Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+ 1 лист

111539

Шифр ______________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математике
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Сатбурский Александр Ильич

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, № 1580

Регистрационный номер ШМ5271

Вариант задания 18

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника

$\Sigma = 50$ (пятьдесят) ...

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
6	9	0	20	15	—					50

111539

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

539

Вариант № 18

Задача № 2.

$\sin^4(2022x) + \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2018}(2022x) = 1$ (☆)

1) $\sin^4\alpha - 1 = (\sin^2\alpha - 1)(\sin^2\alpha + 1) = -\cos^2\alpha\cdot(\sin^2\alpha+1)$ для всех действительных значений α (для $\forall\alpha\in\mathbb{R}$)

Поэтому (☆): $-\cos^2(2022x)\cdot(\sin^2(2022x)+1) + \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2018}(2022x) = 0$

i) Если $\cos(2022x)=0$, то $0\cdot(\sin^2(2022x)+1) + \cos^{2017}(2019x)\cdot 0 = 0$ – равенство выполняется, т.е. $\cos(2022x)=0 \Rightarrow 2022x = \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

$x = \frac{\pi}{4044} + \frac{\pi n}{2022},\ n\in\mathbb{Z}$ – одно из решений уравнения (☆).

ii) Если $\cos(2022x)\neq 0$, то разделим (☆) на $\cos^2(2022x)\neq 0$; получим:

$-\sin^2(2022x) - 1 + \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x) = 0$ (☆☆)

2) $1\le\sin^2\alpha + 1\le 2$, т.к. $|\sin\alpha|\le 1$ для $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

$\cos^{2016}\alpha\ge 0$ для $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

Т.к. $\cos^{2017}\alpha\cdot\cos^{2016}\beta\le 1$ для $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ввиду того что $|\cos\alpha|\le 1$, $0\le\cos^{2016}\beta\le 1$, то для того, чтобы выполнялось (☆☆) необходимо и достаточно, чтобы:

$$\begin{cases}\sin^2(2022x)=0\\ \cos^{2017}(2019x)=1\\ \cos^{2016}(2022x)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin(2022x)=0 & (a)\\ \cos(2019x)=1 & (b)\\ \cos(2022x)=\pm 1 & (c)\end{cases}$$

Если $\sin(2022x)=0$, то $\cos(2022x)=\pm 1$ (т.к. $x=\frac{\pi k}{2022}, k\in\mathbb{Z}$) $\Rightarrow$ (с) является следствием (а)

Можно решать только (а) и (в)

$$\begin{cases} (a) \Rightarrow x\cdot 2022=\pi k \Rightarrow x=\frac{\pi k}{2022}, k\in\mathbb{Z} \\ (в) \Rightarrow 2019x=\frac{\pi}{2}+\pi l, l\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=\frac{\pi}{4038}+\frac{\pi l}{4038}, l\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

9

В итоге: $x\in\left\{\frac{\pi}{4044}+\frac{\pi n}{2022}; \frac{\pi m}{2022}; \frac{\pi}{4038}+\frac{\pi l}{4038}\right\}$

$n, m, l\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $x\in\left\{\frac{\pi}{4044}+\frac{\pi n}{2022}; \frac{\pi m}{2022}; \frac{\pi}{4038}+\frac{\pi l}{4038}\right\}$.

$l, n, m\in\mathbb{Z}$.

Задача №5.

$$6a+2ab\,tgx+2\sqrt{2(x+|x-2b\,tgx|-2b\,tgx)}=10+ax$$

Раскроем модуль:

$$\left[\begin{array}{l} ① \begin{cases} x>2b\,tgx \\ 6a+2ab\,tgx+4\sqrt{x-2b\,tgx}=10+ax \end{cases} \\ ② \begin{cases} x\le 2b\,tgx \\ 6a+2ab\,tgx=10+ax \end{cases} \end{array}\right.$$

, причём ограничение $x>2b\,tgx$ учитывает ограничение для подкоренного выражения $x-2b\,tgx\ge 0$.

