Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

111056

Шифр ______________________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника ВАЛЬКОВ МИХАИЛ ДМИТРИЕВИЧ

Город, № школы (образовательного учреждения) г. ИВАНОВО МБОУ „Лицей №33"

Регистрационный номер ШМ 4420

Вариант задания 20

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника ______________

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

58 (пятьдесят восемь) Гкаб

111056

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 12 | 0 | 20 | 5 | 15 | | | | | 58 |
| | | | | | | | | | | |

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

056

Вариант № 20

$$\left[\begin{array}{l} a<0 \\ a>3 \\ a=1 \\ a=2 \end{array}\right.$$

$$\sqrt{x} = \frac{2 \pm \sqrt{(a-1)(a-2)}}{a}$$

$a=1$: $\sqrt{x} = 2$

$x = 4 > 0$ след-но $a=1$ подходит.

$a=2$: $\sqrt{x} = 1$

$x = 1 > 0$ след-но $a = 2$ подходит.

Нелолино заметить, что при $a<0$ $\sqrt{x} = \frac{2-\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a}$, а при $a>3$ $\sqrt{x} = \frac{2+\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a}$, однако при $a>3$ также существуют решения в 1). т.к.

$x = \left(\frac{2+\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a}\right)^2 > 0$, а $x = 2 - \frac{6}{a} < 0$ при $a > 3$, то эти решения совпадать не будут. Значит ур-е будет иметь ~~три~~ два решения при $a > 3$ и эти значения параметра не подходят. т.е. искомые значения ~~пра~~ параметров: $b = 0$, $a \in (-\infty; 0] \cup \{1; 2\}$

Ответ: $b=0$, $a=1$ : $x=4$

$b=0$, $a=2$ : $x=1$

$b=0$, $a \in (-\infty; 0)$ : $x = \left(\frac{2-\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a}\right)^2$

$b=0$, $a=0$ : $x = \frac{9}{4}$

№ 5 (продолжение)

Отдельно р/м $a=0$:

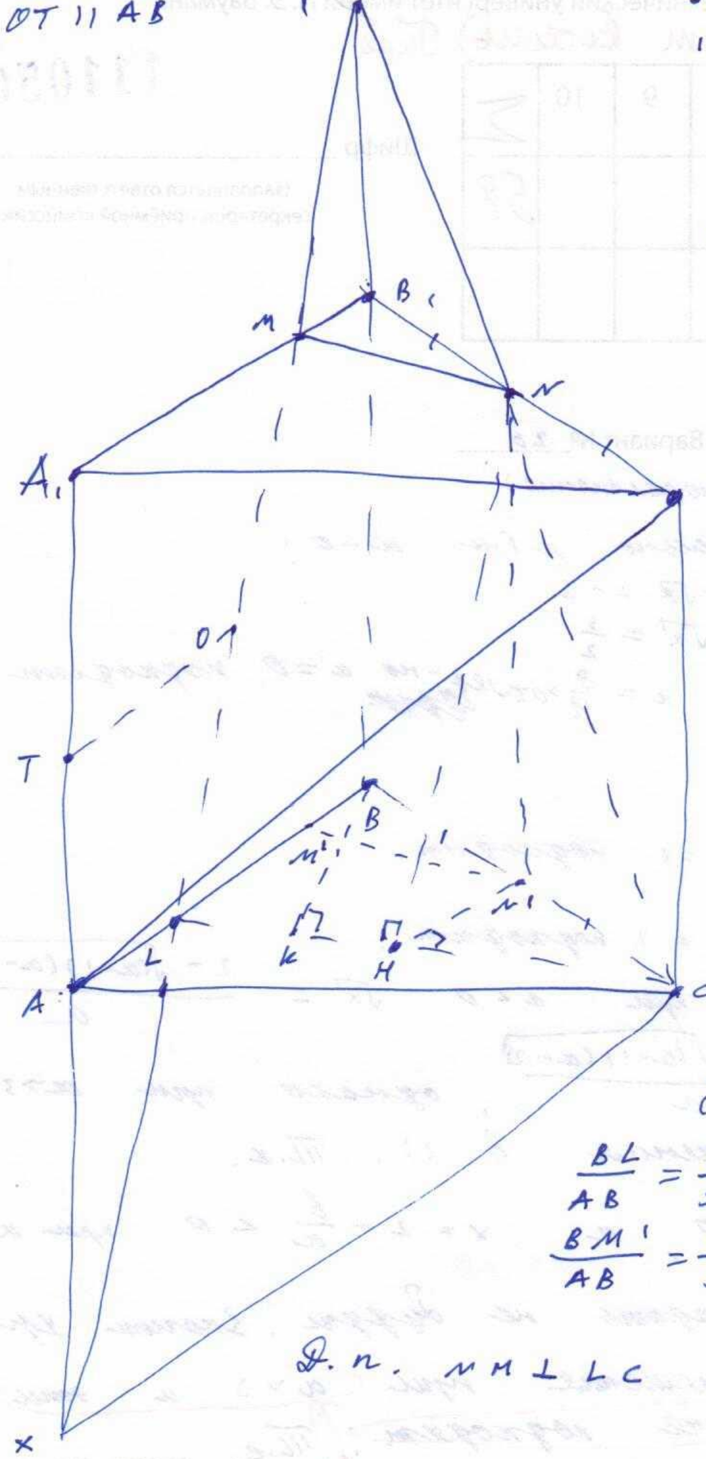
$-4\sqrt{x} = -6$

$\sqrt{x} = \frac{3}{2}$

$x = \frac{9}{4} > 0$ след-но $a=0$ подходит ~~тоже~~

№6.

Д.п. $OT \parallel AB$




Построим сечение $ABCA_1B_1C_1$ плоск. $\alpha$

1) $CX$ — параллельный перенос $AC_1$

$C \in \alpha$
$AC_1 \parallel \alpha$ $\Big| \Rightarrow CX \subset \alpha$

2) $OX \cap AB = L$
$OX \cap A_1B_1 = M$

3) $OX \cap BB_1 = Y$

4) $YC \cap B_1C_1 = N$

$LMNC$ — сечение

$\Delta XAL \sim \Delta XTO$ (по 2 углам)

$\Downarrow$

$\frac{AX}{XT} = \frac{AL}{OT} = \cancel{\frac{2}{3}}$ $\frac{1}{2}$??

$\frac{AL}{OT} = \frac{2}{3}$
$OT = \frac{1}{2}AB$ $\Big| \Rightarrow \frac{AL}{AB} = \frac{1}{3}$

Т.к. т.$O$ — центр $\{ABB_1A_1\}$, то $\frac{MB_1}{A_1B_1} = \frac{1}{3}$ из соображений симметрии

$(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$

$\Downarrow$

$MN \parallel LC$ (по свойству) ?

Перенесём $MN$ параллельно в $(ABC)$: $M'N'$

$\frac{BL}{AB} = \frac{2}{3}$
$\frac{BM'}{AB} = \frac{1}{3}$ $\Big| \Rightarrow LM' = M'B$ $\Rightarrow$ $M'N' \parallel LC$

$\Downarrow$

$M'N'$ — средняя линия $\Delta LBC$

$\Downarrow$

$BN' = N'C$

$\Downarrow$

$B_1N = NC_1$, $MN = \frac{1}{2}LC$

Д.п. $NH \perp LC$

Пусть $AB = a$

$\Delta LBC$: $LC = \sqrt{\frac{4}{9}a^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}a \cdot a \cos 60^\circ} = \sqrt{\frac{4a^2}{9} + a^2 - \frac{2a^2}{3}} =$

$= \frac{a\sqrt{7}}{9}$ 3 ??

$MN = \frac{1}{2}LC = \frac{a\sqrt{7}}{18}$

$S_{LMNC} = \frac{LC + MN}{2} \cdot NH$

$NH = \frac{2S_{LMNC}}{\frac{a\sqrt{7}}{9} + \frac{a\sqrt{7}}{18}} = \frac{2 \cdot 18\, S_{LMNC}}{3a\sqrt{7}} = \frac{12 S_{LMNC}}{a\sqrt{7}} = \frac{12 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{7}} = \frac{12 \cdot 7 \cdot 3}{4 \cdot 7\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

