Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+ 1 Шуз

Шифр 111221

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Фомичев Степан Дмитриевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва; школа №179

Регистрационный номер ШМ 4744

Вариант задания 19

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника Фом.

сорок семь баллов

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	3	12	–	20	–					47

111221

Шифр

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

№1

Сначала посчитаем общее число вариантов. Положить в стопку 5 стекол вариантов $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$, но т.к. стекла можно поворачивать, то домножим на 3^5 и делим на число поворотов т.к. каждый вариант мы посчитали 3 раза.

Всего вариантов $\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot3^5}{3}$ +.

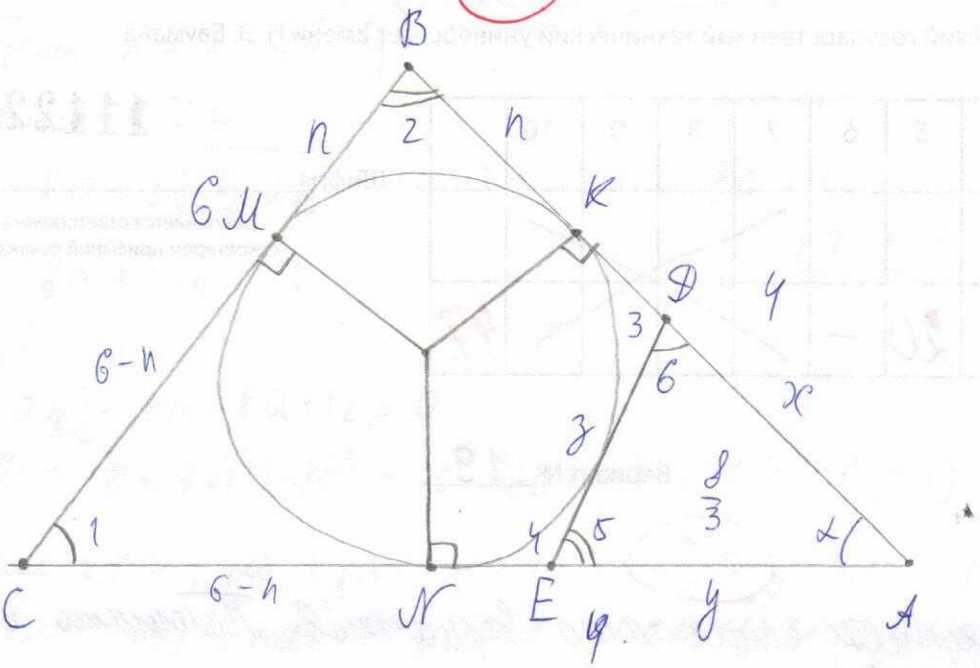
Посчитаем число неблагоприятных вариантов. ~~Из 3 секций выберем 1, которая будет оставаться прозрачной для всех стекол. C_3^1 вариантов.~~ Вариантов сложить 5 стекол в столбик $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$, ~~далее каждое первое стекло может лежать в 1 из 3 позиций~~. далее выбираем позицию, которая будет прозрачной, C_3^2 вариантов. Теперь каждое из стекол может лежать на 1 из 2 позиций, но мы должны вычесть 3 случая, когда у нас все закрашенные позиции накладываются друг на друга и разделить на число поворотов $\Rightarrow \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot(C_3^2\cdot(2^5-3)}{3}$ ~~= 810~~

$\Rightarrow$ благоприятных вариантов $5\cdot4\cdot3\cdot2(3^4-2^5+1)=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot50=$

$=12\cdot10\cdot50=6000$. +

12

№3.



1) Т.к. BCDE вписан в окружность, то $\angle 3 + \angle 1 = 180°$ => $\angle 2 + \angle 4 = 180°$

=> $\angle 1 = \angle 6$; $\angle 2 = \angle 5$. т.к. $\angle 4 + \angle 5 = 180° = \angle 4 + \angle 2$

$\angle 3 + \angle 6 = 180° = \angle 3 + \angle 1$.

