Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1 лист КР

+1

111300

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету Математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Дагушин Павел Дмитриевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, №1208

Регистрационный номер ШМ4041

Вариант задания 19

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника Дагушин

55 (пятьдесят пять) [illegible]

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
–	9	16	20	–	10					55

111300

Шифр ______

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

Тогда слева стоит сумма 2-ух возрастающих функций, то есть возрастающая функция.

$h(t) = t^6 - 4t^3 + 7$, $h'(t) = 6t^5 - 12t^2 = 6t^2(t^3 - 2)$

$h'(t) = 0$ при $t = 0$ и $t = \sqrt[3]{2}$;

$h'(t)$: $[1;\ \sqrt[3]{2};\ 2]$, t

При $t = 2$ $h'(t) > 0$, при $t = 1$ $h'(t) < 0$ $\Rightarrow$ при $t \in [1; \sqrt[3]{2}]$ $h(t) \downarrow$, а при $t \in [\sqrt[3]{2}; 2]$ $\uparrow$. Тогда ~~минимальное~~ ~~значение h(t)~~ $\frac{78}{h(t)}$ ведёт себя так:

$[1;\ \sqrt[3]{2};\ 2]$, t

Значит $\frac{78}{h(t)}$ минимально или при $t = 1$, или при $t = 2$. $\frac{78}{h(1)} = \frac{78}{4}$; $\frac{78}{h(2)} = 2$.

Максимальное значение функции в левой части принимается при $t = 2$, т.к. функция возрастающая, по док-ому при $t = 2$ левое выражение равно тоже 2, то-есть имеем нер-во вида ~~$p(x) \geq q($~~ $p(t) \geq q(t)$ где $p(t)_{max} = q(t)_{min}$, значит

если и ~~у~~ есть решения, то только при $t = 2$.
иначе выражение слева будет убывать, а выражение справа возрастать ($t \in [1; 2]$).
Обратная замена: $2 = \frac{6}{x^2-4x+7}$ <=> $2x^2-8x+14 = 6$, $x^2-4x+7 \neq 0$

$2x^2-8x+8 = 0 | :2$, $(x-2)^2 = 0$, $X = 2$.

20

Ответ: $X = 2$

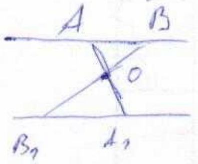
№6

Построение сечения:

1) Проведём ср. линию $MN \parallel AC$ и ~~построим~~ $M_1N_1 \parallel A_1C_1$, тогда MNM_1N_1 - прямоугольник, пл-сть $MNM_1N_1 \parallel AA_1C_1C$ и ц. симметрии грани AA_1B_1B принадлежит этой плоскости. Проведём $OO_1 \parallel MN$ (т. O - ц. симметрии AA_1B). Тогда $tg\, N_1OO_1 = \frac{N_1O_1}{OO_1} = \frac{CC_1}{2MN} = \frac{CC_1 \cdot 2}{2AC} = \frac{CC_1}{AC} = tg\, C_1AC$ => $ON_1 \parallel AC_1$. Соединим т. C и N_1, отложим $MM' = MN$, тогда т. $M'ON_1$ лежат на одной прямой, т.к. $tg\, M'OM = \frac{M'M}{OM} = \frac{MN}{O_1N} = \frac{OO_1}{O_1N_1} = tg\, ON_1O_1$.

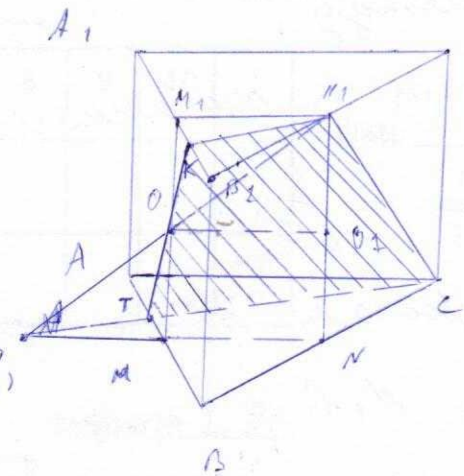
Соединим т. M' и C, т.к. $M', C \in ABC$. $M'C \cap AB = T$. Т.к. $ABC \parallel A_1C_1B_1$, то ~~наша плоскость~~ линии пересечения искомой плоскости с ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны, тогда проведём $N_1K \in A_1B_1C_1$ и $N_1K \parallel CT$, $N_1K \cap A_1B_1 = K$. Соединим T и K, т.к. они $\in AA_1B$ и получим искомое сечение TKN_1C. Оно $\parallel AC_1$ т.к. содержит прямую $ON_1 \parallel AC_1$ и содержит точку O. Это всё на чертеже 1.

