Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

111558

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Подлесных Иван Михайлович

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Москва, лицей №1580 при МГТУ имени Н.Э. Баумана.

Регистрационный номер ШМ5248

Вариант задания 19

+1 лист Таб

+1 лист Таб

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника ____________

58 (пятьдесят восемь)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

111558

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
6	12	0	20	–	20					58

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

558

Вариант № 19

№6

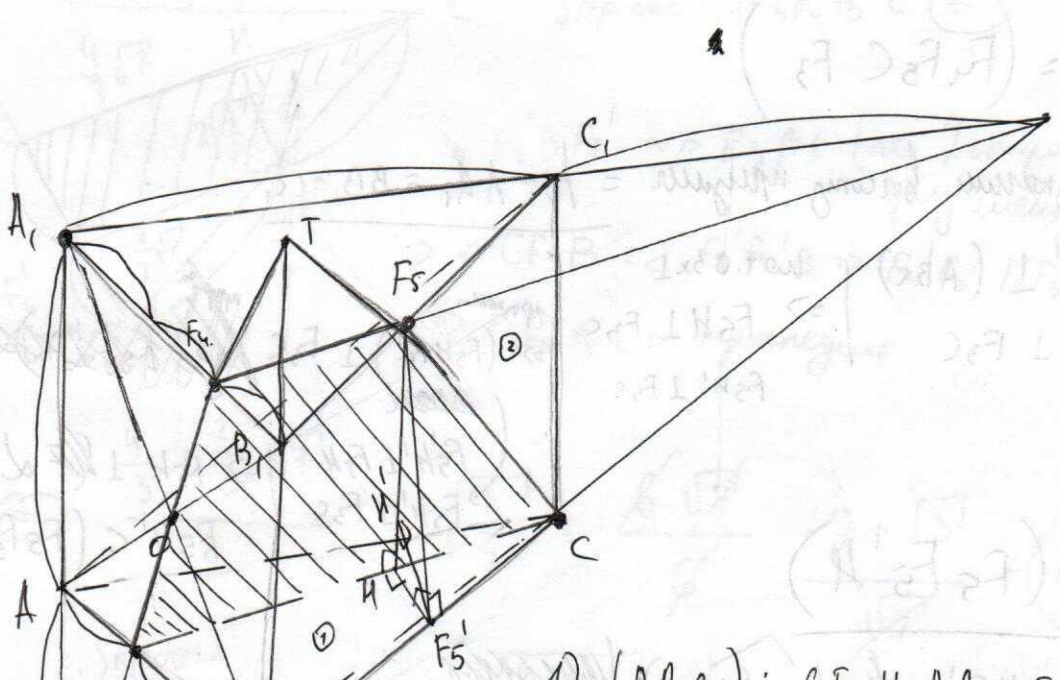
Дано: правильная ~~пира~~ призма $ABCA_1B_1C_1$ $\triangle ABC$ - р/с (сторона = 4)

$\alpha = (\parallel AC_1 ; C ; O)$

$S_{сеч\,\alpha} = \frac{9}{\sqrt{5}}$ $V_1 = ?$ $V_2 = ?$

O-центр пл-сти AA_1B_1B

(объём фигур на которые делит α).

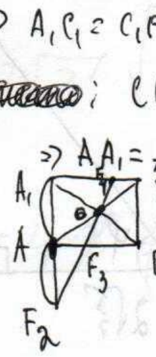


1) (AA_1C_1): $CF_1 \parallel AC_1$; $F_1 = CF_1 \cap (A_1C_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1C_1 = C_1F_1$ (т.к. пар-м).

~~[illegible]~~; $CF_2 \parallel AC_1$; $F_2C \cap (AA_1) = F_2$

$\Rightarrow AA_1 = AF_2$ (т.к. пар-м).



