4



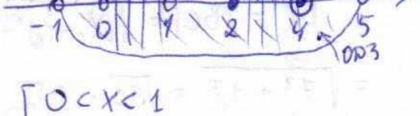
$-1<x<0$

II При $0\le x<4$.

$\dfrac{(-x+4-x)\log_2(5-x)}{(3^x-1)(3^x-3)\log_5(x+1)} \le 0 \ \Big|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\dfrac{(x-2)\log_2(5-x)}{(3^x-1)(3^x-3)\log_5(x+1)} \ge 0$

Нули: 0; 1; 2; 4



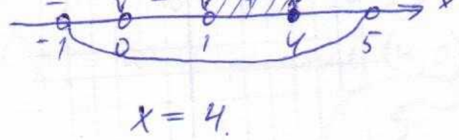
$\left[\begin{array}{l} 0<x<1 \\ 2\le x<4 \end{array}\right.$

III При $x\ge 4$

$\dfrac{(x-4-x)\log_2(5-x)}{(3^x-1)(3^x-3)\log_5(x+1)} \le 0 \ \Big|\cdot(-1)$

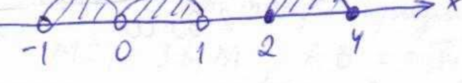
$\dfrac{4\log_2(5-x)}{(3^x-1)(3^x-3)\log_5(x+1)} \ge 0$

Нули: 0; 1; 4



$x=4$.

Общее решение неравенства:



12

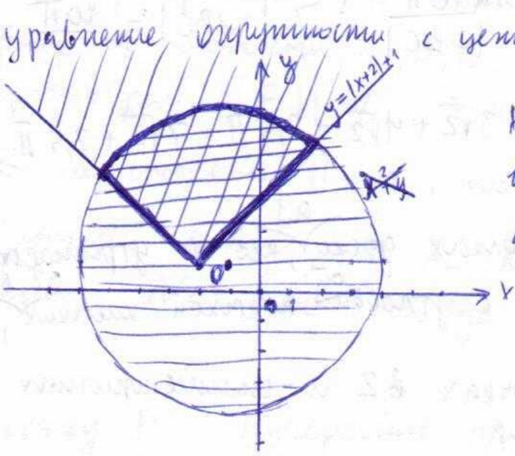
Ответ: $x\in(-1;0)\cup(0;1)\cup[2;4]$.

N4 $\begin{cases} x^2+y^2+2(x-y)\le 23 \\ y\ge |x+2|+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+2x+1+y^2-2y+1\le 25 \\ y\ge |x+2|+1 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+1)^2+(y-1)^2\le 25 \\ y\ge |x+2|+1. \end{cases}$

1. $(x+1)^2+(y-1)^2=25$ – уравнение окружности с центром в точке $O(-1;1)$ и радиусом $r=5$.

2. $y=|x+2|+1$.

Строим эти графики функций и показываем решение неравенств штриховкой:



На рисунке жирными линиями выделена фигура, периметр которой мы должны найти.

Находим точки пересечения графиков:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x-y)=23 \\ y=|x+2|+1 \end{cases} \Rightarrow x^2+(|x+2|+1)^2+2(x-(|x+2|+1))=23,$$

$$x^2+|x+2|^2+2|x+2|+1+2(x-|x+2|-1)=23,$$

$$x^2+(x+2)^2+\cancel{2|x+2|}-22+2x-\cancel{2|x+2|}-2=0,$$

$$x^2+x^2+4x+4+2x-24=0,$$

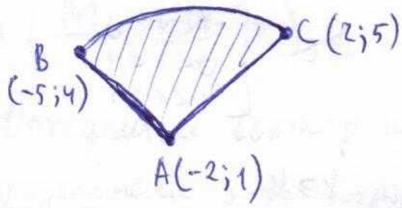
$$2x^2+6x-20=0,$$

$$x^2+3x-10=0.$$

По теореме Виета: $x_1=-5$, $x_2=2$. $y_1=|-5+2|+1=4$, $y_2=|2+2|+1=5$.

Точки пересечения: $(-5;4)$ и $(2;5)$

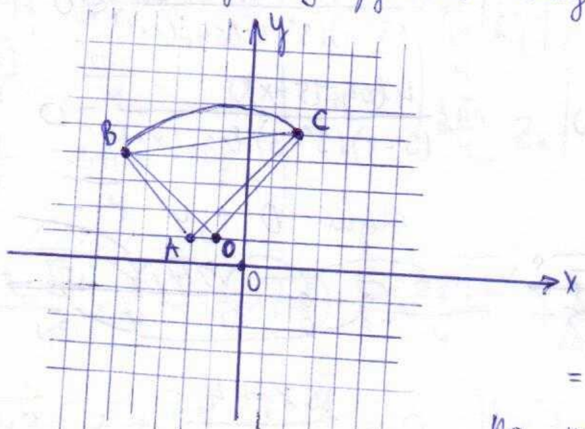
Наименьшее значение функции $y=|x+2|+1$ равно 1 при $x=-2$.



$$AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-5+2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$$

$$AC=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(2+2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$$

Чтобы найти длину дуги BC найдём её градусную меру:



чтобы было легче, начертим на координатной плоскости клетки.

