Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

811058

Шифр ____________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету ~~ма~~ МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Ковешников Олег Александрович

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Тамбов МАОУ „Лицей №14 ~~им~~ им. А.М. Кузьмина", 11 класс

Регистрационный номер ШМ 6615

Вариант задания 19

+1 [signature]

Дата проведения “11” МАРТА 2018 г.

Подпись участника [signature]

50 (пятьдесят)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	6	16	20	5						
										50

811058

Шифр ______________

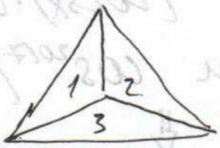
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

058

Вариант № 19

№1.

Рассмотрим все варианты:
Необходимо чтобы на каждой позиции 1, 2 или 3 лежал хотя бы один закрашенный фрагмент.



У нас есть 5 разных цветов. Обозначим их a, b, c, d, e.
Пусть на позиции 1 лежит только один закраш. фрагмент с цветом a. Тогда 2 и 3 позиция могут занимать от 1 до 3 фрагментов разн. цветов.

2	3	2	3	2	3
b	cde	bc	de	cde	b
c	bde	bd	ce	bde	c
d	cbe	be	cd	cbe	d
e	cbd	cd	be	cbd	c
		ce	bd		
		de	bc		

Получилось 14 разных случаев, но будем помнить, что порядок расположения цветов важен, т.е. не только вариант b-cde возможен, а также и b-ced, b-ecd — и все возможные перестановки.
Поэтому каждая строчка в 1 и 3 столбиках даст нам 3! вариантов, а из 2 столбика 2!+2!
Получим $8 \cdot 3! + 6 \cdot 2 \cdot 2! = 72$. Но мы рассматривали случай когда фрагмент цветом a расположен на 1 позиции, аналогично, если он будет на 2 или 3 поз.. Т.е. получим $72 \cdot 3 = 216$
Аналогичная ситуация и с другими цветами, а их 5
В итоге $216 \cdot 5 = 1080$. Решить задачу таким способом позволяет то, что стекол 5, а соответсвенно и цветов 5, поэтому обязательно будет хотя бы одна позиция, на которой будет лежать только один закрашенный фрагмент

Ответ: ~~1080~~. 6000 (3)

№2.

$\sin^4(2016x)+\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2018}(2016x)=1.$

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \Rightarrow \sin^4\alpha=1-2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$ $\cancel{\Rightarrow \sin^4(2016x)=1-2\cos(2016}$

$\Downarrow$

$\sin^4(2016x)=1-2\cos^2(2016x)+\cos^4(2016x)$

$\cos^4(2016x)-2\cos^2(2016x)+\cancel{1}+\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2018}(2016x)=\cancel{1}\,0$

$\cos^2(2016x)\left(\cos^2(2016x)+\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{201\cancel{8}6}(2016x)^{\cancel{4}\,-2}\right)=0.$

1) $\cos(2016x)=0 \Rightarrow 2016x=\frac{\pi}{2}+\pi n \Rightarrow x=\frac{\pi}{4032}+\frac{\pi n}{2016},\ n\in\mathbb{Z}.$

2) $\cos^2(2016x)+\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x)=2.$

$\cos^2(2016x)\le 1$ и $\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x)\le 1$

$\Downarrow$

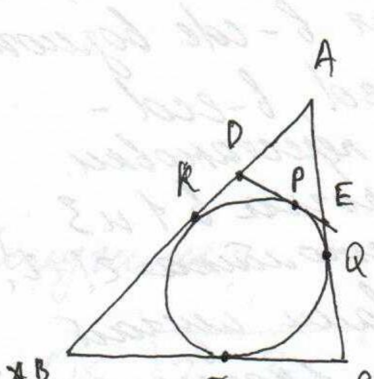
а) $\cos(2016x)=1$ и $\cos^{\cancel{20}}(2025x)=1 \Rightarrow x=\frac{\pi n}{1008}$ и $x=\frac{2\pi n}{2025}$, $n\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow x-\varnothing$

б) $\cos(2016x)=-1$ и $\cos(2025x)=-1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2016}+\frac{\pi n}{1008}$ и $x=\cancel{\frac{\pi}{2025}}+\frac{2\pi n}{2025}$, n

$\Downarrow$ $x-\varnothing$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4032}+\frac{\pi n}{2016}.$ 6

№3.



Дано: $S_{ADE}=8/3$

$AK=4$, $BC=6$.

Пусть $KD=x$, $DE=y$, $BG=z$, тогда

$DP=DK=x$ (по св-ву кас.)

$PE=EQ=DE-DP=y-x$ (по св-ву кас.)

$GC=BC-BG=6-z$.