2) В решении будет использовано подобие треугольников в следующей ситуации:



($AB \parallel B_1A_1$, $\angle B_1 = \angle B$, $\angle A_1 = \angle A$ как накрест лежащие), формула площади трапеции через полусумму оснований на высоту, формула площади Δ-ка как $\frac{1}{2} ab \sin\alpha$ и $\frac{1}{2} a \cdot h$.

Чертёж 1

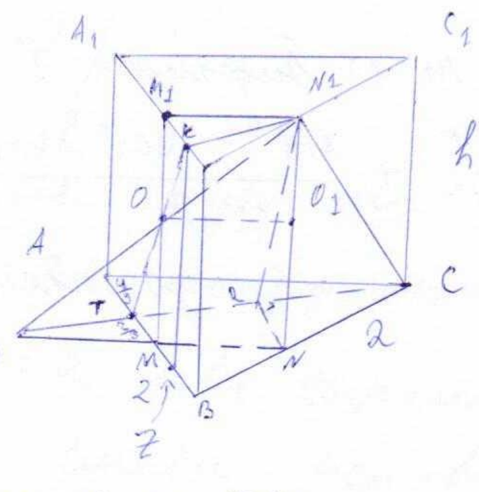


3) Само решение:

3.1 $BM = AM = 2$ по построению, из подобия $\Delta MTM'$ и ΔCTA $\frac{MT}{AT} = \frac{MM'}{AC} = \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$, откуда $MT = \frac{2}{3}$, $AT = \frac{4}{3}$.

3.2 $M_1K = MT$ т.к. $\Delta TOM = \Delta KOM_1 \Rightarrow M_1K = \frac{2}{3}$, $MB = M_1B_1$ т.к. MBM_1B_1 — прямоугольник, тогда $BK_1 = B_1M_1 - M_1K = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$; $B_1N_1 = BN = 2$; +

Чертёж 2

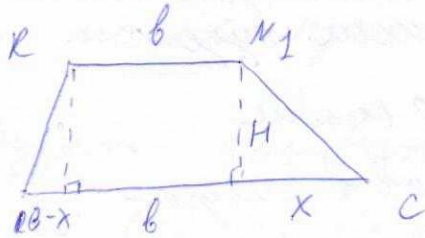


3.3 $\frac{B_1K}{BT} = \frac{B_1N_1}{BC} = 2$

и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1 \Rightarrow \Delta KB_1N_1 \sim \Delta TBC$ с коэфф. $\frac{1}{2}$, пусть $CT = 2b$, тогда $N_1K = b$;

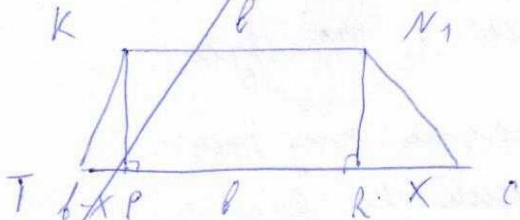
7.

3.4. В трапеции TKN_1C найдём связь между высотой трапеции и основаниями:



$S_{трап.} = \frac{b+2b}{2}\cdot H = \frac{9}{\sqrt{5}}$, откуда $H = \frac{18}{3b\sqrt{5}} = \frac{6}{b\sqrt{5}}$;

3.5. Через h обозначим AA_1 и опустим в трапеции высоты KP и N_1R, если $CR = x$, то $TP = b - x$.