2) (AA_1B_1): $F_2O \cap AB = F_3$

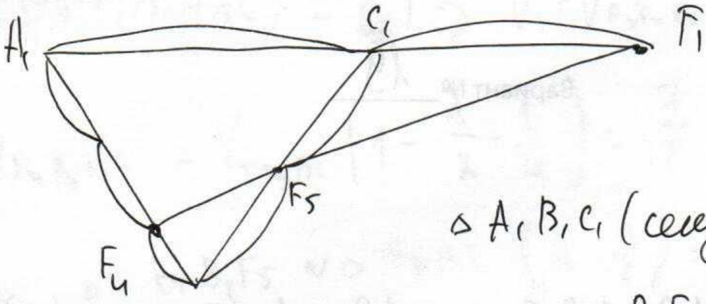
$F_2O \cap A_1B_1 = F_4$

о $\triangle AF_2F_3 \sim \triangle A_1F_2F_4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2AF_3 = A_1F_4 \Rightarrow$

(т.к. симм-ия отн. т. O) $\Rightarrow \dfrac{AF_3}{F_3B} = \dfrac{B_1F_4}{F_4A_1} = \dfrac{AF_3}{A_1F_4} = \dfrac{1}{2}$

3) $(A_1B_1C_1)$: $F_4F_1 \cap B_1C_1 = F_5$



$\triangle A_1B_1C_1$ (секущ. F_4F_1) по т. Менелая

$$\frac{B_1F_5}{F_5C_1} \cdot \frac{C_1F_1}{F_1A} \cdot \frac{AF_4}{F_4B_1} = 1$$

$$\frac{B_1F_5}{F_5C_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

$B_1F_5 = F_5C_1 \Rightarrow F_5$ – середина B_1C_1

$\alpha = (F_4F_5CF_3)$

4) обозначим высоту призмы $= h = AA_1 = BB_1 = CC_1$

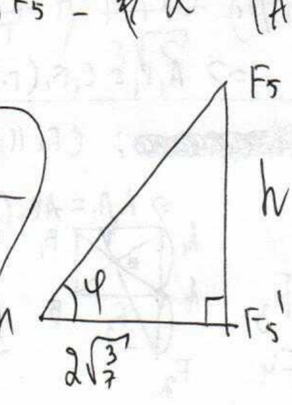
5) $F_5F_5' \perp (ABC)$, $F_5H \perp F_3C$ $\Big|$ по т. о 3х $\perp$ $\Rightarrow F_5H \perp F_3C$, $F_5H' \perp F_3C$ $\Big|$ признак $\Rightarrow (F_5HF_5') \perp F_3C$

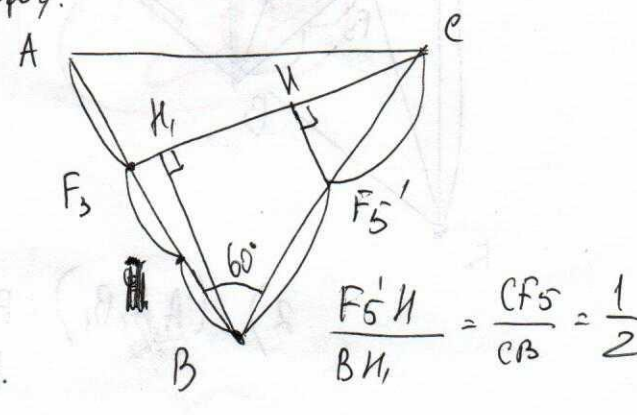
$F_5'H' \perp F_5H$, $F_5H' \perp F_3C$ $\Big|$ $\Rightarrow F_5H' \perp \alpha$; $F_5H' \subset (F_5F_5'H)$ $\Big|$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \perp (F_5F_5'H)$

$\varphi = \angle F_5HF_5' = \angle(\alpha, (ABC))$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{HF_5'} = \frac{h\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$$





$$\frac{F_5'H}{BH_1} = \frac{CF_5}{CB} = \frac{1}{2}$$

по т. cos ⇒ $\triangle BF_3C$

$\angle B = 60°$; $F_3B = \frac{2}{3}\cdot 4$; $BC = 4$

$$CF_3 = 4\sqrt{1+\frac{4}{9} - \cancel{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{\cancel{2}}} = 4\sqrt{\frac{9+4-6}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{7} \Rightarrow$$