Рассмотрим по отдельности системы ① и ②:

① $\begin{cases} x>2b\,tgx \\ 6a-10+4\sqrt{x-2b\,tgx}=a(x-2b\,tgx) \end{cases}$ (перенесли слагаемое 10 влево, а $2ab\,tgx$ вправо и вынесли параметр a за скобки в правой части уравнения)

Замена: $\sqrt{x-2b\,tgx}=q$.

Т.к. $x>2b\,tgx$, то $x-2b\,tgx>0$, то $q>0$.

Получаем:

$$\begin{cases} q>0 \\ 6a-10+4q=aq^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q>0 \\ aq^2-4q-6a+10=0 \end{cases}$$

Если $a=0$, то $0\cdot q^2-4q-6\cdot 0+10=0$

$q=\frac{4}{10}=2/5>0$, т.е. при $a=0$ − 1 решение.

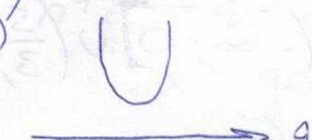
У квадратного трёхчлена: $f(q)=aq^2-4q-6a+10=0$

$x_B=\frac{4}{2a}=\frac{2}{a}$; $D=4+6a^2-10a=6\left(a-\frac{2}{3}\right)(a-1)$

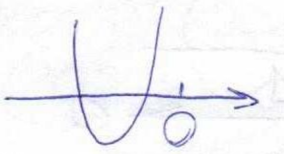
(получено по обратной теореме Виета с преобразованием трёхчлена к виду $x^2+px+q=0$, где $p,q\in\mathbb{R}$, $p,q\neq 0$.)

$\frac{f(0)}{A}=\frac{-6a+10}{a}=$
$=\frac{-6\left(a-\frac{5}{3}\right)}{a}$.

0 решений:

i) 

ii) 

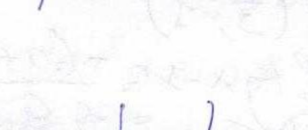
iii) 

$$\left[\begin{array}{l} D<0 \\ \begin{cases} D=0 \\ x_B\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} D>0 \\ x_B<0 \\ \frac{f(0)}{A}\ge 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\in\left(\frac{2}{3};1\right) \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=2/3 \\ a=1 \end{array}\right. \\ \frac{2}{a}\le 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \\ \begin{cases} a\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup(1,\infty) \\ \frac{2}{a}<0 \\ \frac{-6\left(a-\frac{5}{3}\right)}{a}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \end{array}\right.$$

(условия получены из теорем о квадратном трёхчлене и св-в его корней).

Т.е. 0 решений при $a\in\left(\frac{2}{3};1\right)$.

2 решения: (единственный случай).



$$\begin{cases} D>0 \\ x_B>0 \\ \frac{f(0)}{A}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup(1;\infty) \\ \frac{2}{a}>0 \\ a\in\left(0;\frac{5}{3}\right) \end{cases}$$

Т.е. 2 решения при $a\in\left(0;\frac{2}{3}\right)\cup(1;5/3)$.

Т.е. 1 решение при оставшихся значениях a, т.е. при $a\in(-\infty;0]\cup\{2/3\}\cup\{1\}\cup\left[\frac{5}{3};\infty\right)$, причём при $a=0$ q − больший корень, т.к. $q>0$, другой корень − отрицательный.

Исследование 1 окончено.

1

② $\begin{cases} 6a+2ab\,tg\,x=10+ax \\ x\le 2b\,tg\,x \end{cases}$ $\cos x\neq 0.$

~~6a-10=0~~ $\begin{cases} a(2b\,tg\,x-x)=-6a+10 \\ x-2b\,tg\,x\le 0 \end{cases}$

Замена: $p=2b\,tg\,x-x\ge 0$

Получаем систему:

$\begin{cases} p\ge 0 \\ ap=-6a+10 \end{cases}$ Если $a=0$, то $10=0$ - нет решений. $(\varnothing)$.