2) Пусть $BM = n$ => $BK = n$ (т.к. кас. из одной точки) | =>

$MC = 6 - n$.

=> $CN = 6 - n = MC$.

$AN = KA = 4$.

3) $S(AED) = \frac{xy \sin\alpha}{2} = \frac{8}{3}$. ($AD = x$; $AE = y$)

4) Т.к. $\angle 6 = \angle 1$, $\angle 5 = \angle 2$ => $\triangle ABC \sim \triangle AED$. => $\frac{x}{10-n} = \frac{y}{4+n} = \frac{z}{6}$.

5) По т. косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cos\alpha \cdot AB \cdot AC$.

$36 = (4+n)^2 + (10-n)^2 - 2\cos\alpha\,(4+n)(10-n)$

6) Т.к. BCED описан, то $BC + DE = BD + CE$ =>

=> $6 + z = (n + 4 - x) + (6 - n + 4 - y) =$

$z = 8 - x - y$.

7) Получаем систему уравнений (она имеет 5 уравнений и 5 неизвестных):

$$\begin{cases} \dfrac{xy\sin\alpha}{2} = \dfrac{8}{3} \\ \dfrac{x}{10-n} = \dfrac{y}{4+n} = \dfrac{z}{6} \\ 36 = (4+n)^2 + (10-n)^2 - 2\cos\alpha(4+n)(10-n) \\ z + x + y = 8 \end{cases}$$

+

$$y = \left(\frac{n+4}{10-n}\right)x \qquad z = \frac{6x}{10-n}.$$

где-то ошибка в вычислениях...

$$\frac{16}{3} = x^2\left(\frac{n+4}{10-n}\right)\sin\alpha.$$

$$x + x\left(\frac{n+4}{10-n}\right) + \frac{6x}{10-n} = 8.$$

$$\frac{x(10-n) + x(n+4) + 6x}{10-n} = 8.$$

$$20x = 80 - 8n.$$

$$5x = 20 - 2n.$$

$$\cos\alpha = \frac{(4+n)^2 + (10-n)^2 - 36}{2(4+n)(10-n)} = \frac{n^2 - 6n + 40}{(4+n)(10-n)}$$

$$\sin\alpha = \frac{16}{3}\cdot\frac{10-n}{n+4}\cdot\frac{25}{(20-2n)^2} = \frac{100}{3(n+4)(10-n)}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{100}{3(n^2-6n+40)}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\frac{(n^2-6n+40)^2}{((4+n)(10-n))^2} = 1 - \frac{100^2}{9(n+4)^2(10-n)^2}$$

$$(n^2-6n+40)^2 = (n^2-6n-40)^2 - \left(\frac{100}{3}\right)^2$$

$$\cancel{(n^2-6n)^2} + 80(n^2-6n) + \cancel{1600} = \cancel{(n^2-6n)^2} - 80(n^2-6n) + \cancel{1600} - \left(\frac{100}{3}\right)^2$$

$$160(n^2-6n) + \left(\frac{100}{3}\right)^2 = 0.$$

$$n^2 - 6n = -\left(\frac{100}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{160} = \frac{1000}{9\cdot 16} = \frac{125}{18}$$

12.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{100}{3\left(\frac{125}{18}+40\right)} = \frac{100\cdot 6}{125 + 18\cdot 40} = \frac{20\cdot 6}{25 + 18\cdot 8} = \frac{120}{\cancel{169}}.$$

№5 (часть 1)

Пусть $n = x - 3b\,ctg\,x$.

~~[illegible]~~ $n > 0$

$8a + 2\sqrt{2\cancel{b}\cdot 2\cancel{n}} = 12 + an$.

$8a + 4\sqrt{n} = 12 + an$.

$\sqrt{n} = m$.

$am^2 - 4m - 8a + 12 = 0$.