Отмечаем точки A, B, C, O.

Так как O – центр окр, то $\angle BOC = \smile BC$, потому что $\angle BOC$ – центральный.

$$BC=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(2+5)^2+(5-4)^2}=$$

$$=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$ ~~Находим также BO=~~

$BO=CO=r=5$

По теореме косинусов:

$$\cos\angle BOC=\frac{BO^2+CO^2-BC^2}{2\cdot BO\cdot CO}=\frac{5^2+5^2-50}{2\cdot5\cdot5}=\frac{50-50}{50}=0.$$

$\angle BOC=\arccos 0=90^\circ$

Значит $\angle BOC=\smile BC=90^\circ$. ~~Ок~~ Общая гр. мера окружности равна 360°.

Длина окружности $C=2\pi r=2\pi\cdot5=10\pi$. Обозначим длину дуги $|\smile BC|$

$$\frac{360^\circ}{\smile BC}=\frac{C}{|\smile BC|} \Rightarrow \frac{360^\circ}{90^\circ}=\frac{10\pi}{|\smile BC|} \Rightarrow |\smile BC|=\frac{10\pi}{4}=2{,}5\pi$$

20

$$P_{\text{фигуры}}=AB+AC+|\smile BC|=3\sqrt{2}+4\sqrt{2}+2{,}5\pi=7\sqrt{2}+2{,}5\pi$$

Ответ: $7\sqrt{2}+2{,}5\pi$.

N 1. $16\cdot16=196$ клеток.

Если конь стоит на уголках доски (a1), то он угрожает 2 коням: 4 угловых клеток $\cdot 2=8$

Если конь стоит на соседних с угловой ~~ой~~ клеткой клетках (a2, b1), то он угрожает 3 коням:

$8\cdot3=24$.

Если конь стоит на клетках в2 и симметричных ему, то угрожает 4 коням:

$4\cdot4=16$.

Если конь стоит на границе доски, кроме угловых клеток и соседних с ним клеток, то угрожает 4 коням: $48\cdot 4 = 192$.
Если конь стоит на 2 ряду от границы, кроме 4-х крайних угловых клеток, то угрожает 6 коням: $48\cdot 6 = 288$.
Если конь стоит на остальных 144 клетках, то угрожает 8 коням: $144\cdot 8 = 1152$.
Находим сумму всех значений: $8+24+16+192+288+1152 = 1680$.

Ответ: 1680. 12

№5. $\begin{cases} \log_{|x-2|}(ax-a) = 2\log_{|x-2|}(x+y), \\ 4-x = \sqrt{x^2-8x+y+16} \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} ax-a>0 \\ x+y>0 \\ x^2-8x+y+16 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \\ |x-2|>0 \Rightarrow x \neq 2 \\ |x-2| \neq 1 \Rightarrow x \neq 3, x \neq 1. \end{cases}$

$\begin{cases} \log_{|x-2|}(ax-a) = \log_{|x-2|}(x+y)^2, \\ (4-x)^2 = x^2-8x+y+16 \end{cases}$

$\begin{cases} ax-a = (x+y)^2 \\ 16-\cancel{8x}+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+\cancel{8x}-y-\cancel{16}=0 \end{cases}$

$\begin{cases} ax-a = (x+y)^2, \\ \underline{y=0} \end{cases} \Rightarrow ax-a = x^2.$

$ax-a = x^2$
$x^2-ax+a=0$
Так как система имеет 1 реш, то $D=0$.
$D = a^2-4a=0$.
$\underline{x = \frac{a}{2}}$

ограничения!

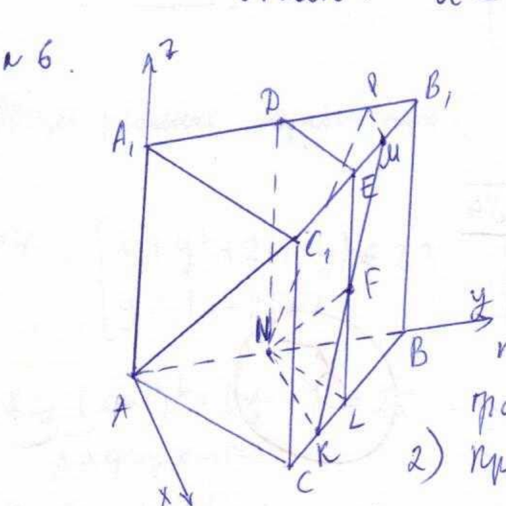
Так как $x+y>0$, то $\underline{x>0}$ (из ОДЗ).

