Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

111510

Шифр ______________________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету Математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Перевалов Николай Сергеевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, ГБОУ "Школа №1101"

Регистрационный номер ШМ 4886

Вариант задания 20

С работой ознакомлен 16.03.2018

Дата проведения "11" Марта 2018 г.

Подпись участника

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

64 (шестьдесят четыре) Таб

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 12 | 0 | 20 | 20 | 0 | | | | | 64 |
| | | | | | | | | | | |

111510

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

510

Вариант № 20

№1

На первое стекло ~~второе~~ можно положить двумя способами, либо закрашеной частью на прозрачную, либо закрашеной на закрашенную. Для первого способа ~~число~~ кол-во возможных вариантов равно $2^4$.

~~[illegible]~~ Если ~~мы~~ закрашенные части второго стекла кладутся на закрашенные части первого, то ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ третье стекло также можно положить ~~[illegible]~~ либо закрашенной частью на закрашенную, либо на прозрачную. Если ~~[illegible]~~ закрашенные части кладут на прозрачн. то число способов равно $2^3$, если нет, то повторяются выше приведенные рассуждения.

Итак, для 1 набора стекол существует $2^4+2^3+2^2+2+1$ способов ~~[illegible]~~ укладки, т.к. все стекла разноцветные, то число ~~наборов на~~ наборов равно 5!

Общее число способов ~~равно~~ $5!\cdot(2^4+2^3+2^2+2+1) = 3720$

Ответ: 3720

№ 4

$$\frac{7}{9}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)+2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}} \geq 13g(g^2(x)) \qquad g(x)=\frac{9}{x^2-6x+12}$$

$g(x)=\frac{9}{f(x)}$ $\quad f(x)=x^2-6x+12$

$f(x)\in[3;+\infty)$ , т.к. $x_0=\frac{6}{2}=3$ ; $f(3)=3$.

$g(x)\in(0;3]$ ; $2-\frac{3}{g(x)}\geq 0 \Rightarrow g(x)\geq\frac{3}{2}$ $\quad g(x)\in\left[\frac{3}{2};3\right]$

$h(x)=\frac{7}{9}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)+2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}$

$k(x)=13g(g^2(x))$ $\quad g^2(x)\in\left[\frac{9}{4};9\right]$ $\quad g(g^2(x))\in\left[\frac{3}{13};3\right]$ $\quad k(x)\in[3;39]$ $\min(k(x))=k(3)=3$

$\frac{g(x)}{3}\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ $\qquad 2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}\in[0;2]$ $\qquad 2\sqrt{2-\frac{3}{\frac{3}{2}}}=0$ ; $2\sqrt{2-\frac{3}{3}}=2$ ;

$g\left(\frac{g(x)}{3}\right)\in\left[\frac{4}{5};\frac{9}{7}\right]$ $\qquad \frac{7}{9}g\left(\frac{\frac{3}{2}}{3}\right)=\frac{28}{45}$ ; $\frac{7}{9}g\left(\frac{3}{3}\right)=1$ $\Rightarrow \max(h(x))=h(3)=3$

$\frac{7}{9}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)\in\left[\frac{28}{45};1\right]$

$\min(k(x))=\max(h(x))=3$ – единственное решение $g(x)=3$

$g(x)=3$

$\boxed{x=3}$ ← почему?