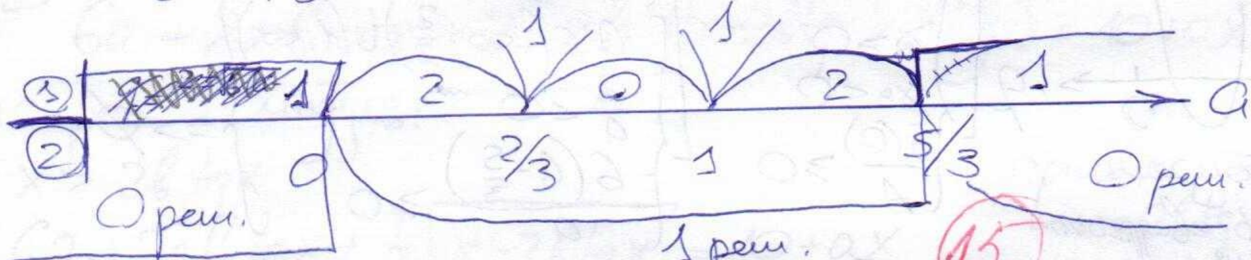
Если $a\neq 0$; то $p=\frac{-6a+10}{a}$

0 решений: $\left[\begin{array}{l} \frac{-6a+10}{a}<0 \\ a=0 \end{array}\right. \Rightarrow a\in(-\infty;0]\cup(\frac{5}{3};\infty)$

1 решение: $\frac{-6a+10}{a}\ge 0 \Rightarrow a\in(0;\frac{5}{3}]$.

Исследование 2 окончено.

③ Изобразим полученное на числовой оси:



1 15

Т.е. при $a(-\infty;0]\cup(\frac{2}{3};1)\cup[\frac{5}{3};\infty)\to 1$ решен
(i) (ii) (i) (не меньше 1, но не больше

2 i) $\begin{cases} a\in(-\infty;0]\cup[\frac{5}{3};\infty) \\ \sqrt{x-2b\,tg\,x}=\frac{2\mp\sqrt{6(a-2/3)(a-1)}}{a} \end{cases}$ ii) $\begin{cases} a\in(\frac{2}{3};1) \\ 2b\,tg\,x-x=\frac{-6a+10}{a} \end{cases}$

1 Т.к. $g(x)=tg\,x$ - периодическая ф-ция с периодом π, то при $b\neq 0$ решений может быть бесконечно много. Поэтому чтобы оставить 1 решение, необходимо и достаточно, чтобы параметр $b=0$.

Т.е. имеем ответ:

Ответ: единственное решение при $\begin{cases} a\in(-\infty;0]\cup(\frac{2}{3};1)\cup[\frac{5}{3};\infty) \\ b=0 \end{cases}$

Причём при $\begin{cases} a\in(-\infty;0]\cup[\frac{5}{3};\infty) \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow x=\left(\frac{2+\sqrt{6(a-2/3)(a-1)}}{a}\right)^2$; $x=\left(\frac{2-\sqrt{\ }}{a}\right)^2$

при $\begin{cases} a\in(\frac{2}{3};1) \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{6a-10}{a}$;

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

111539

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

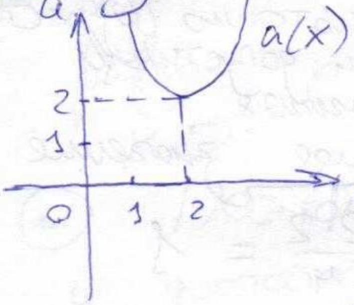
Вариант № 18

Задача № 4

$$\begin{cases} \frac{3}{4} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) + \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} \geq 19 g\left(g^3(x)\right). \\ g(x) = \frac{4}{x^2 - 4x + 6} \end{cases}$$