Д.п. $N'M$; $BK \perp LC$, $NN'$

$$\left.\begin{array}{l} NN' \perp (ABC) \\ NM \perp LC \\ LC \subset (ABC) \end{array}\right| \Rightarrow N'M \perp LC \text{ (по ТТП)}$$

$M'N'$ – средняя линия $\triangle LBC$ $\Rightarrow$ $N'M = \frac{1}{2} BK$

$\triangle LBC$: $\dfrac{LC}{\sin\angle LBC} = \dfrac{BL}{\sin BCL}$

$$\sin BCL = \frac{BL \sin LBC}{LC} = \frac{2a \sin LBC \cdot 9}{3\, a\sqrt{7}} = \frac{6 \sin LBC}{\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{6 \sin 60^\circ}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} > 1$$

$\angle BCL$?

$\triangle N'MC$: $N'M = N'C \sin BLC = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{3\sqrt{7}}{7} = \dfrac{\sqrt{14}}{2\sqrt{3}} \cdot \dfrac{3\sqrt{7}}{7} =$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$\triangle HNN'$: $NN'_3 = \sqrt{NH^2 - HN'^2} = \sqrt{\dfrac{81}{2} - \dfrac{6}{4}} =$
(по т. Пифагора)

$$= \sqrt{39}$$

$$V_{LBCMB_1N} = NN_1 (S_{BLC} + S_{B_1MN} + \sqrt{S_{BLC} S_{B_1MN}}) = NN'\left(\frac{1}{2} BL \cdot BC \sin 60^\circ + \frac{1}{2} B_1M \cdot B_1N \sin 60^\circ + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sin 60^\circ \sqrt{BL \cdot BC \cdot B_1M \cdot B_1N}\right) =$$

$$= \sqrt{39} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} a \cdot a + \frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{2} a + a^2 \sqrt{\frac{1}{2} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}\right) =$$

$$= \sqrt{39} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{5a^2}{6} + \frac{a^2}{3} \cancel{\sqrt{2}}\right) = \frac{3 \cdot \sqrt{13}}{4 \cdot 6} \cdot 7a^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{8} \cdot \frac{7 \cdot 14}{3} = \frac{49\sqrt{13}}{12}$$

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot NN' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{39} = \frac{14}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{13} =$$

$$= 14\sqrt{13}$$

$$V_{ALCA_1MC_1} = V_{ABCA_1B_1C_1} - V_{LBCMB_1N} = 14\sqrt{13} - \frac{49\sqrt{13}}{12} =$$

$$= \frac{119\sqrt{13}}{12}$$

Ответ: $\dfrac{49\sqrt{13}}{12}$ и $\dfrac{119\sqrt{13}}{12}$.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |

111056

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 20

№2.

$\sin^4 2019x + \cos^{2019} 2022x \cdot \cos^{2018} 2019x = 1$

$\sin^4 2019x + \cos^{2019} 2022x \cos^{2018} 2019x = \sin^2 2019x + \cos^2 2019x$

$\underbrace{\sin^2 2019x}_{\geq 0} \underbrace{(\sin^2 2019x - 1)}_{\leq 0} + \underbrace{\cos^2 2019x}_{\geq 0} \underbrace{(\cos^{2019} 2022x \cos^{2016} 2019x - 1)}_{\leq 0} = 0$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\leq 0 \qquad \leq 0$

след-но:

$\left[\begin{array}{l} \sin^2 2019x = 0 \\ \sin^2 2019x = 1 \end{array}\right. \qquad \sin 2019x = \pm 1$

$\left[\begin{array}{l} 2019x = \pi n \\ 2019x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right., \ n \in \mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{2019} \\ x = \frac{\pi}{4038} + \frac{\pi n}{2019} \end{array}\right., n \in \mathbb{Z}$

сделаем проверку ~~в~~ ~~не~~ зануляется ли вторая скобка в этих точках:

1) $\sin\left(\left(\frac{\pi}{4038} + \frac{\pi n}{2019}\right) \cdot 2019\right) = 1$ $\Big| \Rightarrow$ $\cos^2\left(2019 \cdot \left(\frac{\pi}{4038} + \frac{\pi n}{2019}\right)\right) = 0$

$n \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $n \in \mathbb{Z}$ по ОТЛ ПС

