+1
+1

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

824025

Шифр ______________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Баскаков Анатолий Евгеньевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Кызыл, лицей № 15

Регистрационный номер ШМ6439

Вариант задания 15

Дата проведения “24” февраля 2018 г.

Подпись участника ______________

65 (шестьдесят пять)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12	16	10	15	0					65

824025

Шифр ______

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 15

1) количество натуральных делителей числа $a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{\alpha_n}$, где a_i – простое число, находится по формуле

$(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n+1) = 30 = 2\cdot3\cdot5 = 10\cdot3 = 6\cdot5 = 2\cdot1$

Чтобы число было наименьшим, будем рассматривать степени двойки: 2^{α}, $\alpha+1=30 \Rightarrow \alpha=29$

Пусть 2^{29} – не наименьшее число, тогда возьмём некое $p>2$ и получим число $2^{\alpha_1}\cdot p^{\alpha_2}$, к примеру

$2^{14}\cdot 3^{*} = 2^{14}\cdot 3 < 2^{14}\cdot 2^{14}$

~~Аналогично~~ ~~умен~~ увеличивая количество делителей мы сможем ~~увеличи~~ уменьшить получаемое произведение: $2^4\cdot3^2\cdot5^1$

$(4+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 5\cdot3\cdot2 = 30$

$16\cdot9\cdot5 = 720$

Ответ: 720

12

2) $$\frac{(x+8-4\sqrt{x+5})\cdot\log_2 x}{(25^x-30\cdot5^x+125)\log_5(8-x)} \geq 0$$

ОДЗ: $x+5 \geq 0$; $x \neq 0$; $8-x > 0$; $8-x \neq 1$;
$x \geq -5$ $\quad x < 8$ $\quad x \neq 7$;

$$25^{x} - 30 \cdot 5^{x} + 125 \neq 0$$

$$(5^{x})^{2} - 30 \cdot 5^{x} + 125 \neq 0$$

$$D = 900 - 4 \cdot 125 = 400$$

$$5^{x_1} = \frac{30-20}{2} = 5 \qquad x_1 = 1$$

$$5^{x_2} = \frac{30+20}{2} = 25 \qquad x_2 = 2$$

$$\begin{cases} 0 < x < 8 \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 7 \end{cases}$$

$$x + 8 - 4\sqrt{x+5} = 0$$
$$x + 8 = 4\sqrt{x+5}$$
$$x^2 + 16x + 64 = 16(x+5)$$
$$x^2 = 80 - 64 = 16$$
$$x = \pm 4$$

метод координат: нули функции $-$ $0; 1; 2; 7; 4$

$$\overset{+}{} \quad \overset{+}{} \quad \overset{-}{} \quad \overset{+}{} \quad \overset{-}{}$$
$0 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 8$

$x = 0{,}5$

$$\frac{(0{,}5 + 8 - 4\sqrt{0{,}5+5}) \cdot \log_2 \frac{1}{2}}{(\sqrt{25} - 30 \cdot 5^{\frac{1}{2}} + 125) \cdot \log_5 (8 - 0{,}5)} = \frac{(8{,}5 - 4\sqrt{5{,}5}) \cdot (-1)}{(5 + 125 - 30\sqrt{5}) \cdot \log_5 7{,}5}$$

$$8{,}5 = \sqrt{72{,}25} < \sqrt{88} \Rightarrow (8{,}5 - 4\sqrt{5{,}5}) \cdot (-1) > 0; \ (1)$$

$$130 = \sqrt{16900} > \sqrt{4500}; \quad \log_5 7{,}5 > 0 \Rightarrow$$

$$(130 - 30\sqrt{5}) \log_5 7{,}5 > 0 \Rightarrow \quad (2)$$

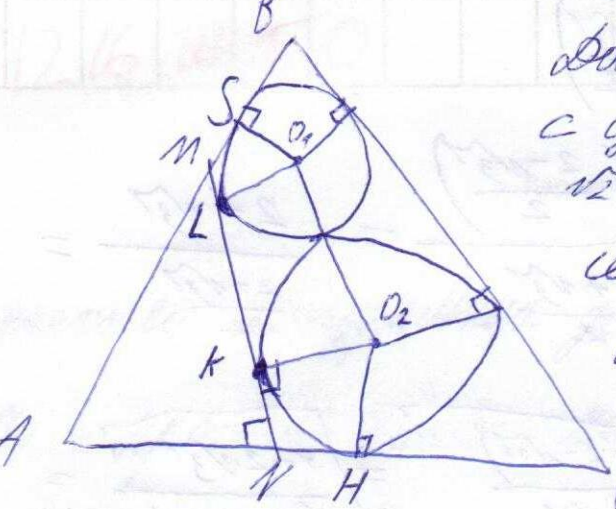
$$\Rightarrow \text{из (1) и (2)} \quad \frac{(8{,}5 - 4\sqrt{5{,}5}) \cdot (-1)}{(130 - 30\sqrt{5}) \log_5 7{,}5} > 0$$