аналогично

$\left(\Rightarrow F_4'F_5' = \frac{2}{3}\sqrt{7}\right.$

по т. sin $\triangle BF_3C$

$\beta = \angle CF_3B$

$$\frac{F_3C}{\sin 60°} = \frac{BC}{\sin\beta}$$

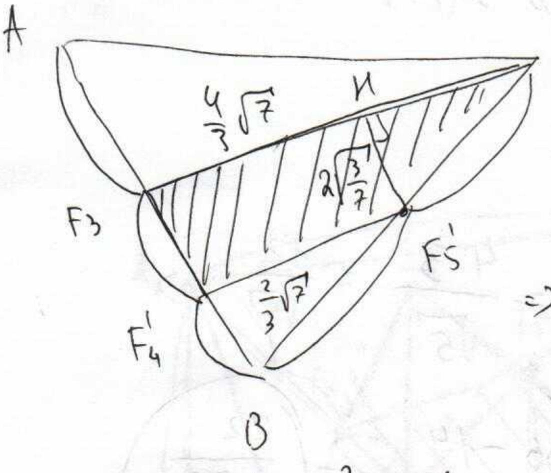
$$\frac{\cancel{4}\sqrt{7}\cdot 2}{3\cdot\sqrt{3}} = \frac{\cancel{4}}{\sin\beta}$$

$$\sin\beta = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$BH_1 = F_3B\cdot\sin\beta = \frac{2}{\cancel{3}}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} = 4\sqrt{\frac{3}{7}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_5'H = 2\sqrt{\frac{3}{7}}$$

6)



$S_{пр.сеч} = S_{F_3F_4'F_5'C} =$

$\triangle F_4'BF_5' \sim \triangle F_3BC$ (по 2 сторонам и углу между ними) ⇒

⇒ $\angle CF_3B = \angle F_5'F_4'B \Rightarrow F_4'F_5' \parallel F_3C \Rightarrow$

⇒ $F_3F_4'F_5'C$ — трапеция

$$= \frac{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7}}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\cancel{6}\sqrt{\cancel{7}}}{\cancel{6}}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{\cancel{7}}} = 2\sqrt{3}$$

7) $S_{сеч\,\alpha} = \frac{S_{проекц.\alpha}}{\cos\varphi} = S_{пр\,сеч}\cdot\sqrt{1+tg^2\varphi}$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1+tg^2\varphi$$

$$\frac{9}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{3}\sqrt{1+\frac{h^2\cdot 7}{4\cdot 3}}$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+tg^2\varphi}$$

$$\frac{9\cdot 3\cdot\cancel{3}}{5} = 4\cdot\cancel{3}\left(1+\frac{h^2\cdot 7}{4\cdot 3}\right)$$

$$\frac{27}{20}-1=\frac{h^2\cdot \cancel{7}}{\cancel{4}\cdot 3}=\frac{\cancel{7}}{\cancel{20}\,5}\qquad h^2=\frac{3}{5}$$

$$\boxed{h=\sqrt{\frac{3}{5}}}$$

8) $(BB_1)\cap(F_3F_4)\cap(F_5C)=T \Rightarrow V_1=V_{F_3F_4F_5CBB_1}=$

$$=V_{TF_3BC}-V_{F_4B_1F_5T}=V_{TF_3BC}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{8}\cdot V_{TF_3BC}=\frac{7}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{8}\cdot 2}{3\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{14}{3\sqrt{5}}$$

$\frac{TB_1}{TB}=\frac{1}{2}$; $\triangle F_4B_1F_5 \sim \triangle F_3BC$ $\left(k=\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{F_4B_1F_5}}{S_{F_3BC}}=\frac{1}{4}$$

$$V_{TF_3BC}=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{4}\cdot 4\cdot\frac{2}{3}=\frac{2\cdot\cancel{3}\cdot 4\cdot 2}{\cancel{3}\cdot 3\cdot\sqrt{5}}=\frac{8\cdot 2}{3\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{3}\cdot 2h\cdot \underset{\frac{1}{2}\cdot\sin 60^\circ\cdot BF_3\cdot BC}{\underset{\shortparallel}{S_{F_3BC}}}$$