Если около BDEC можно опис. окружность, то тогда противоположные углы в сумме дают 180°

$\angle B+\angle DEC=180^\circ \Rightarrow \angle B=180^\circ-\angle DEC$

$\angle C+\angle BDE=180^\circ \Rightarrow \angle C=180^\circ-\angle BDE$

В $\triangle ADE$ $\angle AED=180^\circ-\angle DEC=\angle B$

$\angle ADE=180^\circ-\angle BDE=\angle C$ $\Rightarrow \triangle ADE\sim\triangle ACB$ по 2 углам

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

$\Updownarrow$

$$\frac{4-y+x}{4+z}=\frac{4-x}{10-z}=\frac{y}{6}.$$

~~AE=~~ $AQ=AK=4$ (по св-ву кас.)

$AE=AQ-EQ=4-y+x$

$AD=AK-KD=4-x$

~~BK=BG=2 no~~

$BK=BG=z$ (по св-ву кас.)

$\Downarrow$

$AB=4+z$

$QC=CG=6-z$ (по св-ву кас.)

$\Downarrow$

$AC=10-z.$

$\cancel{\frac{4-y+x}{4+2}=\frac{y}{6} \Leftrightarrow 24-6x=10}$

$$\frac{4-x}{10-z}=\frac{y}{6} \Leftrightarrow 24-6x=10y-yz \Rightarrow x=\frac{24+yz-10y}{6}.$$

$$\frac{4-y+x}{4+z}=\frac{y}{6} \Leftrightarrow \frac{24-6y+24+yz-10y}{6(4+z)}=\frac{y}{6}.$$

$\Downarrow$

$$24-6y+24+\cancel{yz}-10y=4y+\cancel{yz}$$

$$20y=48 \Rightarrow y=2{,}4.$$

$$x=\frac{24+2{,}4z-2{,}4\cdot10}{6}=0{,}4z.$$

В $\triangle ADE$ $AD=4-0{,}4z$, $AE=1{,}6+0{,}4z$, $DE=2{,}4.$

$$p=\frac{AD+AE+DE}{2}=4.$$

$$S_{ADE}=\sqrt{4(4-4+0{,}4z)(4-2{,}4)(4-1{,}6-0{,}4z)}=$$

$$=2\sqrt{0{,}4\cdot1{,}6\cdot0{,}4z(6-z)}=\frac{8}{3}.$$

$\cancel{\frac{4\cdot4\cdot16\cdot4z(6-z)}{1005025}=\frac{8}{3}}$ $\quad 9$ $\qquad \frac{4\cdot4\cdot16\cdot4z(6-z)}{100\,250\,125}=\frac{64}{9}$

~~$36z^2-216z+250=0.$~~ $\qquad$ ~~$72z-12z^2=2$~~ ~~$216z-36z^2=250$~~ $\qquad 6\cdot18z-18z^2=125$

~~$D=216^2-36000$~~

$18z^2-6\cdot18z+125=0.$

$$D=6^2\cdot18^2-18\cdot500=2664=4\cdot666 \Rightarrow z=\frac{108\pm6\sqrt{74}}{36} \Rightarrow z=3-\frac{\sqrt{74}}{6}.$$

$(z<6)$

$$x=0{,}4z=1{,}2-\frac{2\sqrt{74}}{15} \Rightarrow AD=2{,}8+\frac{\sqrt{74}}{15}$$

$$AE=2{,}8-\frac{\sqrt{74}}{15}$$

$$S_{ADE}=\frac{AD\cdot DE}{2}\cdot\sin\angle A \Rightarrow \sin A=\frac{2\cdot\frac{8}{3}}{\left(2{,}8-\frac{\sqrt{74}}{15}\right)\left(2{,}8+\frac{\sqrt{74}}{15}\right)}=$$

$$=\frac{16}{3\left(\cancel{7}\,\frac{7{,}84}{100}-\frac{74}{225}\right)}=\frac{16}{\frac{3\cdot 5}{5}\left(\cancel{\frac{784}{20}}-\frac{74}{}\right)}=\frac{16\cdot 25}{3\left(\frac{784}{4}-\frac{74}{9}\right)}=\frac{16\cdot 25\cdot 3}{1690}=$$

$$=\frac{8\cdot 5\cdot 3}{169}=\frac{120}{169}\Rightarrow \cos A=\sqrt{1-\frac{120^2}{169^2}}=\frac{\sqrt{14161}}{169}$$

$$tg\,A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{120}{\sqrt{14161}}=\frac{120}{119}$$

16

Ответ: $\frac{120}{119}$. ✓

№4.

$$g(x)=\frac{6}{x^2-4x+7},\quad g'(x)=\frac{-12(x-2)}{(x^2-4x+7)^2}$$

при $x>2$ $g'(x)<0 \Rightarrow$ убы

при $x<2$ $g'(x)>0 \Rightarrow$ возр

$\Downarrow$

$x=2$ – т. max.