Ответ: $x=3$

№5

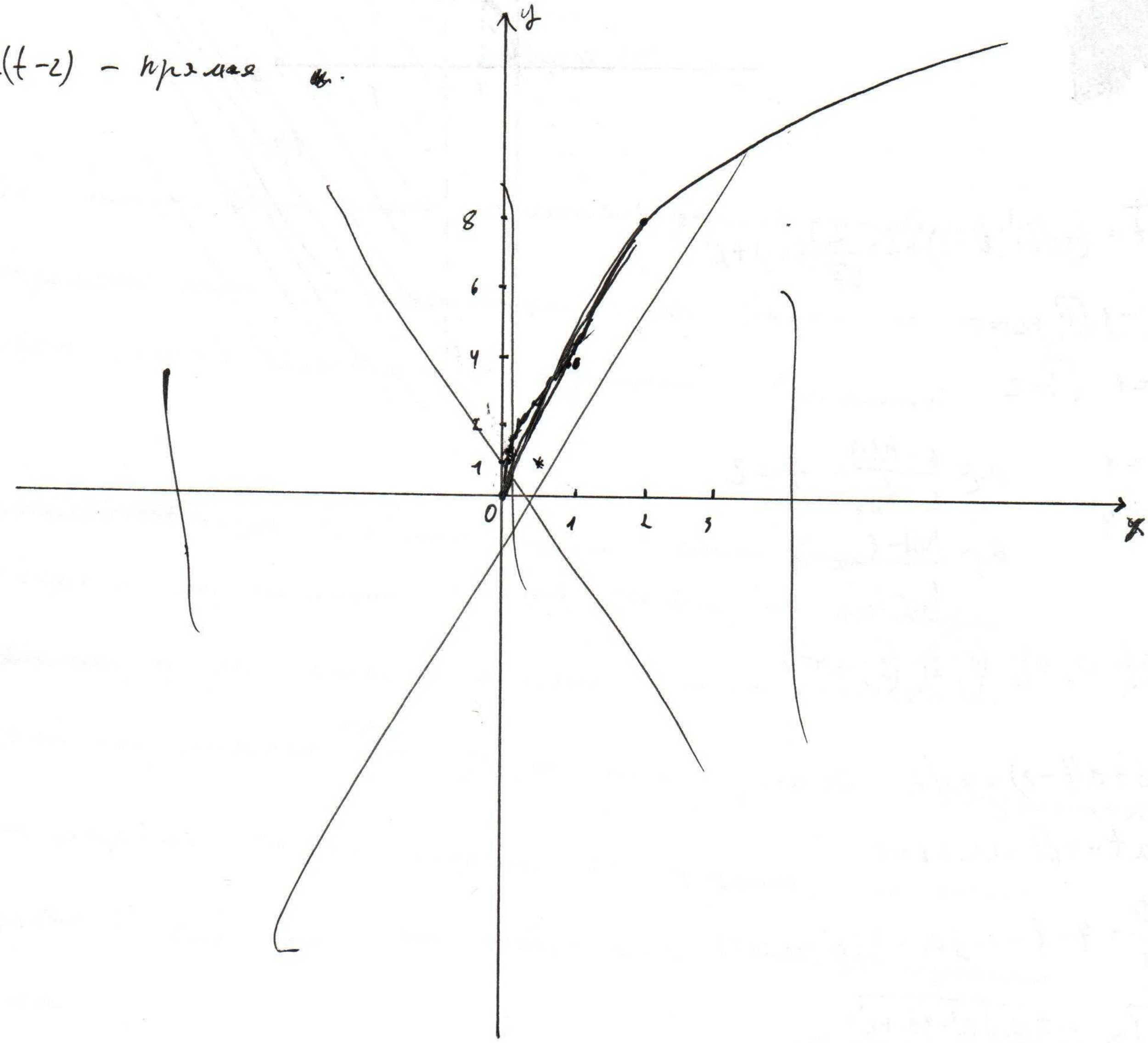
$2a+2\sqrt{2(x+6\operatorname{ctg}x)+|x+6\operatorname{ctg}x|}=6+a(x+6\operatorname{ctg}x)$