при $1<x<2$ $\log_2 x$ и $25^{-x}-30\cdot 5^{-x}+125$ сменят знак $\Rightarrow$ чередования на этом шаге не будет

Ответ: $(0;1)\cup(1;2)\cup[4;7)$

12

3)

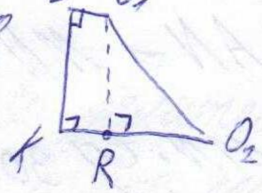


Дано: $\triangle ABC$; окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 и радиусами $\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$ соответственно
ω_1 касается BC, AB и MN
ω_2 касается BC, AC и MN
ω_1 и ω_2 касаются внешним образом;
$\angle AMN = 30°$; $\angle ANM = 90°$

Найти: $S_{\triangle AMN}=?$

Решение: $O_2H \perp AC$ и $MN \perp AC \Rightarrow MN \parallel O_2H$;
$O_2K \perp MN \Rightarrow \angle KO_2H = 360° - \angle NKO_2 - \angle KNH - \angle NHO_2 = 90° \Rightarrow$
$O_2K \parallel NH \Rightarrow KN = O_2H = 3\sqrt{2}$ (1)

Рассмотрим прямоугольную трапецию LO_1O_2K:



$O_1R \perp O_2K \Rightarrow O_2R = O_2K - O_1L = 3\sqrt{2}-\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$;
$O_1O_2 = r_1 + r_2 = \sqrt{2}+3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
По теореме Пифагора, $O_1R = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2R^2} = \sqrt{32-8} =$
$O_1R = KL = 2\sqrt{6}$; (2)
$\angle AMN = 30° \Rightarrow \angle LMS = 150°$, т.к. смежный;
$\angle MSO_1 = \angle MLO_1 = 90° \Rightarrow \angle LO_1S = 30°$
По теореме косинусов, $SL = \sqrt{O_1S^2 + O_1L^2 - 2O_1S\cdot O_1L\cos}$

$SL=\sqrt{2+2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos 30^\circ}=\sqrt{4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=2\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$MS=ML$ как касательные к окружности из одной точки

$SL^2=MS^2+ML^2-2\,MS\cdot ML\cdot\cos\angle SML=2MS^2-2MS^2\cos 150^\circ$

$2MS^2(1-\cos 150^\circ)=4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$MS^2=\dfrac{4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\dfrac{2\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}=$

$=\dfrac{2(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}$; $MS=\sqrt{\dfrac{2(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{(4+2\sqrt{3}):2}}=$

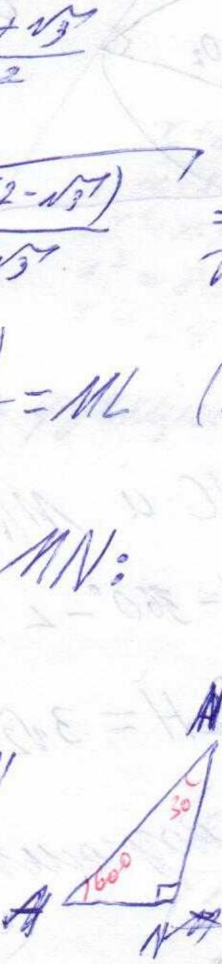
$=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2\cdot 2}{(\sqrt{3}+1)^2}}=\sqrt{2}\dfrac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)}=ML \quad (3)$ +.

из (1), (2) и (3) находим MN:

$MN=3\sqrt{2}+2\sqrt{6}+\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)$

Рассмотрим $\triangle AMN$

$\angle MAN=90^\circ-\angle AMN=60^\circ$



$AN=MN\cdot tg\angle AMN=$

$=MN\cdot tg\,30^\circ=MN\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}+2\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=\sqrt{6}+2\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)$

16.

$S_{\triangle AMN}=\dfrac{MN\cdot AN}{2}=$

~~Ответ:~~ $=\dfrac{14\sqrt{3}+24+(8+4\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)+\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)}{2}$

Ответ: $7\sqrt{3}+12+(4+2\sqrt{3})\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)$ – упростить!