~~Из $\triangle CC_1N_1$ $h^2 + C_1N_1^2 = CN_1^2$; из $\triangle N_1RC$ $H^2 + x^2 = CN_1^2$~~

Из $\triangle CC_1N_1$ и $\triangle CRN_1$ по т Пифагора $N_1R^2 = CC_1^2 + C_1N_1^2 - CR^2$ (это уже с преобразованиями). С другой стороны, $KP = N_1R$ и $KP^2 = BB_1^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - TP^2$. Составим ур-е: $CC_1^2 + 4 - x^2 = BB_1^2 + \frac{16}{9} - (b-x)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{20}{9} - x^2 = -x^2 - b^2 + 2bx \Leftrightarrow 2bx = \frac{20}{9} + b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{9b^2+20}{18b}$.

3.6. Из $\triangle CRN_1$ по т Пифагора $CN_1^2 = RN_1^2 + x^2 =$

$= H^2 + x^2 = \frac{36}{5b^2} + \frac{81b^4 + 360b^2 + 400}{324b^2}$

продолжение дальше.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

111300

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

№2. Для начала, т.к. $\sin(x)$ ~~x~~ принимает значени от -1 до 1, то $\sin^4(x) \le \sin^2(x)$, это в общем виде. В нашей задаче $\sin^4(2016x) \le \sin^2(2016x)$ (1)
Так же для $\cos^{2018}(2016x) \le \cos^2(2016x)$.
Т.к. $|\cos^{2017}(2025x)| \le 1$, то при умножении $\cos^{2017}(2025x)$ на $\cos^{2018}(2016x)$ модуль числа не увеличится, то есть $\cos^{2017}(2025x) \cdot \cos^{2018}(2016x) \le \cos^2(2016x)$ (2). Сложим нер-ва (1) и (2):
$\sin^4(2016x) + \cos^{2017}(2025x) \cdot \cos^{2018}(2016x) \le \sin^2(2016x) + \cos^2(2016x)$
По осн. триг-ому тождеству $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, тогда $\sin^4(2016x) + \cos^{2017}(2025x) \cdot \cos^{2018}(2016x) \le 1$ по док-ому, но из ур-я левая часть равна 1, что возможно только если ~~оба~~ в обоих нер-ах (1) и (2) левые части равны правой. Запишем это в виде системы:

$$\begin{cases} \sin^4(2016x) = \sin^2(2016x) & (3) \\ \cos^{2017}(2025x) \cdot \cos^{2018}(2016x) = \cos^2(2016x) & (4) \end{cases}$$

Решим (3): $\sin^2(2016x)(\sin^2(2016x)-1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2(2016x)=0\\ \sin^2(2016x)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}2016x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z} & (5)\\ 2016x=\frac{\pi}{2}+\pi k;\ k\in\mathbb{Z} & (6)\end{array}\right.$$

Подставим $\cancel{2016}x=\frac{\pi n}{2016}$ в ур-е (4): $\cancel{\cos^{2017}(2025x)\cdot}$

$\cancel{\cdot\cos^{2018}(\pi n)=\cos^2(\pi n)\Leftrightarrow}$

$\cos^{2017}\left(2025\cdot\frac{\pi n}{2016}\right)\cdot\cos^{2018}(\pi n)=\cos^2(\pi n)\Leftrightarrow \cos^{2017}\left(2025\cdot\frac{\pi n}{2016}\right)$

$=1$, откуда $\frac{2025\cdot\pi n}{2018}=2\pi p$; $n,p\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2025n=4032p$, откуда $n=\frac{4032p}{2025}=\frac{\cancel{1344}^{448}p}{\cancel{675}_{225}}$, а т.к.

$n\in\mathbb{Z}$, то $p=\cancel{675}^{225}r$, $r\in\mathbb{Z}$. Тогда имеем первую серию решений $2016x=\pi n=\pi\cdot\frac{1344p}{675}=\frac{\pi\cdot1344\cdot675r}{675}=$

$=1344\pi r$, где $r\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{1344\pi r}{2016}$, где $r\in\mathbb{Z}$.

