Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

11 [signature]

111433

Шифр ____________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Волынова Татьяна Михайловна

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва лицей №1580

Регистрационный номер ШМ5058

Вариант задания 19

Дата проведения “ 11 ” марта 20 18 г.

с работой ознакомлена
16.03.2018
[signature]

Подпись участника [signature]

44 (сорок четыре)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

111433

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	3	16	20	0	5					44

433

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

№3

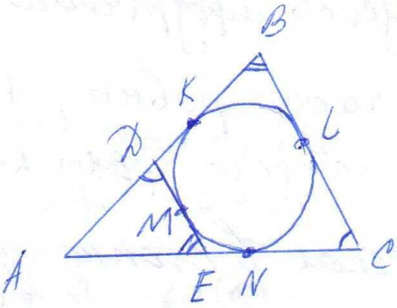
Дано: $S_{\triangle ADE} = \frac{8}{3}$

$AK = 4$

$BC = 6$

около $DEBC$ можно описать окружн.

Найти $tg \angle BAC$



Решение:

1) а) так как около $DEBC$ можно описать окружность $\Rightarrow \angle DEC + \angle DBC = 180$

$\angle EDC + \angle ECB = 180$

б) окружность касается сторон AB, BC и AC $\triangle ABC \Rightarrow$ она вписана в $\triangle ABC$

а $\angle DEC + \angle AED = 180$

$\angle ADE + \angle EDB = 180$ $\Rightarrow$ $\angle DEC + \angle DBC = \angle DEC + \angle AEC$ $\angle DBC = \angle AEC$

$\angle BDE + \angle ECB = \angle ADE + \angle EDB$ $\Rightarrow$ $\angle ECB = \angle EDA$

2) $\triangle ADE$ и $\triangle ABC$

$\angle DAE$ - общий

$\angle ADE = \angle ACB$

$\angle AED = \angle ABC$ $\Big\} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$

3) $S_{\triangle ADE} = \frac{8}{3} = \sqrt{p(p-AD)(p-AE)(p-DM-EM)}$

A, E, D - точки через каждые из которых проходят 2 касательные к окружности $\Rightarrow DK = DM, ME = EN, AK = AN$

$AD + DK = 4$ - дано

$AE + EN = 4$ $\Rightarrow$ $AD + DM = 4$ $AE + ME = 4$ $\Rightarrow p = \frac{AD + DM + ME + A\ldots}{2}$

$p = \frac{4+4}{2} = 4 \Rightarrow \frac{4}{3} = \sqrt{(4-AD)(4-AE)(4-DM-EM)} = \sqrt{DM \cdot EM \cdot (4-DM-EM)}$

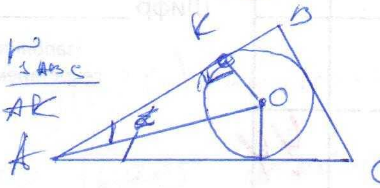
$S = pr = 4 \cdot r = \frac{8}{3}$ $r = \frac{2}{3}$

4) $P_{\triangle ABC} = (4 + AB + 4 + NC + 6) / 2 = 20/2 = 10$

$AB + NC = BL + LC = 6$

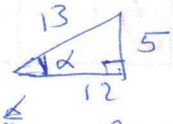
$k = \frac{P_{\triangle ADE}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{r_{\triangle ADE}}{r_{\triangle ABC}}$ $\quad \frac{2}{5} = \frac{2}{3 r_{\triangle ABC}}$ $\quad r_{\triangle ABC} = \frac{5}{3}$

5) $tg \frac{\alpha}{2} = \frac{KO}{AK} = \frac{r_{\triangle ABC}}{AK}$



$tg \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{3 \cdot 4} = \frac{5}{12} \Rightarrow$

$\angle BAC = \alpha$

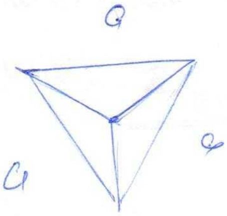
$\Rightarrow$  египетский $\triangle$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{13}$ $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{12}{13}$ $\quad tg \alpha = \frac{2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 12 \cdot \cancel{13^2}}{\cancel{13 \cdot 13}(12^2 - 5^2)} = \frac{120}{119}$