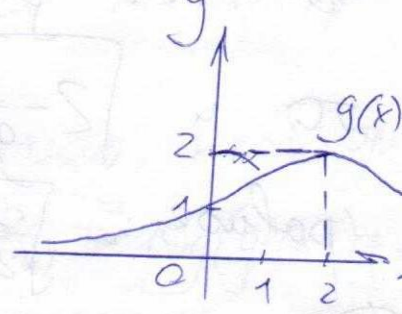
20

① Пусть $a(x) = x^2 - 4x + 6 = (x^2 - 4x + 4) + 2 = (x-2)^2 + 2.$

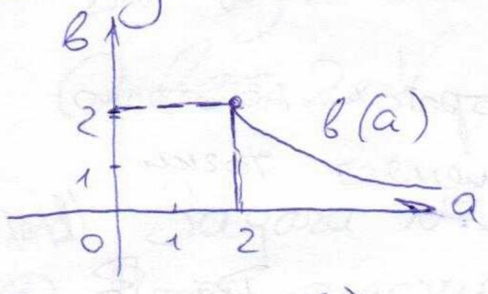


$D_a = \mathbb{R};$

$E_a = [2; \infty).$

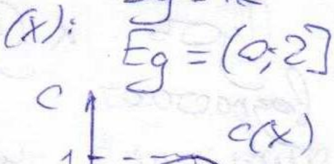


② Пусть $b(a) = \frac{4}{b};$



$D_b = E_a \setminus \{0\} = [2; \infty)$

$E_b = (0; 2].$, т.е. $g(x)$: $D_g = \mathbb{R}$, $E_g = (0; 2].$

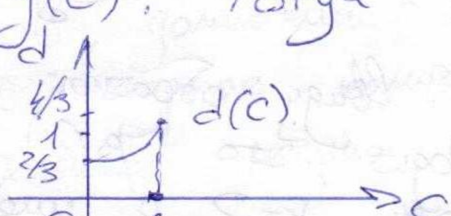


③ $c(x) = \frac{g(x)}{2}$; $E_c = (0; 1]$

$D_c = \mathbb{R}.$ (т.к. $\frac{1}{2} \cdot g_{max}(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$).

④ $d(c) = g(c)$. Тогда $D_d = (0; 1] = E_c;$

$E_d = \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$, т.к. $g(0) = \frac{2}{3}$; $g(1) = \frac{4}{3}.$



⑤ $e(d) = \frac{3}{4} d$ (ф-ция сжимается к гориз. оси). Поэтому $D_e = \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$

(область опред. не меняется) $E_e = \left(\frac{1}{2}; 1\right]$

$\frac{3}{4} g\left(\frac{g(x)}{2}\right)$ - эта функция имеет максимальное (наибольшее значение) при $x=2$ (*) и равно:

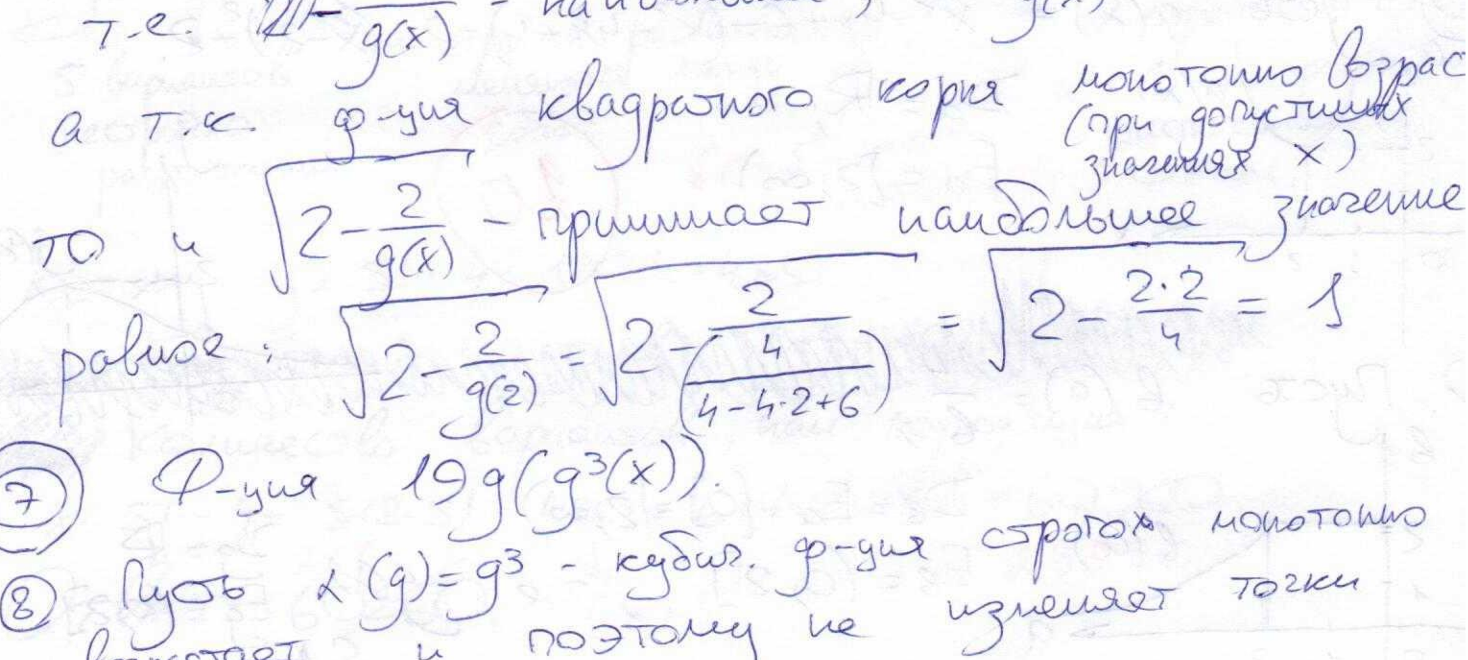
$$\frac{3}{4} g\left(\frac{\frac{4}{4-4\cdot2+6}}{2}\right) = \frac{3}{4} g(1) = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{1-4\cdot1+6} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = 1.$$