9) $V_{призм.}=h\cdot S_{ABC}=\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{4}\cdot 4=\frac{4\cdot 3}{\sqrt{5}}=\frac{12}{\sqrt{5}}\Rightarrow$

$$\Rightarrow V_2=V_{призм}-V_1=\frac{12\cdot 3}{3\sqrt{5}}-\frac{14}{3\sqrt{5}}=\frac{36-14}{3\sqrt{5}}=\frac{22}{3\sqrt{5}}$$

Ответ: $\frac{14}{3\sqrt{5}}$ (ед^3); $\frac{22}{3\sqrt{5}}$ (ед^3)

20

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 111558

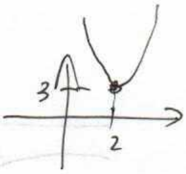
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

№4.

$$\overbrace{\frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{2}\right)}^{1} + \overbrace{\sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}}}^{2} \geq \overbrace{13\, g\left(g^3(x)\right)}^{3}$$

$$g(x) = \frac{6}{x^2 - 4x + 7}$$



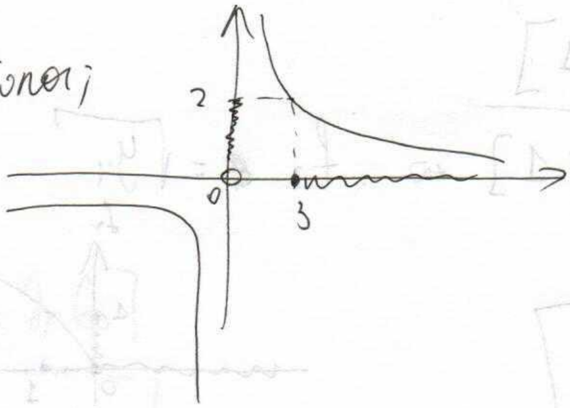
$y_1 = x^2 - 4x + 7$ – парабола, ветви вверх

$x_в = \frac{4}{2} = 2;\ y_в = 4 - 8 + 7 = 3 \Rightarrow y_1 \in [3; +\infty)$

$g(y_1) = \frac{6}{y_1}$ – гипербола;

$\begin{cases} y_1 = 3 \\ g = 2 \end{cases}$

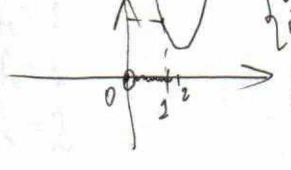
$\boxed{g(x) \in (0; 2]}$



Рассмотрю значение ф-ций 1; 2; 3

1) $f_1 = \frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{2}\right)$ $\quad y_2 = \frac{g(x)}{2} \in (0; 1]$ $\quad y_1(y_2) = y_1^2 - 4y_1 + 7 \Rightarrow$

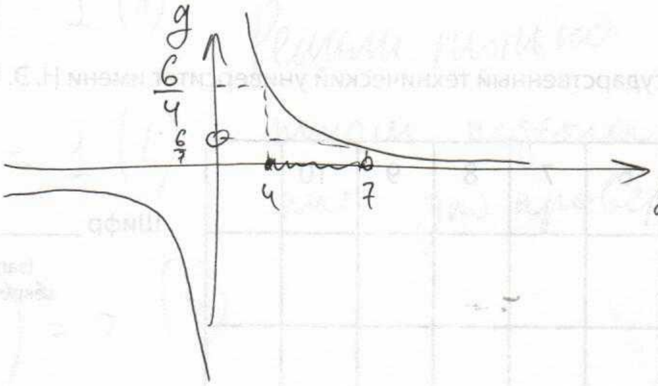
$g(x) \in (0; 2]$



$\begin{cases} y_2 = 1 \\ y_1 = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_1 = 7 \end{cases}$