$g(2)=2 \Rightarrow g(x)\le 2.$

$\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}\ge 0 \Rightarrow g(x)\ge 1$ $\Rightarrow$ $1\le g(x)\le 2.$

$$\frac{1}{2}\le\frac{1}{g(x)}\le 1$$

$$-1\le-\frac{1}{g(x)}\le-\frac{1}{2}.$$

$$-2\le-\frac{2}{g(x)}\le-1$$

$$0\le 2-\frac{2}{g(x)}\le 1.$$

$$0\le\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}\le 1$$

Получим:

$$0\le\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}\le 1$$

Теперь оценим $\frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)$

$\frac{1}{2}\le\frac{g(x)}{2}\le 1$, т.к на $(-\infty;2]$ $g(x)$ монот. возр., то

$g\left(\frac{1}{2}\right)\le g\left(\frac{g(x)}{2}\right)\le g(1) \Rightarrow \frac{8}{7}\le g\left(\frac{g(x)}{2}\right)\le\frac{3}{2}$

$\frac{16}{21}\le\frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)\le 1$

$\Rightarrow \frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)+\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}\le 2$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 811058
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

№ 4 (продолжение)

Оценим $13\,g(g^3(x))$

$$1 \le g(x) \le 2$$
$$1 \le g^3(x) \le 8$$

На отрезке от 1 до 8 $g(x)$ имеет макс. в т. 2 и мин. ~~в т.~~ в точке 1 или 8. $g(1)=\frac{3}{2}$, $g(8)=\frac{2}{13}$, $g(8)<g(1) \Rightarrow$ в т. 8 мин на отр. $[1;8]$. Поэтому если $1 \le g^3(x) \le 8$, то

$$\frac{2}{13} \le g(g^3(x)) \le 2 \Rightarrow \quad 2 \le 13\,g(g^3(x)) \le 26.$$

Левая часть ≤ 2 а правая ≥ 2, следовательно чтобы левая часть была больше либо равна правой они обе должны равняться 2. Это достигается только тогда когда $g(x)=2$, то есть при $x=2$.

Ответ: $x=2$.

20

N5.

$8a+3ab\,ctg\,x+2\sqrt{2(x+\cancel{3bctgx}\;|x-3bctgx|-3bctgx}=12+ax$

$2\sqrt{2(x-3bctgx+|x-3bctgx|}=12+a(x-3bctgx-8)$

Пусть $x-3bctgx=g$, $x\neq\pi n,\ n\in Z$.

1) $g\geq 0$.

$2\sqrt{2\cdot 2g}=12+a(g-8)$

$16g=144+a^2g^2-16a^2g+64a+24ag-192a$.

$a^2g^2+g(24a-16a^2-16)+144-192a+64a^2=0$.

$D=(16a^2-24a+16)^2-4a^2(64a^2-192a+144)=0$

Сразу приведу подобные и сокращу.

$2a^2-3a+1=0$.

$D=9-8=1 \Rightarrow a=\frac{3\pm1}{4} \Rightarrow a=\frac{1}{2}\quad a=1$.

при $a=\frac{1}{2}$

$4\sqrt{g}=12+\frac{1}{2}(g-8)$

$16g=64+\frac{g^2}{4}+8g$.

$\frac{g^2}{4}-8g+64=\left(\frac{g}{2}-8\right)^2=0 \Rightarrow g=16$.

~~$D=64-64=0$~~

при $a=1$

$4\sqrt{g}=12+g-8$

$16g=16+8g+g^2$

$g^2-8g+16=(g-4)^2 \Rightarrow g=4$.

?

г) $g<0$ (подкоренное выраж. $=0$.)

$12+a(g-8)=0.$

$g=\frac{-12}{a}+8=\frac{8a-12}{a}.$

Вернемся к случаю, когда $g>0$

$g_1=16$; $g_2=4.$

$x-3b\,ctg\,x=16$

$x=16+3b\,ctg\,x$ — ~~несколько~~ ∞ реш-ий. т.к. $E(ctg\,x)=(-\infty;+\infty)$ и

$8a+3ab\,ctg\,x+2\sqrt{a(x-3b\,ctg\,x)}=y(x)$

$y'(x)=-\frac{3ab}{\sin^2 x}+\frac{2(1-\frac{3b}{\sin^2 x})}{\sqrt{x-3b\,ctg\,x}}<0.$

$y'(x)=-\frac{3b}{\sin^2 x}\left(a+\frac{2}{\sqrt{x-3b\,ctg\,x}}\right)+\frac{2}{\sqrt{x-3b\,ctg\,x}}\Big\}<0$

при $b>0$ $y'(x)<0.$

при $a>0$ прав часть $12+ax$ монот возр. $\Rightarrow$ лв. часть должна убыв.

Если $a<0$, то $12+ax$ — убыв. сл-но $g'(x)>0$ чтобы пересек ~~в 1 точке~~. $\Rightarrow b<0.$ Т.е $a\cdot b>0.$

$x=4+3b\,ctg\,x$ — ~~неско~~ ∞ решений.

$x=\frac{8a-12}{a}+3b\,ctg\,x$ — ∞ решений.

(Следует из графика).

5

2