$X=\frac{448r\pi}{2016}=\frac{2r\pi}{9}$

Из (6) $2016x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, подставим это в (4):

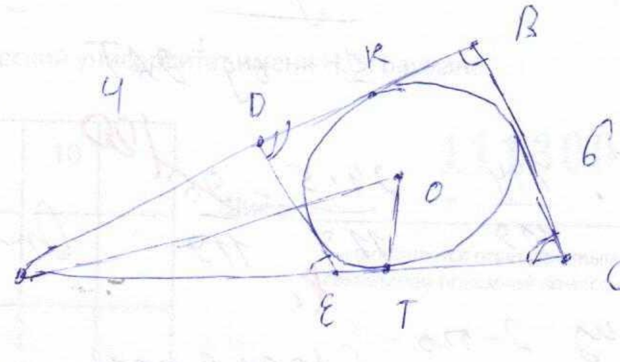
$$\cos^{2017}\left(2025\cdot\left(\frac{\pi}{4032}+\frac{\pi k}{2016}\right)\right)\cdot\underbrace{\cos^{2018}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)}_{0}=\underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)}_{0}\Leftrightarrow$$

$0=0\Rightarrow$ ~~ке~~ независимо от 1-ого множителя (4) верно.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4032}+\frac{\pi k}{2016}$, $x=1344\pi r$; $k,r\in\mathbb{Z}$

9

№3 Решение:



1) $AK = 4$ по условию, по формуле длины отрезка касательной

$AK = p_{ABC} - BC \Rightarrow$

$p_{ABC} = 10$, где p – полупериметр.

2) $\angle ABC = 180° - \angle DEC = \angle AED$ (св-ва смежных углов и четырёхугольника, вписанного в окружность, тогда $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ по 2-ум углам ($\angle A$ – общ, $\angle AED = \angle ABC$ по док-ому). $\frac{ED}{BC} = \frac{p_{ADE}}{p_{ABC}}$ (1)

3) $AK = p_{ADE}$, т.к. окружность является вневписанной к $\triangle ADE$ и по св-ву вневписанных окр-ей $AK = p_{ADE} = 4$.

4) из подобия $\frac{ED}{6} = \frac{4}{10} \Rightarrow ED = \frac{12}{5}$, тогда коэфф. подобия равен $\frac{ED}{BC} = \frac{2}{5}$, тогда $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = k^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{8}{3} : \frac{4}{25} = \frac{50}{3}$.

5) Окружность вписана в $\triangle ABC \Rightarrow$ её радиус равен $\frac{S_{ABC}}{p_{ABC}} = \frac{5}{3}$; $OT = R = \frac{5}{3}$, $OT \perp AC$ как радиус в т. касания, тогда $\operatorname{tg} OAT = \frac{OT}{AT} = \frac{5}{3 \cdot 4} = \frac{5}{12}$.

6) $\angle OAT = \angle OAK$, т.к. ц. O вписанной окр. – это т. пересечения биссектрис $\triangle ABC$, тогда $\operatorname{tg} BAC =$

$= tg\, 2OAT = \dfrac{2tg\, OAT}{1 - tg^2 OAT} = \dfrac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{119}{144}}$ 160

$= \frac{5}{6}\cdot\frac{144}{119} = \frac{24\cdot 5}{119} = \frac{\cancel{96}\ 120}{119}$. Ответ: $\frac{\cancel{96}\ 120}{119}$ +. ~~20%~~

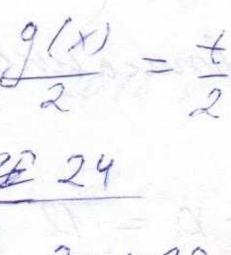
№4. из 2-ого слагаемого получаем $2 - \frac{2}{g(x)} \ge 0$, откуда $g(x) \ge 1$. Свой максимум $g(x)$ принимает в точке, в которой знаменатель минимален, то есть в вершине параболы x^2-4x+7.

g $\frac{4}{2} = 2 = x_в$, $2^2 - 4\cdot 2 + 7 = 3 \Rightarrow g(2) = \frac{6}{3} = 2$ и это максимальное значение $g(x)$. Замена $g(x) = t$, $t\in[1;2]$. Тогда $g^3(x) = t^3$, $g(g^3(x)) = g(t^3) = \frac{6}{t^6-4t^3+7}$, $\frac{g(x)}{2} = \frac{t}{2}$, $g\left(\frac{g(x)}{2}\right) = g\left(\frac{t}{2}\right) =$

$= \frac{6}{\frac{t^2}{4} - \frac{4t}{2} + 7} = \frac{24}{t^2-8t+28}$. Тогда нер-во принимает вид $\frac{2}{3}\cdot\frac{24}{(t^2-8t+28)} + \sqrt{2-\frac{2}{t}} \ge 13\cdot\frac{6}{t^6-4t^3+7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{16}{t^2-8t+28} + \sqrt{2-\frac{2}{t}} \ge \frac{78}{t^6-4t^3+7}$.