(*): наибольшее значение достигается при $x=2$, т.к. при $x=2$ $a(x)$ принимает наименьшее значение, $b(a)$ - на[ибольшее], $c(b)$ - наименьшее, $d(c)$ - наибольшее, $e(d)$ - наибольшее т.к. $e=\frac{3}{4}d$ не меняет точки минимума и максимума ф-ции $d(c)$.

⑥ Ф-ция $\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}$: при $x=2$ $g(x)$ принимает ~~наим~~ наибольшее значение, т.е. $\frac{2}{g(x)}$ - наименьшее, т.е. $\cancel{2}-\frac{2}{g(x)}$ - наибольшее, $2-\frac{2}{g(x)}$ - наибольшее, а т.к. ф-ция квадратного корня монотонно возрас[тает] (при допустимых значениях x) то и $\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}$ - принимает наибольшее значение равное: $\sqrt{2-\frac{2}{g(2)}} = \sqrt{2-\frac{2}{\frac{4}{4-4\cdot2+6}}} = \sqrt{2-\frac{2\cdot2}{4}} = 1$

⑦ Ф-ция $19g(g^3(x))$.

⑧ Пусть $\alpha(g)=g^3$ - кубич. ф-ция строго монотонно возрастает и поэтому не изменяет точки минимума и максимума.



⑨ Пусть $\beta(\alpha)=g(\alpha)$ Тогда ввиду обратной пропорциональности ф-ции $g(x)$ выходит, что $\beta(\alpha)$ достигает наименьшего значения при $x=2$, а имен[но]:

$$g(g^3(2)) = g\left(\left(\frac{4}{4-8+6}\right)^3\right) = g(8) = \frac{4}{64-4\cdot8+6} = \frac{4}{38} = \frac{2}{19}.$$

⑩ Следовательно, функция $19g(g^3(x))$ также принимает наименьшее значение при $x=2$, т.к. постоянный положительный множитель (19) не влияет на расположение точек минимумов и максимумов, а только раздвигает график от горизонтальной оси в 19 раз.
Т.е. минимальное значение этой ф-ции равно
$19\cdot g(g^3(2)) = 19\cdot\frac{2}{19} = 2$; максимум нас не волнует, т.к. уже
(из пункта (9))
в левой части неравенства выражение принимает значение 2, являющееся для него наибольшим и которое достается только при $x=2$, а ~~справа~~ в правой части неравенства выражение принимает ~~наибол~~ наименьшее значение равное 2, и которое достается только при $x=2$.