$\Downarrow$

$x = \frac{\pi}{4038} + \frac{\pi n}{2019}, n \in \mathbb{Z}$ – серия решений ур-я

2) $\cos^2\left(2019 \frac{\pi n}{2019}\right) \cdot \left(\cos^{2019}\left(2022 \cdot \frac{\pi n}{2019}\right) \cdot \cos^{2016}\left(\frac{\pi n}{2019} \cdot 2019\right) - 1\right) = 0, n \in \mathbb{Z}$

$\cos^2 \pi n \cdot \left(\cos^{2019} \frac{2022\pi n}{2019} \cos^{2016} \pi n - 1\right) = 0, n \in \mathbb{Z}$

$1 \cdot \left(\cos^{2019} \frac{674\pi n}{673} \cdot 1 - 1\right) = 0, n \in \mathbb{Z}$

$\cos^{2019} \frac{674\pi n}{673} = 1, n \in \mathbb{Z}$

$\cos \frac{674\pi n}{673} = 1, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{674\pi n}{673} = 2\pi m$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$

$\frac{337\pi n}{673} = \pi m$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$

$\frac{337n}{673} = m$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$n = 673k$, $k \in \mathbb{Z}$

Тогда серия решений $x = \frac{\pi n}{2019}$, $n \in \mathbb{Z}$ примет вид $x = \frac{\pi 673k}{2019} = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\{\frac{\pi}{4038} + \frac{\pi n}{2019}, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$.

№1.

Так как стопка должна быть хотя бы частично прозрачной, то значит существует хотя бы один столбик, составленный из незакрашенных ~~частей~~ n-1б треугольников. Пусть положение этого столбика в пространстве будет фиксировано, тогда для каждого треугольника (правильного) существует 2 варианта расположения, чтобы столбик остался прозрачным, а значит всего $2^5 = 32$ вариантов укладки стёкол. Выбор столбика не приводит ? к потере общности, а значит ~~других~~ дополнительных вариантов не будет.

Ответ: 32.

№4

$\frac{7}{9} g\left(\frac{g(x)}{3}\right) + 2\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}} \geq 13 g(g^2(x))$, где $g(x) = \frac{9}{x^2 - 6x + 12}$

$g(x) = \frac{9}{(x-3)^2 + 3} \Rightarrow g(x) \in [\frac{3}{2}; 3]$, ~~где~~

$x = 3$ - точка максимума

$\frac{g(x)}{3} \in [\frac{1}{2}; 1]$

$g\left(\frac{g(x)}{3}\right) \in [\frac{36}{41}; \frac{9}{7}]$, т.к. $3 \notin$ ~~$\frac{g(x)}{3}$~~ $[\frac{1}{2}; 1]$

$\frac{7}{9} g\left(\frac{g(x)}{3}\right) \in [\frac{28}{41}; 1]$

$g(x) = \dfrac{9}{(x-3)^2+3}$ Точка максимума – $x=3$.

$0 < g(x) \le 3$

$\begin{cases} 2 - \dfrac{3}{g(x)} \ge 0 \\ 0 < g(x) \le 3 \end{cases}$ $E(g(x)) \in [\frac{3}{2}; 3]$

1) $E\left(\frac{g(x)}{3}\right) \in [\frac{1}{2}; 1]$

$E\left(g\left(\frac{g(x)}{3}\right)\right) \in [\frac{36}{41}; \frac{9}{7}]$, $3 \notin [\frac{1}{2}; 1]$.

$E\left(\frac{7}{9}\, g\left(\frac{g(x)}{3}\right)\right) \in [\frac{28}{41}; 1]$ (1)

2) $E(g(x)) \in [\frac{3}{2}; 3]$

$E\left(2\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}}\right) \in [0; 2]$ (2)

3) $E(g(x)) \in [\frac{3}{2}; 3]$

$E(g^2(x)) \in [\frac{9}{4}; 9]$

$3 \in [\frac{9}{4}; 9] \Rightarrow E(g(g^2(x))) \le 3$

$E(g(g^2(x))) \in [\frac{9}{39}; 3]$

$E(13\, g(g^2(x))) \in [3; 39]$ (3)