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 824025

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

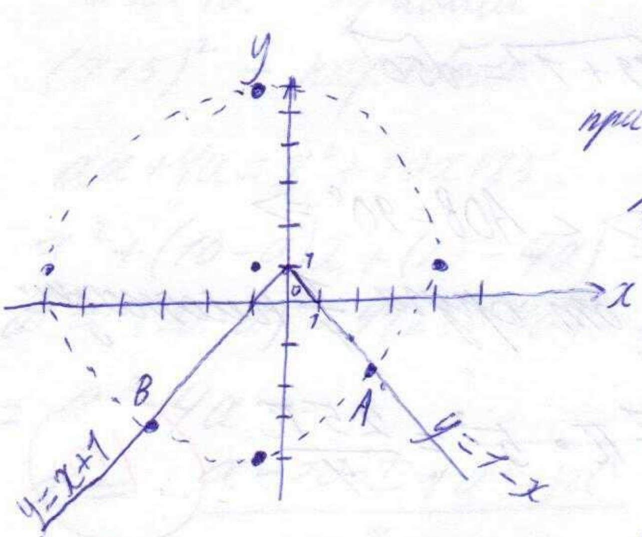
Вариант № 15

4) $\begin{cases} x^2+y^2+2(x-y)\le 23 \\ y\le 1-|x| \end{cases}$

$x^2+y^2+2x-2y = x^2+2x+1-1+y^2-2y+1-1=(x+1)^2-1+(y-1)^2-1$

$= (x+1)^2+(y-1)^2-2\le 23$

$(x+1)^2+(y-1)^2\le 25$ — круг радиусом 5 и центром в $(-1;1)$



при $x\ge 0$, $y\le 1-x$

при $x<0$, $y\le 1+x$

Найдём координаты A и B

$y=1-x$, $x\ge 0$

$(x+1)^2+(-x)^2 = 25$

$x^2+2x+1+x^2 = 25$

$2x^2+2x-24 = 0$

$x^2+x-12 = 0$

$D=1+48=49$

$x_1 = \dfrac{-1-7}{2} = -4$, посторонний корень

$x_2 = \dfrac{-1+7}{2} = 3$

$y = 1-x=-2 \Rightarrow A(3;-2)$

+

$y = x+1, \quad x < 0$

$(x+1)^2 + x^2 = 25$

$2x^2 + 2x - 24 = 0$

$x^2 + x - 12 = 0$

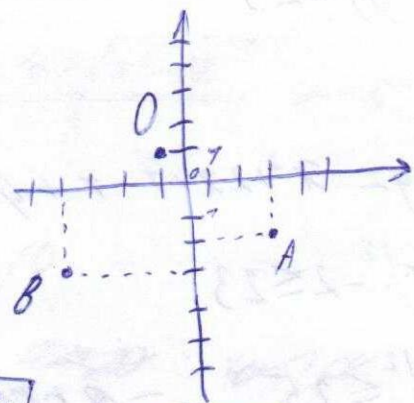
$D = 1 + 48 = 49$

$x_1 = \frac{-1-7}{2} = -4$

$x_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$, посторонний корень

$y = x+1 = -4+1 = -3$

$B(-4; -3)$



$OB = \sqrt{(-1-(-4))^2 + (-3-1)^2} =$

$= \sqrt{9+16} = 5$

$OA = \sqrt{(1-(-2))^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$AB = \sqrt{(3-(-4))^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

$OB^2 + OA^2 = 25 + 25 = 50 = AB^2 \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ \Rightarrow$

радиусы OA и OB отделяют от круга $\frac{1}{4}$ площади:

$S_{фигуры} = \frac{1}{4} S_{круга} = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 5^2 = \frac{25\pi}{4}$

Ответ: $\frac{25\pi}{4}$

10

5) $\begin{cases} \log_{|x+3|}(ax+4a) = 2\log_{|x+3|}(x+y) \\ x+1+\sqrt{x^2+2x+y-4} = 0 \end{cases}$

ОДЗ: $x+1 \le 0 \quad x \le -1$

$x^2+2x+y-4 \ge 0$

$a(x+4)>0$

$x+y>0$

$x+3\neq 0$

$x\neq -3$

$|x+3|\neq 1$

$x\neq -2$

ОДЗ ⊖

$x^2+2x+y-4=x^2+2x+1-1+y-4=(x+1)^2+y-5$

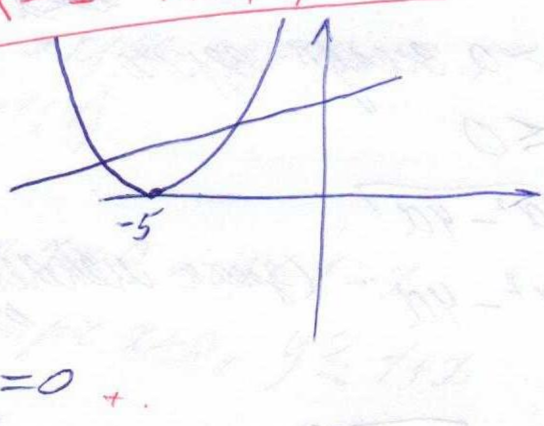
если $y-5$ не равно нулю, то $\sqrt{(x+1)^2+y-5}$ по модулю отлично от $x+1$ и тогда