Ответ: $tg \angle BAC = \frac{120}{119}$

16

$\boxed{№1.}$ 5 кусков прозрачного стекла формы равнобедренного $\triangle$



3 части равны, 1 закрашена

• у каждого треугольника свой цвет $\Rightarrow$ разные расположения стекол в стопке дают разные комбинации

5 мест на каждое место 3 варианта расположения, т.к. вся стопка должна оказаться непрозрачной, то в 3 из 5 мест закрашенные части должны не совпадать

$(5 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 3) = 15 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 = 6480$?

$15 \cdot 9 = 135$ $\quad 135 \cdot 48 = 1080 + 5400 = 6480$

0

$\boxed{Ответ: 6480}$

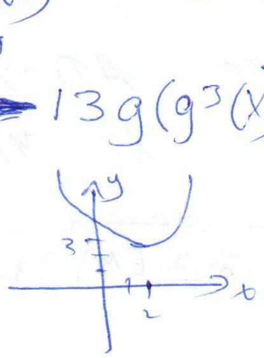
$\boxed{№4}$ $\frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) + \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} \geq 13 g(g^3(x))$; $g(x) = \frac{6}{x^2 - 4x + 7}$

$\frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) + \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} - 13 g(g^3(x)) \geq 0$

$\boxed{I}$ $k(x) = x^2 - 4x + 7$

$x_в = \frac{4}{2} = 2$

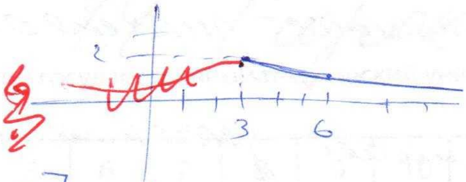
$y_в = 4 - 8 + 7 = 3$



$D_k \in (-\infty; +\infty)$ $\quad E_k \in [3; +\infty)$

$\boxed{2}$ $g(k) = \frac{6}{k}$

$D_g \in [3; +\infty)$



$E_g \in (0; 2]$ +.

$\boxed{3}$ $m(g) = \frac{g}{2}$

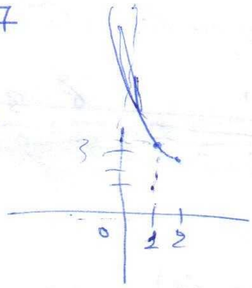
$D_g = (0; 2]$

$E_g = (0; 1]$ +.

$\boxed{4}$ $\cancel{g(m) = h}$

$g(m) = \frac{6}{m^2 - 4m + 7}$

a) $k(m) = m^2 - 4m + 7$



$D_m \in (0; 1]$

$E_m \in [4; 7)$

$k(1) = 1 - 4 + 7 = 4$

$k(0) = 0 - 0 + 7 = 7$

$g(k) = \frac{6}{k}$

$D_k \in [4; 7)$

$E_k \in \left(\frac{6}{7}; \frac{3}{2}\right]$

$\boxed{5}$ $h = \frac{2}{3} g$

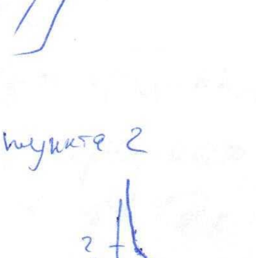
$D_h \in \left(\frac{6}{7}; \frac{3}{2}\right]$