$(1) + (2) \le (3)$

$\begin{cases} (1) + (2) \in [\frac{28}{41}; 3] \\ (3) \in [3; 39] \end{cases}$

след-но

$\begin{cases} \frac{7}{9}\, g\left(\frac{g(x)}{3}\right) = 1 \\ 2\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}} = 2 \\ 13\, g(g^2(x)) = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} g(x) = 3 \\ g^2(x) = 9 \end{cases}$ $g(x) = 3$

$\dfrac{9}{(x-3)^2+3} = 3$

$x = 3$

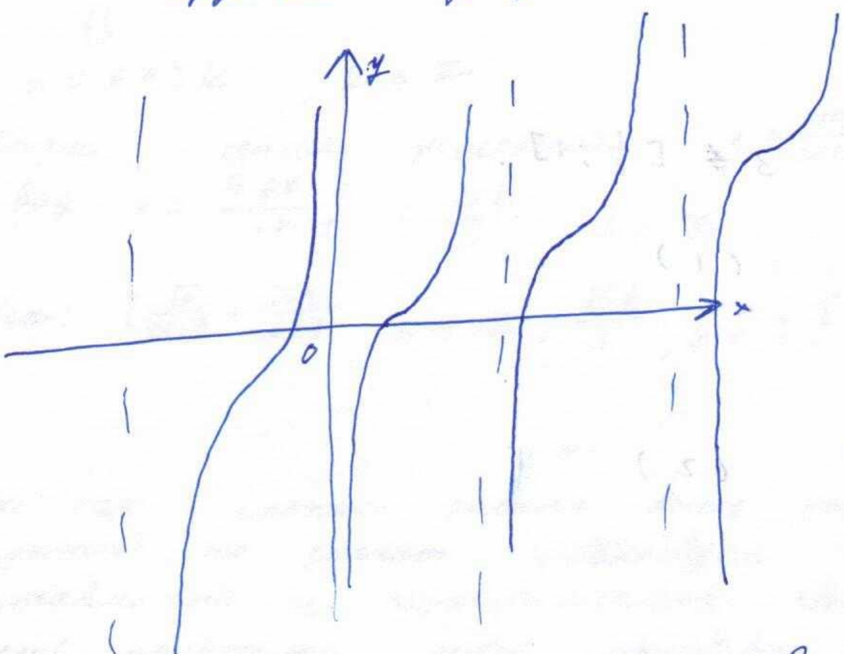
Ответ: $\{3\}$.

делаем замену $x+b\,ctg\,x=t$

$2a+2\sqrt{2t+2|t|}=6+at$

заметим, что $t+|t|\geq 0 \quad \forall t\in R$

Р/м $x+b\,ctg\,x=t$. График левой части этого ур-я схематично имеет следующий вид при $b>0$




Нетрудно заметить, что при любых $b\neq 0$ ф-ии $y=x+b\,ctg\,x$ будет принимать значение $t$ бесконечное множество раз (по одному на каждом периоде ф-ии $ctg\,x$. След-но и решений будет бесконечное множество. Значит одно решение будет при $b=0$.

$x=t$

~~$2a+2\sqrt{2a+2|a|}=6+ax$~~

$2a+2\sqrt{2x+2|x|}=6+ax$ должно иметь 1 решение.

1) $x<0$

$2x+2|x|=0$

$2a=6+ax$

$\begin{cases} x=2-\frac{6}{a} \\ x<0 \end{cases}$ $\quad 2-\frac{6}{a}<0 \quad a>3$

При $a>3$ $\exists$ решение $x=2-\frac{6}{a}$

2) $x\geq 0$

$2a+2\cdot\sqrt{2x+2x}=6+ax$

$ax-4\sqrt{x}+6-2a=0 \qquad D_1=4-6a+2a^2=2(a-1)(a-2)$

одно решение будет, если

$\left[\begin{array}{l} x_1x_2<0 \\ \begin{cases} x_1x_2=0 \\ D_1=0 \end{cases} \\ D_1=0 \end{array}\right.$ ?

$\left[\begin{array}{l} \frac{6-2a}{a}<0 \\ \begin{cases} a=3 \\ \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=2 \end{array}\right. \end{cases} \\ a=1 \\ a=2 \end{array}\right.$ $\qquad \left[\begin{array}{l} a<0 \\ a>3 \end{array}\right.$