$\exists\ x+6\operatorname{ctg}x=t\ ;\ t\in(-\infty;+\infty)$

$2\sqrt{2(t+|t|)}=6+a(t-2)$

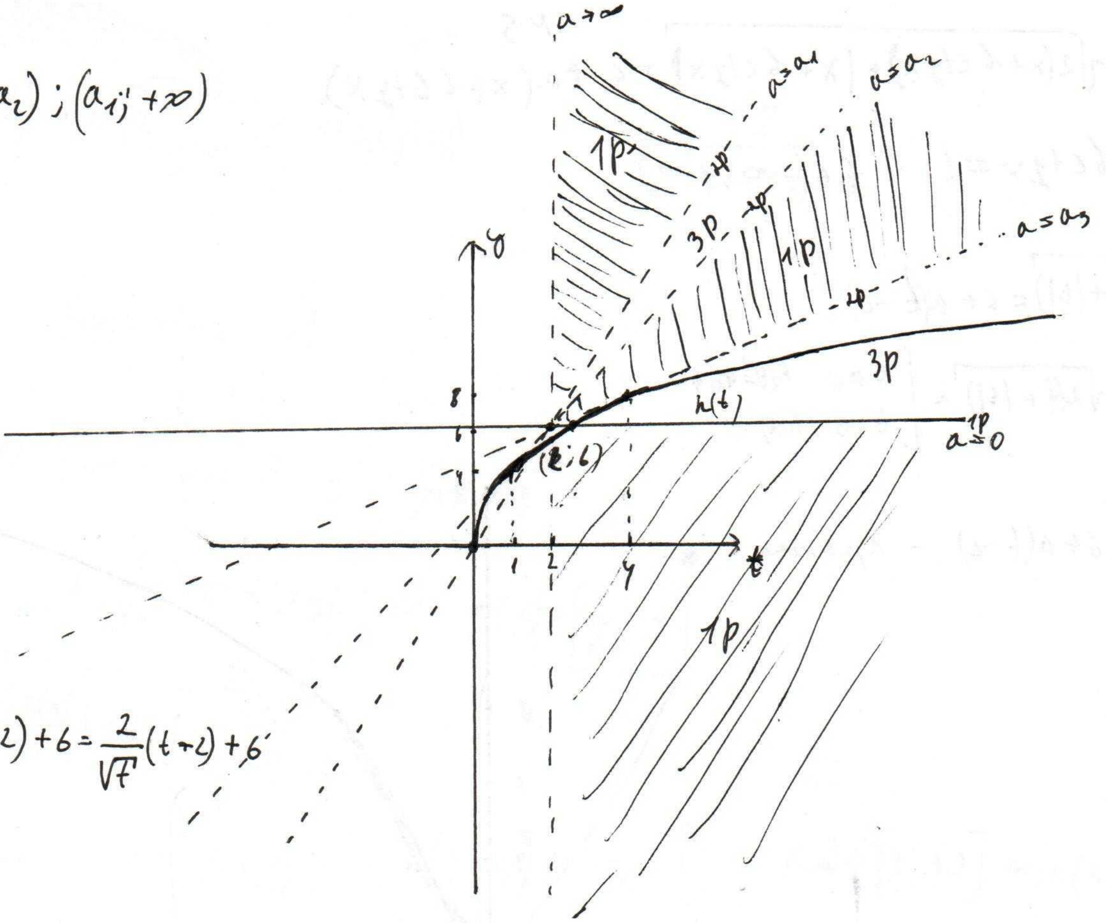
$h(t)=2\sqrt{2(t+|t|)}=\left[\begin{array}{ll} t\geq 0 & h(t)=4\sqrt{t} \\ t<0 & h(t)=0 \end{array}\right.$

$g(t)=6+a(t-2)$ – прямая



$a\in(-\infty;0];(a_3;a_2);(a_1;+\infty)$

[redacted]




$0=6+a_1(0-2)$

$a_1=3$

[redacted]