$E_h \in \left(\frac{4}{7}; 1\right]$

$\boxed{9}$ $z = \frac{2}{g}$ из пункта 2

$D_z \in (0; 2]$

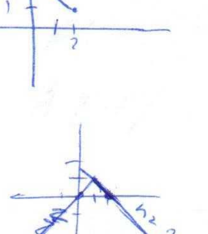
$E_z \in [1; +\infty)$



$\boxed{10}$ $n = 2 - z$

$D_n \in [1; +\infty)$

$E_n \in (-\infty; 1]$



$\boxed{11}$ $m = \sqrt{n}$

$D_n \in [0; 1]$

$E_n \in [0; 1]$

$\boxed{6}$ $g^3 = p(g)$

$D_p = (0; 2]$ из пункта 2

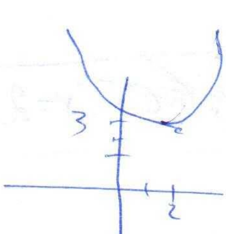
$E_p = (0; 8]$

$\boxed{7}$ $g(p) = \frac{6}{p^2 - 4p + 7}$

$\cancel{D_g = (0; 8]}$

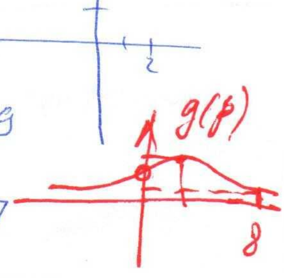
$k(p) = p^2 - 4p + 7$

$D_k = (0; 8]$



$k(0) = 7$

$k(8) = 64 - 32 + 7 = 39$



$E_k = [3; 7) \cup (7; 39]$

$g(k) = \frac{6}{k}$

$D_g \in [3; 7) \cup (7; 39]$

$E_g \in \left[\frac{2}{13}; \frac{6}{7}\right) \cup \left(\frac{6}{7}; 2\right]$

$\boxed{8}$ $\ell = 13 \cdot g$

$D_\ell \in \left[\frac{2}{13}; \frac{6}{7}\right) \cup \left(\frac{6}{7}; 2\right]$

$E_\ell \in \left[2; \frac{13 \cdot 6}{7}\right) \cup \left(\frac{13 \cdot 6}{7}; 26\right]$

из пункта 5 $\frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)$ принимает значения от $\left[\frac{4}{7};1\right]$

из пункта 11 $\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}$ принимает значения от $[0;1]$

из пункта 8 $13g(g^3(x))$ принимает значения от $\left[2;\frac{13\cdot 6}{7}\right)\cup\left(\frac{13\cdot 6}{7};26\right]$

=> неравенство будет выполнятся только при $\frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)=1$,

$\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}=1$ и $13g(g^3(x))=2$

=> $g(x)=2$ => $x^2-4x+7=3$ => $x=2$ из $\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}$

подставим 2 в 1-ю и 3-ю части неравенства

в 1) ~~$g(2)=2$ => $\frac{g(2)}{3}=\frac{2}{3}$ => $g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{6}{1-4+7}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ => $\frac{2\cdot 3}{3\cdot 2}=1$~~

в 3) $g(2)=2$ => $g^3(2)=8$ $13\cdot g(8)=13\frac{6}{64-32+7}=2$

в 1) $g(2)=2$ => $\frac{g(2)}{2}=\frac{2}{2}=1$ => $g(1)=\frac{6}{1-4+7}=\frac{3}{2}$ => $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$

=> при $x=2$ $\frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)=1$; $\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}=1$; $13g(g^3(x))=2$