$a^2-4a=0$
$a(a-4)=0$
$\underline{a_1=0}$
$\underline{a_2=4}$.

При $a=0$, $x=0$, $y=0$, т.е. при $a=0$ решение $(0;0)$
При $a=4$, $x=\frac{a}{2}=\frac{4}{2}=2$, $y=0$, при $a=4$ решение $(4;0)$

Ответ: $a=0$, $(0;0)$; $a=4$, $(4;0)$. 5

№6.



Дано: прав. треуг. призма. N - середина AB, $MC_1 = 3B_1M$, $AB = 2\sqrt{14}$, $d(C;\alpha)=1$, $\alpha \parallel AC_1$, α проходит через N, M.

Решение: 1) Продоводим плоскость $\parallel$-ую пл. AA_1C_1 и проходящую через (·) N. Отметим точки пересечения граней и плоскости L, D, E.

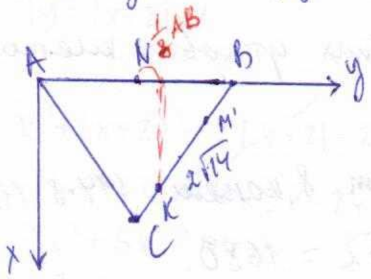
2) Продоводим $NF \parallel AC_1$. Так как $\triangle ACC_1 \sim \triangle NFL$, потому что все ~~ее~~ их стороны $\parallel$-ны, то $\frac{AC}{NL} = \frac{CC_1}{LF} = \frac{AC_1}{NF}$.

NL - является средней линией $\triangle ABC$, т.к. $AC \parallel NL$ и N - середина AB.
По св-ву средней линии $NL = \frac{1}{2}AC$, тогда $LF = \frac{1}{2}CC_1 = \frac{1}{2}EL \Rightarrow$ F - середина EL.

3) α проходит через точку F. Начертим плоскость α. α = пл NKMP.

4) Введём систему координат $Oxyz$.

Найдём координаты точки C:



$x_c = \sqrt{(2\sqrt{14})^2 - (\sqrt{14})^2} = \sqrt{42}$.

$y_c = \sqrt{14}$

$C(\sqrt{42}; \sqrt{14}; 0)$.

Найдём координаты точек N, K, M, плоскости α

$N(0; \sqrt{14}; 0)$

$K\left(\frac{3\sqrt{42}}{4}; \frac{5\sqrt{14}}{4}; 0\right)$

$M\left(\frac{\sqrt{42}}{4}; \frac{7\sqrt{14}}{4}; z_m\right)$. +.

Определяем вектор нормали, находя ур-е плоскости с помощью определителя 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} x & y-\sqrt{14} & z \\ \frac{3\sqrt{42}}{4} & \frac{\sqrt{14}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{42}}{4} & \frac{3\sqrt{14}}{4} & z_m \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{14}}{4} & 0 \\ \frac{3\sqrt{14}}{4} & z_m \end{vmatrix} - (y-\sqrt{14})\begin{vmatrix} \frac{3\sqrt{42}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{42}}{4} & z_m \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} \frac{3\sqrt{42}}{4} & \frac{\sqrt{14}}{4} \\ \frac{\sqrt{42}}{4} & \frac{3\sqrt{14}}{4} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{z_m\sqrt{14}}{4}\cdot x - (y-\sqrt{14})\cdot\frac{z_m\cdot 3\sqrt{42}}{4} + z\left(\frac{9\sqrt{42\cdot 14}}{16} - \frac{\sqrt{42\cdot 14}}{16}\right) = \frac{z_m\sqrt{14}}{4}\cdot x - \frac{z_m\cdot 3\sqrt{42}}{4} +$$

$$+\sqrt{147}\cdot z + \frac{z_m\cdot 3\sqrt{588}}{4} = 0 \;\Big|:\sqrt{7}.$$

$$\frac{z_m\sqrt{2}}{4}\cdot x - \frac{z_m\cdot 3\sqrt{6}}{4} + \sqrt{21}\cdot z + \frac{z_m\cdot 3\sqrt{84}}{4} = 0.$$

$A = \frac{z_m\sqrt{2}}{4}$, $B = \frac{z_m\cdot 3\sqrt{6}}{4}$, $C = \sqrt{21}$, $D = \frac{z_m\cdot 3\sqrt{84}}{4}$.

$$d(C;\alpha) = \frac{|Ax_c + By_c + Cz_c + D|}{\sqrt{A_x^2 + B^2 + C^2}} = 1.$$

5