$f(t) = t^2-8t+28$



; при $t\in[1;2]$ $t\nearrow \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{2}{t}\downarrow \Rightarrow -\frac{2}{t}\nearrow \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{2-\frac{2}{t}}\nearrow$

при $t\in[1;2]$
$\cancel{t^2-8t+28}\downarrow \Rightarrow$
$\Rightarrow \cancel{\frac{48}{t^2-8t+28}}$

$f(t)\downarrow \Rightarrow \frac{16}{f(t)}\nearrow$.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 111300

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

3.5 Из т. N проведём $NQ \perp CT$. $NQ \cap CT = Q$. По ΔТ о 3-ёх перпендикулярах т.к. $NQ \perp CT$, то и $N_1Q \perp CT \Rightarrow N_1Q = H = \frac{6}{6\sqrt{5}}$ +.

3.6. Из т. K проведём $KZ \perp AB$, $KZ \cap AB = Z$. Тогда ~~ZNCT~~ ZNCT – проекция TKN_1C на пл. ABC. $NZ \parallel KN_1$, т.к. $MNKN_1$ – прямоугольник, $CT \parallel KN_1 \Rightarrow NZ \parallel CT$, $\Delta BZN \sim \Delta BTC$, т.к. $NZ \parallel CT$, $k = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{NZTC}}{S_{BTC}}$ $\frac{S_{BZN}}{S_{BCT}} = k^2 = \frac{1}{4}$,

$S_{BCT} = \frac{1}{2} \cdot BT \cdot BC \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{BZN} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. +.

3.7. $S_{BZN} = S_{TKN_1C} \cdot \cos NQN_1$ (S_{BZN} – проекция,

BZN не явл. проекцией сечения

S_{TKN_1C} – ~~фиг~~ сечение, ~~cos~~ $\angle NQN_1$ – угол между плоскостями из п. 3.5). Тогда $\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{9}{\sqrt{5}} \cdot \cos NQN_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos NQN_1 = \cancel{\frac{2\sqrt{15}}{27}}$.

10

3.8. $\sin NQN_1 = \sqrt{1 - \frac{60}{27^2}} = \frac{\sqrt{669}}{27}$; $Q2N \; \frac{NN_1}{QN_1} =$

$= \sin NQN_1 \cdot \frac{NN_1}{H} = \frac{\sqrt{669}}{27} \Rightarrow NN_1 = \frac{4\sqrt{669}}{27}$,

3.9. по Т косинусов из $\triangle TAC$ $\cancel{C7}$ $4b^2 = \cancel{4}^{16} + \frac{16}{9} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot 4$

$\Rightarrow$ Откуда $b = \frac{2\sqrt{7}}{3}$; $H = \frac{6}{b\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{9}{\sqrt{35}} \Rightarrow$

$\Rightarrow NN_1 = \frac{9}{\sqrt{35}}\cdot\frac{\sqrt{669}}{27} = \frac{\sqrt{669}}{3\sqrt{35}}$

4.

3.10 $V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 16 = \cancel{4\sqrt{3}} \cdot NN_1 = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{669}}{3\sqrt{35}} =$

$= \frac{3\cdot 4\cdot\sqrt{223}}{3\sqrt{35}} = \frac{4\sqrt{223}}{\sqrt{35}}$. $V_{TBCKN_1} = V_{TN_1BC} +$

$+ V_{TBN_1KB_1} = \frac{1}{3}\cdot NN_1 \cdot S_{BTC} + \frac{1}{3}\cdot V_{TBN_1KB_1} =$

$\cancel{= \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{669}}{3\sqrt{35}}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{}{3\sqrt{35}} + V_{TBN_1K}}$