$1+1\geq 2$ - неравенство выполняется

$\boxed{\text{Ответ: } x=2}$

20.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

111433

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

№6. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма

сечение – $\alpha \parallel AC_1$

$C \in \alpha$

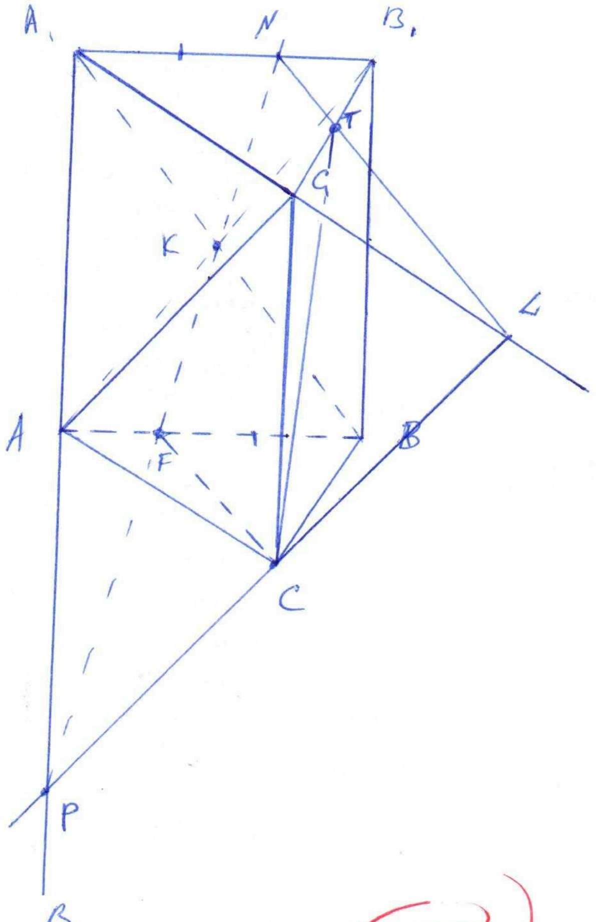
K – центр симметрии AA_1B_1B

$K \in \alpha$

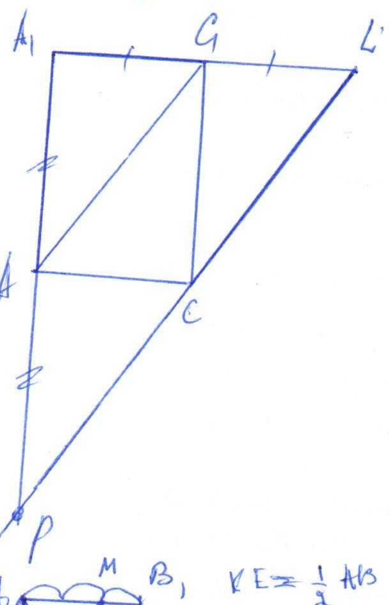
$S_\alpha = \frac{9}{\sqrt{5}}$

сторона основания $= 4$

Найти объемы частей, на которые α делит призму.

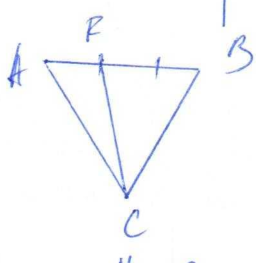


1

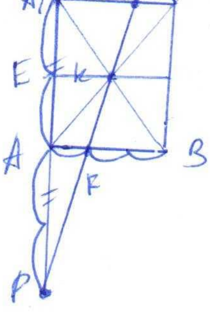


5

3



2



$KE = \frac{1}{2} AB$

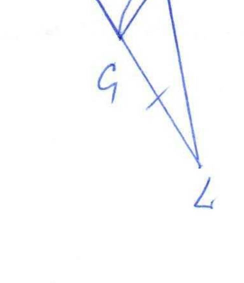
$EP = \frac{3}{2} AA_1$

$\frac{EK}{AF} = \frac{AP}{EP} = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{2}\frac{AB}{AF} = \frac{3}{2}$

$\frac{AB}{AF} = \frac{3}{1}$

4

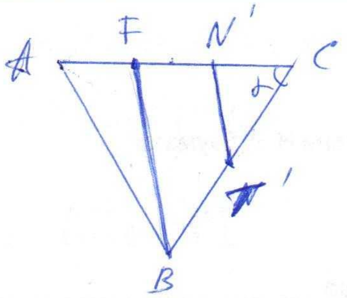


$\frac{A_1N}{NB_1} \cdot \frac{B_1T}{TC_1} \cdot \frac{C_1L}{LA_1} = 1$

$\frac{2}{1} \cdot \frac{B_1T}{TC_1} \cdot \frac{1}{2} = 1$

$\frac{B_1T}{TC_1} = 1$

15



$$S_{FN'T'B} = S_{np} = \frac{2}{3} AC \cdot CB \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} AC \cdot \frac{1}{2} CB \cdot \sin\alpha = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot 4^2 \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{16}{3} - \frac{\overset{4}{\cancel{2}}}{3}\right) = \cancel{\frac{7\sqrt{3}}{6}} = \cancel{\frac{7}{2\sqrt{3}}} \quad 2\sqrt{3}.$$

$$\cos\varphi = \frac{S}{S_{np}} = \frac{9 \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{5} \cdot 7} = \frac{18\sqrt{3}}{7\sqrt{5}}$$