$4\sqrt{t}=(4\sqrt{t})'(t-2)+6=\frac{2}{\sqrt{t}}(t-2)+6$

$t-3\sqrt{t}+2=0$

$\sqrt{t}=1 \quad \sqrt{t}=2$

$t_{k1}=1 \qquad a_2=\frac{6-h(1)}{2-t_{k1}}=\frac{2}{1}=2$

$t_{k2}=4 \qquad a_3=\frac{h(4)-6}{t_{k2}-2}=1$

$a\in(-\infty;0);(1;2);(3;+\infty)$

$6+a(t-2)=4\sqrt{t}$

$at-4\sqrt{t}-2a+6=0$

$\frac{D}{4}=4-(6-2a)a=2(a^2-3a+2)$

$\sqrt{t}=\frac{2\pm\sqrt{2}\sqrt{a^2-3a+2}}{a}\geq 0$

---

$a\in(-\infty;0)$ $\quad \left.\begin{array}{l}\sqrt{a^2-3a+2}\geq\sqrt{2}\\ a<0\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt{t}=\frac{2-\sqrt{2}\sqrt{a^2-3a+2}}{a} \quad t=\frac{(2-\sqrt{2}\sqrt{a^2-3a+2})^2}{a^2}$

$a=0 \quad 4\sqrt{x}=6 \quad x=\frac{9}{4}$

$a>3$ $\quad \left.\begin{array}{l}\sqrt{a^2-3a+2}\geq\sqrt{2}\\ a>0\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt{t}=\frac{2+\sqrt{2}\sqrt{a^2-3a+2}}{a} \quad t=\frac{(2+\sqrt{2}\sqrt{a^2-3a+2})^2}{a^2}$

$x+b\,\mathrm{ctg}\,x=\mathrm{const}$ при $b\neq 0$ имеет бесконечное число решений, т.к. $\mathrm{ctg}\,x\in(-\infty;+\infty)$; $\mathrm{ctg}\,x$ – периодическая функция $\Rightarrow b=0$

Ответ: $a\in(-\infty;0)$; $b=0$ $x=\frac{(2-\sqrt{2}\sqrt{a^2-3a+2})^2}{a^2}$; $a=0$ $b=0$ $x=\frac{9}{4}$; $a>3$ $b=0$ $x=\frac{(2+\sqrt{2}\sqrt{a^2-3a+2})^2}{a^2}$.

$a\in(1,2)$ –? $\quad a=1,2$?

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |

Шифр 111510

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 20

№ 2

$$\sin^4(2019x)+\cos^{2019}(2022x)\cos^{2018}(2019x)=1$$

$$\cos^{2019}(2022x)\cos^{2018}(2019x)=1-\sin^4(2019x)=(1-\sin^2(2019x))(1+\sin^2(2019x))=$$

$$\cos^{2018}(2019x)\cos^{2019}(2022x)=\cos^2(2019x)(1+\sin^2(2019x))$$

$] \cos(2019x)=0$, $\quad 0=0$ – верно $\Rightarrow$ $\cos 2019x=0$ – решение

$$\cos^{2016}(2019x)\cos^{2019}(2022x)=1+\sin^2(2019x)$$

$$\cos^{2016}(2019x)\cos^{2019}(2022x)\le 1 \quad ; \quad 1+\sin^2(2019x)\ge 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin(2019x)=0 \\ \cos(2019x)=\pm 1 \\ \cos^{2019}(2022x)=1 \end{cases} \\ \cos(2019x)=0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2019x=\pi k \\ 2019x=\pi k \\ 2022x=2\pi l \end{cases} \\ 2019x=\frac{\pi}{2}+\pi m=\frac{\pi+2\pi m}{2} \end{array}\right. \qquad k;\ l;\ m\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi k}{2019}=\frac{\pi l}{1011}$$

$$1011k=2019l$$

$$337k=673l$$

$$k=673n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2019x=673\pi n \\ 2019x=\frac{\pi+2\pi m}{2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi n}{3} \\ x=\frac{\pi+2\pi m}{4038} \end{array}\right. \qquad n;\ m\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x=\frac{\pi n}{3}$ $\quad x=\frac{\pi+2\pi m}{4038}$