$x+1+\sqrt{x^2+2x+y-4}\neq 0 \Rightarrow y-5=0,\ y=5$

$\log_{|x+3|}(a(x+4))=\log_{|x+3|}(x+5)^2 \Rightarrow$

$5<x\le -1 \quad x\neq -4; -3; -2.$

$a(x+4)=(x+5)^2$



$ax+4a$ – прямая

$(x+5)^2$ – парабола

$ax+4a=x^2+10x+25$

$x^2+(10-a)x+(25-4a)=0$

$D=(10-a)^2-4(25-4a)=100-20a+a^2-100+16a=$

$=a^2-4a$

$x=\dfrac{a-10\pm\sqrt{a^2-4a}}{2} \Rightarrow$ два различных решения может быть только при $a^2-4a>0$

$a(a-4)=0$

$+\ \ 0\ \ -\ \ 4\ \ +$

$a\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$,

$-1(-1-4)=5$

но по ОДЗ $x\le -1 \Rightarrow$

прямая $ax+4a$ не должна пересечь параболу в точке с $x>-1$

$\cancel{a(x+4)}$ $(-1+5)^2=16$

$a(-1+4)\leq 16$

$\boxed{a\leq \frac{16}{3}}$, также $a(x+4)$ не пересекает $(x+5)^2$ в $x=-2$ и $x=-3$

~~Ответ: $a\in(-\infty;$~~

$(-3+5)^2=4$ $(-2+5)^2=9$

$a(-3+4)\neq 4$ $a(-2+4)\neq 9$

$\boxed{a\neq 4}$ $\boxed{a\neq 4{,}5}$

по ОДЗ $x+4>0$

$x>-5 \Rightarrow \frac{a-10+\sqrt{a^2-4a}}{2}>-5$

$(-5+5)^2=0$

$a-10+\sqrt{a^2-4a}>-10$

$a+\sqrt{a^2-4a}>0$ $\cancel{\Rightarrow}$ $\cancel{a<0}$

при $a>0$ всегда верно

при $a\leq 0$

$a>-\sqrt{a^2-4a}$

$a^2<a^2-4a$ (знак меняется, домножаем на отрицательные числа)

$4a<0$

$a<0 \Rightarrow \boxed{a\neq 0}$

~~Ответ: $a\in(-\infty;0)\cup(4;4{,}5)\cup(4{,}5;\frac{16}{3}]$;~~

~~$\left(\frac{a-10+\sqrt{a^2-4a}}{2};5\right)$ и $\left(\frac{a-10-\sqrt{a^2-4a}}{2};5\right)$~~

$\frac{a-10-\sqrt{a^2-4a}}{2}>-5$

$a-10-\sqrt{a^2-4a}>-10$

$a-\sqrt{a^2-4a}>0$

$a>\sqrt{a^2-4a}$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 824025

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 15

при $a \geq 0$

$a^2 > a^2 - 4a$

$4a > 0$

$a > 0$

при $a < 0$ нет решений!

$a^2 < a^2 - 4a$

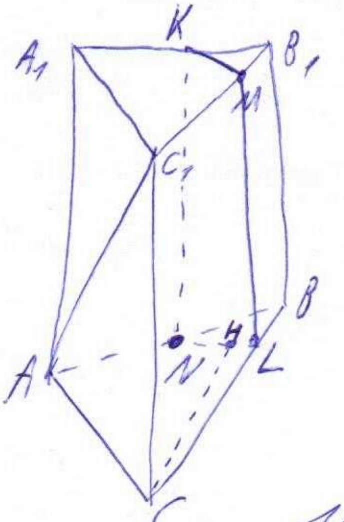
$4a < 0$

$a < 0$

Ответ: $a \in \cancel{(-\infty; 0)} \cup (4; 4{,}5) \cup (4{,}5; \frac{16}{3}]$;

$\left(\dfrac{a - 10 + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}; 5\right)$ и $\left(\dfrac{a - 10 - \sqrt{a^2 - 4a}}{2}; 5\right)$ 15

6)



Дано: правильная призма $ABCA_1B_1C_1$;

$MC_1 = 3MB_1$; $AN = BN$

плоскость $\alpha \parallel AC_1$, $N \in \alpha$; $M \in \alpha$ =

$\alpha \parallel AA_1C_1C$; $CH \perp NL$; $CH = 1$

$AB = 2\sqrt{14}$

Найти: $V_{KMB_1NLB} = ?$; $V_{AKMC_1ANLC} = ?$

Решение:

0