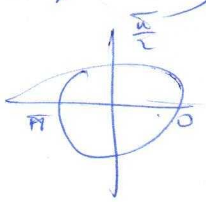
$\boxed{№2.}$ $\sin^4(2016x)+\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2018}(2016x)=1$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin(2016x)=0\\ \cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x)=1\end{cases} \quad \boxed{1}\\ \begin{cases}\sin(2016x)=1\\ \cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2018}(2016x)=0\end{cases} \quad \boxed{2}\end{array}\right.$$

другие случаи? почему только эти?

$\boxed{1}$ $\sin(2016x)=0$

$2016x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$



$x=\frac{\pi k}{2016},\ k\in\mathbb{Z}$

$\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2018}(2016x)=1$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos^{2017}(2025x)=1\\ \cos^{2018}(2016x)=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos^{2017}(2025x)=-1\\ \cos^{2018}(2016x)=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

2018 - четная степень $\Rightarrow \cos^{2018}(2016x)=-1$ не может

$$\begin{cases}\cos(2025x)=1\\ \left[\begin{array}{l}\cos(2016x)=1\\ \cos(2016x)=-1\end{array}\right.\end{cases} \quad \varnothing$$

$2025x=2\pi h,\ h\in\mathbb{Z}$ — разные буквы

$2016x=2\pi h,\ h\in\mathbb{Z}$

$2016x=\pi+2\pi h,\ h\in\mathbb{Z}.$

$$\begin{cases}x=\frac{2\pi h}{2025}\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi h}{2016}\\ x=\frac{\pi+2\pi h}{2016}\end{array}\right.\end{cases},\ h\in\mathbb{Z}$$

$$\begin{cases}x=\frac{\pi k}{2016}\\ \begin{cases}x=\frac{2\pi h}{2025}\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi h}{2016}\\ x=\frac{\pi+2\pi h}{2016}\end{array}\right.\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{\pi k}{2016}\\ x=\frac{2\pi h}{2025}\\ x=\frac{\pi k}{2016}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{\pi k}{2016}\\ x=\frac{2\pi h}{2025}\end{cases} \quad \frac{1}{2016}\neq\frac{2}{2025}$$

выбор

$\frac{\pi k}{2016}=\frac{2\pi h}{2025}$

$k=\frac{4032h}{2025},\ k=h$

$x=\frac{2\pi h}{2025}$

3

$\boxed{2}$ $\sin(2016x)=1$

$2016x=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi+2\pi m}{2\cdot2016},\ m\in\mathbb{Z}$

$$\left[\begin{array}{l}\cos(2025x)=0\\ \cos(2016x)=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2025x=\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z}\\ 2016x=\frac{\pi}{2}+\pi h,\ h\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi+2\pi l}{2\cdot2025},\ l\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi+2\pi h}{2\cdot2016},\ h\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x=\frac{\pi+2\pi m}{2\cdot2016}\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi+2\pi l}{2\cdot2025}\\ x=\frac{\pi+2\pi l}{2\cdot2016}\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow x=\frac{\pi+2\pi m}{2\cdot2016}$$

$m=l=h$

$m,l,h\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x=\frac{\pi+2\pi m}{2\cdot2016},\ m\in\mathbb{Z}$

есть еще решения!

5. $8a+3ab\,ctg\,x+2\sqrt{2x+|x-3bctgx|-3bctgx} = 12+ax$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3bctgx>0 \\ 8a+3abctgx+4\sqrt{x+3bctgx} = 12+ax \end{cases} \\ \begin{cases} x-3bctgx\le 0 \\ 8a+3abctgx = 12+ax \end{cases} \end{array}\right.$

0