$y_1(y_2) \in [4;7)$



$g(y_1(y_2)) \in \left(\frac{6}{7};\frac{3}{2}\right]$

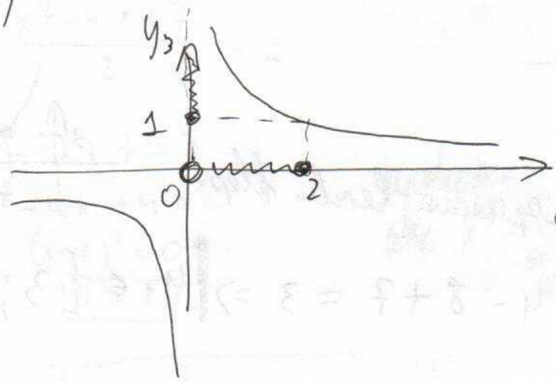
$\Downarrow$

$f_1 \in \frac{2}{3}\left(\frac{6}{7};\frac{3}{2}\right]$

$$\boxed{f_1 \in \left(\frac{4}{7};1\right]}$$

(2) $f_2=\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}$

$y_3=\frac{2}{g}$

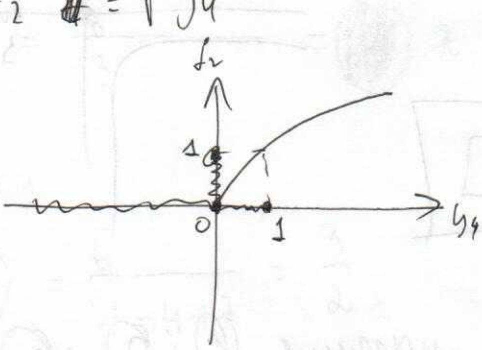


$y_3\in[1;+\infty)$

$-y_3 \in(-\infty;-1]$

$y_4 = 2-y_3 \in(-\infty;1] \Rightarrow f_2=\sqrt{y_4}$

$$\boxed{f_2\in[0;1]}$$

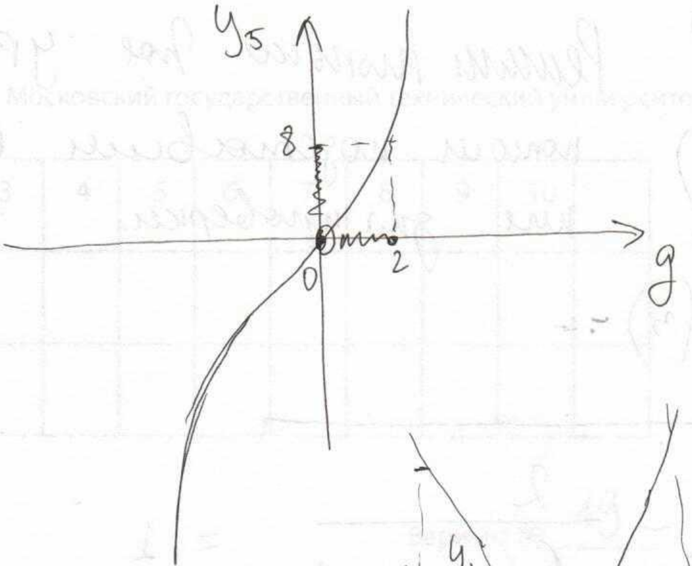


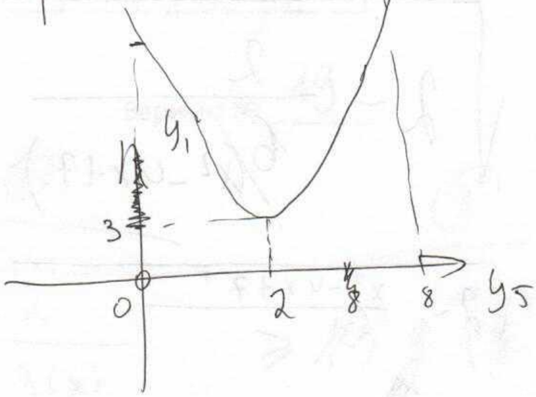
(3) $f_3 = 13g(g^3(x))$

$y_5 = g^3$

$g \in [0;2]$

$y_5 \in [0;8]$



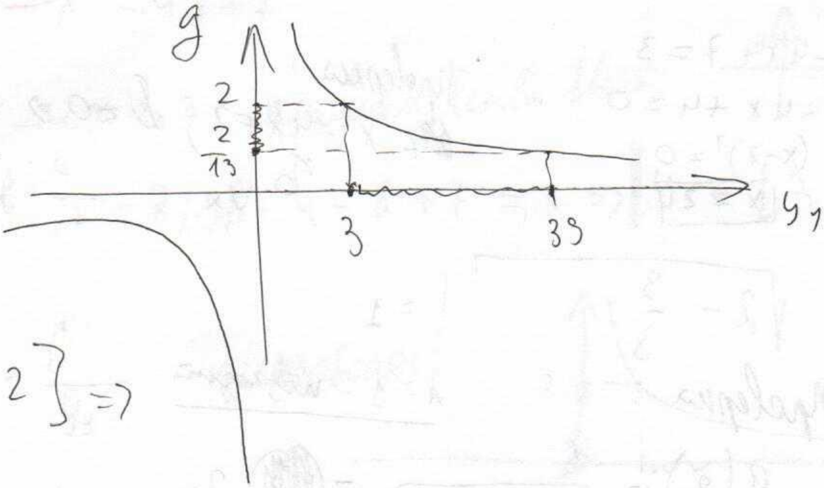


$y_1(y_5) = y_5^2 - 4y_5 + 7$

$y_1(0) = 7$

$y_1(8) = 39$

$y_1 \in [3;39]$



$g(y_1) = \frac{6}{y_1}$

$g(y_1) \in \left[\frac{2}{13}; 2\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow f_3 = 13\, g(y_1) \in [2;26]$

$\boxed{f_3 \in [2;26]}$

Распишем исх. неравенство

$f_1 + f_2 \geqslant f_3$, такое возможно только если

Значения $\left(\frac{4}{7}; 1\right]$ $[0;1]$ $[2;26]$