$D = 16 - 4a(12 - 8a) = 16 - 48a + 32a^2 = 16(2a-1)(a-1)$

$n < 0$.

$8a = 12 + an$.

$n = \dfrac{8a-12}{a}$

Если $b \neq 0$, то взяв $n = x - 3b\,ctg\,x$ ~~у~~, где n – фиксированное число, ~~так~~ у нас получится бесконечно много решений т.к. $ctg\,x$ – периодическая функция $\Rightarrow b = 0 \Rightarrow n = x$. +

~~[illegible] при $x < 0$ всегда есть решение~~.

$8a + 2\sqrt{2(x+|x|)} = 12 + ax$.

$x > 0$

$ax - 4\sqrt{x} - 8a + 12 = 0$.

$x < 0$

$x = \dfrac{8a-12}{a}$.

$D = 16(2a-1)(a-1)$

$\sqrt{x} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16(2a-1)(a-1)}}{2a}$.

Если $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$, то решение одно т.к. $D < 0$ и $x = \dfrac{8a-12}{a} < 0$.

Второй случай, когда у нас 1 решение – когда $\dfrac{4 - \sqrt{16(2a-1)(a-1)}}{2a} < 0$ и $\dfrac{8a-12}{a} > 0$

$\left[\begin{array}{l} a > \frac{3}{2}. \\ a < 0 \end{array}\right.$

$\dfrac{4 - \sqrt{16(2a-1)(a-1)}}{2a} < 0$

$\dfrac{2 - 2\sqrt{(2a-1)(a-1)}}{a} < 0$ +

① $\begin{cases} a < 0 \\ 2 - 2\sqrt{(2a-1)(a-1)} > 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} a > 0 \\ 2 - 2\sqrt{(2a-1)(a-1)} < 0. \end{cases}$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

111221

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

№5 (часть 2)

Вариант № 19

① $2 > 2\sqrt{(2a-1)(a-1)}$

$2a^2-3a+1 < 1.$

$a(2a-3) < 0.$

$a \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$

$a < 0$

$\varnothing$

② $\begin{cases} a \geq 0 \\ 2-2\sqrt{(2a-1)(a-1)} < 0. \end{cases}$

$a \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

(объединим с $\left[\begin{array}{l} a > \frac{3}{2} \\ a < 0 \end{array}\right. \Rightarrow a \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$)

Ответ: $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$; $b = 0$; если $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$, то $x = \frac{8a-12}{a}$, +.

~~$\sin^4(2016x) + \cos^{2017}(2025x)\cos^{2018}(2016x) = 1.$~~

если $a \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, то $x = \left(\frac{4+\sqrt{16(2a-1)(a-1)}}{2a}\right)^2 = \left(\frac{2+2\sqrt{(2a-1)(a-1)}}{a}\right)^2$ + 20

№2

Уравнение будет иметь решение в двух случаях:

не značит!!!

① $\sin^4(2016x) = 1$

② $\begin{cases} \cos^{2018}(2016x) = 1 \Rightarrow \cos(2016x) = 1 \\ \cos^{2017}(2025x) = 1. \Rightarrow \cos(2025x) = 1. \end{cases}$

① $\sin(2016x) = 1$ $\quad 2016x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$ $\quad x = \frac{\pi}{4032} + \frac{\pi n}{1008}.$

$\sin(2016x) = -1.$ $\quad x = \frac{3\pi}{4032} + \frac{\pi n}{1008}.$

② Выполняется только в случае, если $\cos(9x) = 1$ т.к.

$\cos(2025x) = \cos(2016x)\cos(9x) - \sin(2016x)\sin(9x) = \cos(2016x)\cos(9x) = 1.$

$$\begin{cases} 9x = 2\pi n \\ 2016x = 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi n}{9}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4032} + \frac{\pi n}{1008}$; $\frac{3\pi}{4032} + \frac{\pi n}{1008}$; $\frac{2\pi n}{9}$.

3