⑪ Поэтому, чтобы нер-во выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{3}{4}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)+\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}} = 19g(g^3(x)) = 2$, это возможно только при $x=2$.

Ответ: 2.

Задача №1.

① Пусть пластинки не отличаются друг от друга, т.е. ~~нам~~ для нас отсутствует разница, в каком порядке идут стекла. Затем, найдя количество вариантов, домножим его на 5! и получим в итоге нужное количество вариантов.

② I стеклышко можно положить только 1 возможным способом*.

* В задаче спрашивается кол-во способов укладки стекол, из чего можно сделать вывод, что не имеет значения, повернём ли мы стопку на $\pi/2$, π или $3\pi/2$ радиан.

(3) $\overline{\text{IV}}$ стёклышко можно положить на $\overline{\text{I}}$ 4 способами.
(4) $\overline{\text{III}}$ стёклышко можно положить на $\overline{\text{IV}}$ 4 способами
и так далее... до определённого момента.

Будем решать задачу по другому:
(с разницей в стеклах) Всего вариантов располож… друг на друге 5 пластины: $1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024$ (1 пластину можно пол… без разницы как).

Количество способов которыми можно уложить пластинки так, чтобы не было прозрачных слоёв: $y = 5 \cdot 4!(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4)$, т.к 4 уголка должны строго располагаться в 4 разных сторонах, а ещё 1 – в любых и могут меняться между собой те, которые стоят строго.

$y = 5 \cdot 4! \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4)$

5 вариантов нестрогого расположения

строгие расположения меняются между собой

4 строгих (1) и 1 нестрогое (4) расположения стекол.

60·5! – не подходит

6

Поэтому $y = 5! \cdot 4 = 120 \cdot 4 = 480$.

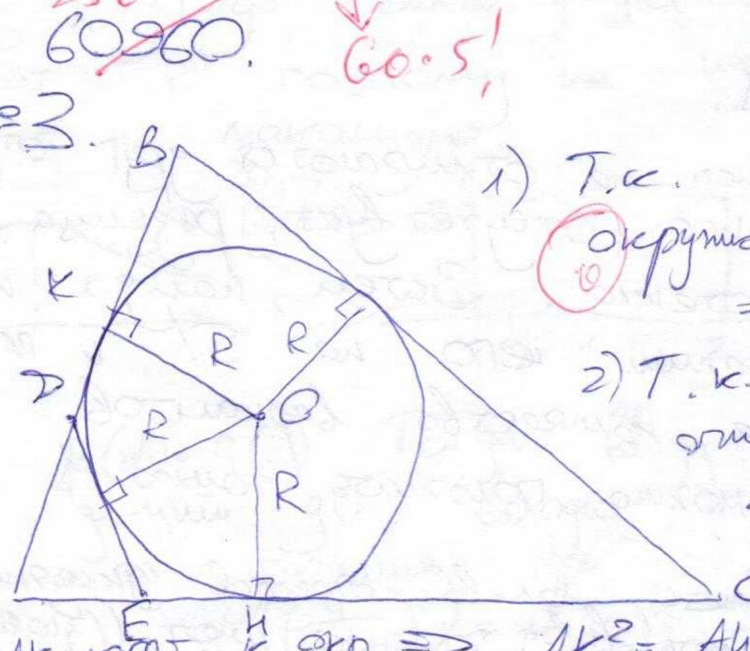
Количество вариантов, нам подходящих:
$x \cdot 5! - y = \cancel{512} \cdot 5! - 480 = 61440 - 480 = 60960$.

256

Ответ: $60\cancel{960}$. ↓ 60·5!

23520

Задача №3.



1) Т.к. в BDEC вписана окружность, то $BD + EC = DE + BC$.

10

2) Т.к. около BDEC описана окружность, то $\angle BDE + \angle BCE = \pi = \angle CBD + \angle DEC$.

3) AK – касат. к окр. $\Rightarrow AK^2 = AH \cdot HC$; Окружность вписана в $\triangle ABC \Rightarrow$ её це… точка пересеч. биссек…