$\begin{cases} f_1 = max \\ f_2 = max \\ f_3 = min \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_3 = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) = 1 \ (1) \\ \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} = 1 \ (2) \\ 13 g\left(g^3(x)\right) = 2 \ (3) \end{cases}$$

Решим только 2ое ур-ие, а потом подставим в остальные для проверки.

$$\sqrt{2 - \frac{2}{\cancel{6}/(x^2-4x+7)}} = 1$$

$$\sqrt{2 - \frac{x^2-4x+7}{3}} = 1$$

$$2 - \frac{x^2-4x+7}{3} = 1$$

$x^2-4x+7=3$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$\boxed{x=2}$

Проверка

x^2-4x+7; $D<0 \Rightarrow \ne 0 \ \forall x$.

$$\sqrt{2 - \frac{3}{3}} = 1$$

$1=1$ - подходит

Проверка:

3)

$g(2)=2$

$g^3(2)=8$

$$g(8) = \frac{6}{64-32+7} = \frac{6}{39} = \frac{2}{13}$$

$13(g(8)) = 13 \cdot \frac{2}{13} = 2 = 2$ верно

$\Downarrow$

Ответ: $x=2$

Проверка

1): $g(2) = \frac{6}{3} = 2$

$$\frac{g(2)}{2} = 1$$

$$g(1) = \frac{6}{1-4+7} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{2}{3} g(1) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1 = 1$$ - верно.

20

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 111558

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

№2

$\sin^4(2016x)+\cos^{2017}(2015x)\cdot\cos^{2018}(2016x)=1$

$(1-\cos^2(2016x))^2+\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2018}(2016x)=1$

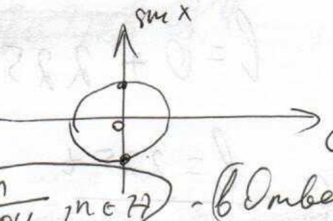
$2016x=a;\ 2025x=b$

$(1-\cos^2 a)^2+\cos^{2017}b\cdot\cos^{2018}\cdot a=1$

$1+\cos^4 a-2\cos^2 a+\cos^{2017}b\cdot\cos^{2018}a=1$

$\cos^2 a\left(\cos^2 a-2+\cos^{2017}b\cdot\cos^{2018}a\right)=0$

$\Updownarrow$

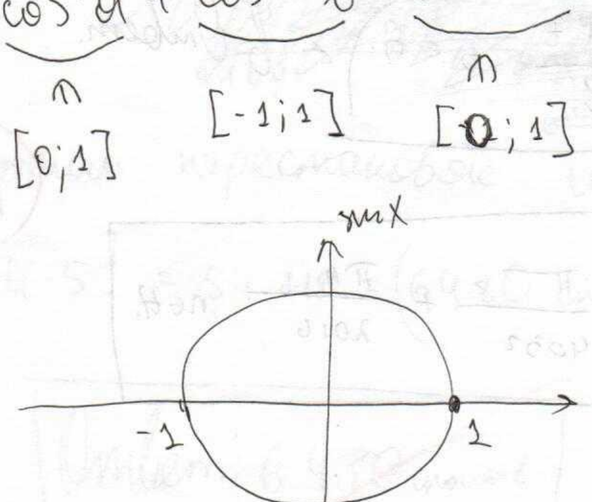


$\cos^2 a=0$; $\cos 2016x=0$

$\cos a=0$; $2016x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; $x=\frac{\pi}{4032}+\frac{\pi n}{2016},\ n\in Z$ — (в ответ)

$\underbrace{\cos^2 a}_{\in[0;1]}+\underbrace{\cos^{2017}b}_{[-1;1]}\cdot\underbrace{\cos^{2018}a}_{\in[0;1]}=2$, чтобы получить 2ку, нужно чтобы $\begin{cases}\cos^2 a=1 & \cos a=\pm1\\ \cos b=1\end{cases}$

$\Updownarrow$



$\cancel{\begin{cases}\cos 2016x=1\\ \cos 2025x=1\end{cases}}$

$\cancel{\begin{cases}\cos 2016x=-1\\ \cos 2025x=1\end{cases}}$

$$\begin{cases} 2016x = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \\ 2025x = 2\pi l, \ l \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi k}{2016}, \ k \in \mathbb{Z}. \\ x = \dfrac{2\pi l}{2025}, \ l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{\pi} k}{2016} = \frac{2\cancel{\pi} l}{2025}$$

$$\underline{4032} = 2 \cdot 2016 = 2 \cdot 2 \cdot 1008 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 252 = 2^5 \cdot 126 = 2^6 \cdot 63 = 2^6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = \underline{2^6 \cdot 3^2 \cdot 7}$$

$$2025k = 4032l$$

$$4032l - 2025k = 0$$

$$\underline{2025} = 5 \cdot 3 \cdot 135 = 5^2 \cdot 3 \cdot 27 = \underline{5^2 \cdot 3^4}$$

$$2^6 \cdot \cancel{3^2} \cdot 7 l - 5^2 \cdot \cancel{3^4}^{\,3^2} k = 0$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times\ 7 \\ \hline 448 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ \times\ 9 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$2^6 \cdot 7 l - 5^2 \cdot 3^2 k = 0$$

взаимно простые.

$$448l - 225k = 0$$

частное решение $\begin{cases} l = 0 \\ k = 0 \end{cases}$

$$l = 0 + 225 \cdot t, \ t \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} l = 225 \cdot t \\ x = \dfrac{2\pi l}{2025} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi \cdot 225t}{2025}, t \in \mathbb{Z}$$

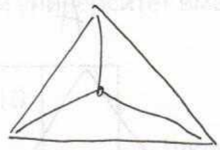
$$\boxed{x = \frac{2\pi t}{9}, \ t \in \mathbb{Z}.} \leftarrow$$ в Ответ.

12

$$\boxed{\text{Ответ: } x = \frac{2\pi t}{9}, \ t \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{4032} + \frac{\pi n}{2016}, \ n \in \mathbb{Z}.}$$

№1.

5 кусков; прозр. стекло:



Сколько способов выложить, чтобы непрозрачный слой?

Я оставшиеся 2 пластинки по 3 варианта

~~... (без учёта перестановок)~~

$\Rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ вар. (без учёта перестановок)

–

~~с учётом перестановок~~

~~[illegible]~~

~~Способы: $54 \cdot 5! = \ldots = 6480$ вариантов~~

с учётом перестановок между этими пластинками

Способы: $54 \cdot 5! = 54 \cdot 120 = 6480$ способов

6

Ответ: 6480 способов

N3

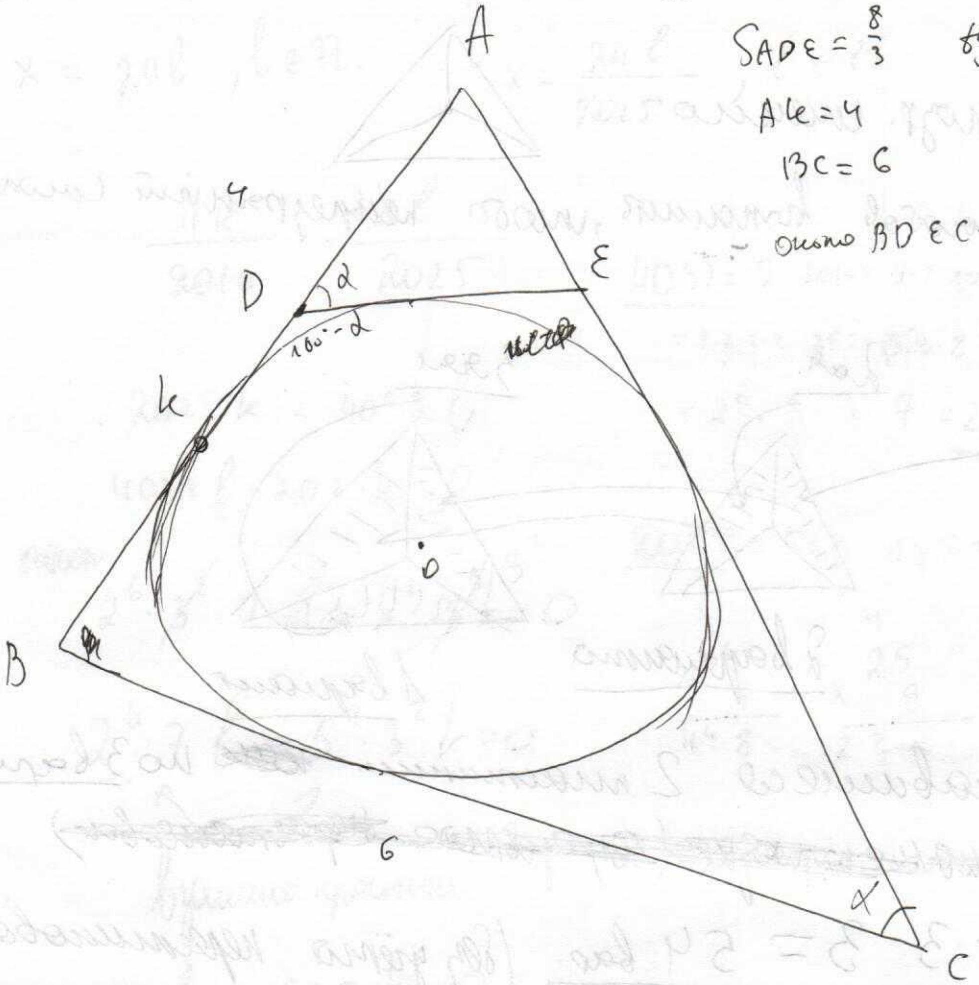
Дано:

$S_{ADE} = \frac{8}{3}$ $\quad tg\, BAC = ?$

$AK = 4$

$BC = 6$

∵ около $BDEC$ – можно опис. окр-ть



1) около $BDEC$ можно опис. окр. ⇒

⇒ $\angle ECB = 180° - \angle BDE$ → $\angle BDE = 180° - \alpha$ ⇒

~~аналогично $\angle DEC = 180° - \beta$~~

⇒ смежный угол или $\angle ADE = \alpha$

2) $\angle A$ – общий, $\angle ADE = \angle ACB$ ⇒ $\triangle DAE \sim \triangle CAB$

?

0