Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

111149

Шифр ______________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Варфоломеев Александр Сергеевич

Город, № школы (образовательного учреждения) г.о. Балашиха, МБОУ "Лицей"

Регистрационный номер ШМ 5536

Вариант задания 18

Дата проведения "11" марта 20 18 г.

Подпись участника Варф

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

сорок четыре

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12	0	20	0	0					44

111149

Шифр ______________

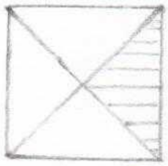
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

1149

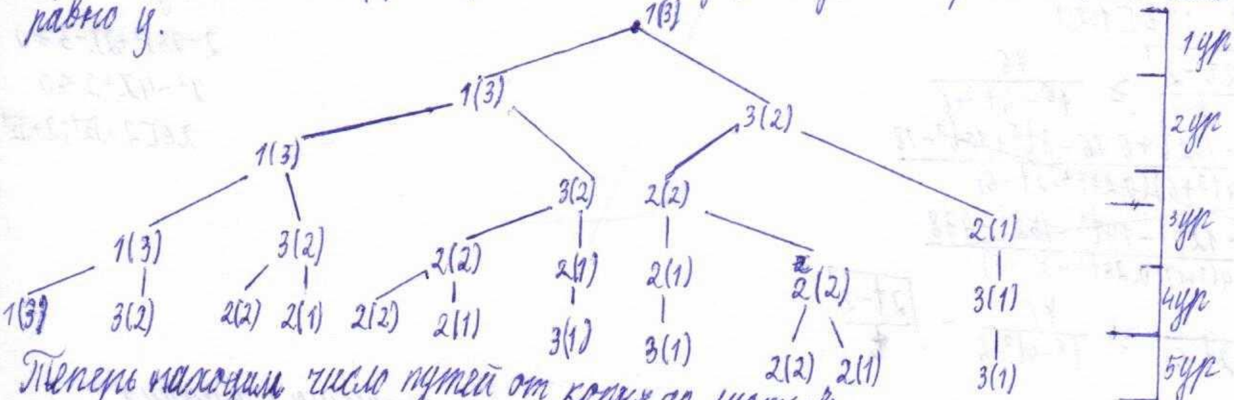
111149

Вариант № 18

№1



Рассмотрим вначале ситуацию, когда все 5 кусков стекла абсолютно одинаковы. Тогда ~~и~~ на основании количества незакрашенных четвертей стопки можно построить дерево, где корнем является первое стекло в стопке, а у последующих уровней указано количество вариантов установки стекла, ~~чтобы~~ при которых число прозрачных четвертей становится равным некоторому числу. Пусть запись $x(y)$ будет означать, что существует x вариантов, что число прозрачных четвертей равно y.



Теперь находим число путей от корня до листьев:

$S = 3\cdot2\cdot3\cdot3 + 3\cdot2\cdot2\cdot4 + 3\cdot2\cdot2\cdot3 + 3\cdot2\cdot3 + 3\cdot2\cdot4 + 3\cdot4 + 4 = 54+48+36+18+24+12+4 = 196$

Т.к. куски стекла различны, то кол-во вариантов их порядка в стопке равно $5! = 120$

Тогда общее кол-во укладки стёкол равно $196\cdot120 = 23520$

Ответ: 23520.

№2

$\sin^4(2022x) + \cos^{2017}(2019x)\cos^{2018}(2022x) = 1$

$\sin^4(2022x) + \cos^{2017}(2019x)\cos^{2017}(2022x)\cdot\cos^{2017}(2022x) = 1$

Замена: $t = \cos(2022x) \in [-1;1]$

$k = \cos^{2017}(2019x)\cos^{2016}(2022x) \in [-1;1]$

$(1-t^2)^2 + kt^2 = 1$

$t^4 - 2t^2 + 1 + kt^2 = 1$

$t^4 - 2t^2 + kt^2 = 0$

~~$t(t^3-2t+k)=0$~~

$t^2(t^2+k-2)=0$

$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t^2 = 2-k \Rightarrow, \text{т.к. } t,k \in [-1;1], \text{ то } t^2 \in [0;1], \text{ т.е. } t=\pm1;\ k=1 \end{array}\right.$

Вернёмся к замене:

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2022x=0\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos 2022x=-1\\ \cos 2022x=1\end{array}\right.\\ \cos^{2017}2019x\cdot\cos^{2016}2022x=1\end{cases}\end{array}\right.
\qquad
\left[\begin{array}{l}\cos 2022x=0\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos 2022x=-1\\ \cos 2022x=1\end{array}\right.\\ \cos 2019x=1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\cancel{\left[\begin{array}{l}\cos 2022x=0\\ \cos 2022x+\cos 2019x=0\\ \cos\end{array}\right.}$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4044}+\pi n/2022,\ n\in Z\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2022}+\frac{2\pi n}{2022},\ n\in Z\\ x=\frac{\pi}{2022}+\frac{2\pi n}{2022},\ n\in Z\end{array}\right.\\ x=\frac{2\pi n}{2019},\ n\in Z\end{cases}\end{array}\right.$$

$\frac{2\pi n}{2019}=\frac{\pi m}{2022}$

$4044n=2019m$

$\cancel{m=4044k}$

$\cancel{n=2019k}$

$m=1348k$

$n=673k$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4044}+\frac{\pi n}{2022},\ n\in Z\\ x=\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4044}+\frac{\pi n}{2022},\ n\in Z;\ \frac{2\pi n}{3},\ n\in Z.$

12

№4.

$\frac{3}{4}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)+\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}\geq 19\,g(g^3(x))$, при $g(x)=\frac{4}{x^2-4x+6}$; $g(x)>0$; $g(x)\in \cancel{[2;+\infty)}\ (0;2]$ ОДЗ:

$2-\frac{2}{g(x)}\geq 0$

$2-0,5x^2+2x-3\geq 0$

$x^2-4x+2\leq 0$

$x\in[2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}]$

Замена: $t=g(x)>0$; $t\in[1;2]$

$$\frac{3}{0,25t^2-2t+6}+\sqrt{\frac{2t-2}{t}}\geq\frac{76}{t^6-4t^3+6}$$

$$\cancel{\sqrt{\frac{2t-2}{t}}\geq\frac{19t^2-152t+6\cdot 76-3t^6+12t^3-18}{(t^6-4t^3+6)(0,25t^2-2t+6)}}$$

$$\cancel{\sqrt{\frac{2t-2}{t}}\geq-\frac{3t^6-12t^3-19t^2+152t-438}{(t^6-4t^3+6)(0,25t^2-2t+6)}}$$

$$\cancel{\frac{2t-2}{t}}\quad\frac{3}{0,25t^2-2t+6}\geq\frac{76}{t^6-4t^3+6}-\sqrt{\frac{2t-2}{t}}$$

$f(t)=\sqrt{2-\frac{2}{t}}$

$f'(t)=\frac{\frac{2}{t^2}}{2\sqrt{2-\frac{2}{t}}}=\frac{1}{t^2\sqrt{2-\frac{2}{t}}}>0\Rightarrow f(t)=\sqrt{\frac{2t-2}{t}}$ – бесконечно возрастающая функция

$$1+\frac{0,25t^2-2t+6}{3}\sqrt{\frac{2t-2}{t}}\geq\frac{19t^2-152t+456}{3(t^6-4t^3+6)}$$

$$3+(0,25t^2-2t+6)\sqrt{\frac{2t-2}{t}}\geq\frac{19t^2-152t+456}{t^6-4t^3+6}$$

$f+(0,25t^2-2t+6)\sqrt{\frac{2t-2}{t}}$ – бесконечно возрастающая функция (производная всегда положительна

$\frac{19t^2-152t+456}{t^6-4t^3+6}$ – ~~бесконе~~ функция, убывающая на промежутке $[1;2]$

Тогда у функций $3+(0,25t^2-2t+6)\sqrt{\frac{2t-2}{t}}$ и $\frac{19t^2-152+456}{t^6-4t^3+6}$ может быть не более 1 общей точки. Эта точка $t=2$. Тогда $t\in[2;+\infty)$, но т.к. $t\in[1;2]$, то $t=2$.

Вернёмся к замене: $\frac{4}{x^2-4x+6}=2$

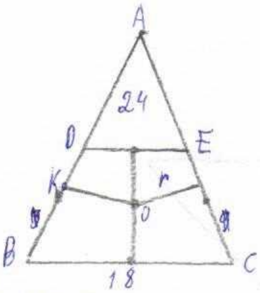
$4=2x^2-8x+12$

$x^2-4x+4=0$

$x=2$

Ответ: 2.

20



№3.

Дано:

$S_{ADE} = 24$

$AK = 12$

$BC = 18$

Решение:

*: