Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1 Герц

218326

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету по математике
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Шумецкий Элдар Олегович

Город, № школы (образовательного учреждения) ГБОУ „Лицей „МКШ" им. В.Н. Челомея г. Байконур

11 класс

Регистрационный номер ШМ6928

Вариант задания 17

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника Шум

65 (шестьдесят пять)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	12	16	20	8	5					65

218326

Шифр ______________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

26

Вариант № 17

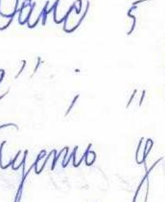
N1

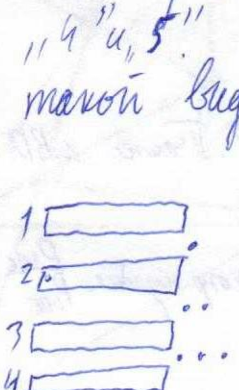
Дано 5 различных кусков, обозначим их ~~цифр~~ цвета „1";

„2"; „3"; „4" и „5".

Пусть у нас такой вид сверху, что цвета 5 не видно, например

Вид сверху





Вид сбоку (5 кусок отсутствует)

1) Рассчитаем число способов вставить пластинку 5 так, чтобы ее не было видно сверху

5-й треугольник под первым, 4 способа

5-й под вторым, 3 способа

5-й под третьим, 2 способа

5-й под четвертым, 1 способ

$\frac{(4+1)\cdot 4}{2} = 10$ способов

2) 4! способов переставить 1, 2, 3 и 4 пластины по вершинам

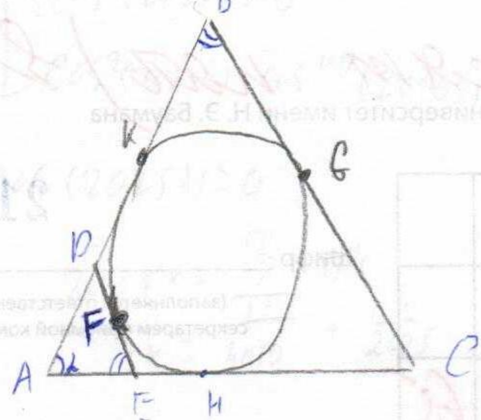
3) $\frac{4!}{4} = 3!$ способов менять порядок цветов сверху

4) Вместо 5-го могут быть еще 4 цвета => Всего $5\cdot 10\cdot 4!\cdot 3! = 50\cdot 36\cdot 4 = 36\cdot 200 =$
$= 7200$ ~~способов~~ способов

Ответ: 7200 способов

12

N3



Дано: $S_{ADE}=0{,}5$

$AK=3$

$BC=15$

Около $BCDE$ можно опис. окруж

Н/ти:

$tg\angle BAC=?$

Решение:

1. ~~Назовем т. касания окруж~~ кас. DE Назовем точки касания окруж: кас DE в т. F, EC в точке H, BC в точке G. По теор. о касательной $AK=AH=3$; $DK=DF$; $EH=EF$

$P_{ADE}=AD+DF+FE+AE=AD+DK+AE+EH=AK+AH=6$

Также по теор. о касат. $BK=BG$; $HC=GC$.

$P_{ABC}=AK+BK+BG+GC+CH+AH=AK+AH+2(BG+GC)=6+2\cdot BC=36$

2. Около $BDEC$ можно опис. окруж $\Rightarrow \angle D+\angle C=\angle B+\angle E=180^\circ$. Также $\angle BDE+\angle EDA=\angle CED+\angle \dots =180^\circ \Rightarrow \angle C=\angle ADE$; $\angle B=\angle AED$

3. $\angle ADE=\angle C$; $\angle B=\angle AED$, $\angle A$ - общ $\Rightarrow \triangle ADE\sim\triangle ACB$, коэф подобия $=\frac{P_{ABC}}{P_{ADE}}=\frac{36}{6}=6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{DE}=6 \Rightarrow S_{ABC}=0{,}5\cdot 6^2=18$;

$DE=\frac{BC}{6}=2{,}5$

4. $\triangle ABC$: $S=18$; $p=\frac{P}{2}=18$, $AB+AC=21$; $BC=15$

По ф. Герона:

$18^2=18\cdot 3(18-AB)(18-AC)$

$6=18^2-18AB-18AC+AB\cdot AC=18^2-18(AB+AC)+AB\cdot AC=18^2-18\cdot 21+AB\cdot AC$

$6+54=AB\cdot AC \Rightarrow AB\cdot AC=60$

5. $\sin\alpha=\frac{2S_{ABC}}{AB\cdot AC}=\frac{36}{60}=0{,}6$

$AB^2+AC^2=(AB+AC)^2-2AB\cdot AC=441-120=321$

По теор. косинусов:

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$

$15^2=321-2\cdot 60\cdot\cos A$

$120\cos A=321-225=96$

$\cos A=\frac{4}{5}=0{,}8$

16

6. $tgA=\frac{0{,}6}{0{,}8}=0{,}75$

Ответ: $tg\angle BAC=0{,}75$

№4

$\frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)+2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}\geq 50g(g^2(x))$, где $g(x)=\frac{3}{x^2-4x+5}$

$g(x)=\frac{3}{x^2-4x+5}=\frac{3}{(x-2)^2+1}$

ОДЗ: $2-(x^2-1)\geq 0$

$(3-x)(x-1)\geq 0$

$(x-3)(x-1)\leq 0 \Rightarrow x\in[1;3]$

$g(x-2)$ - четная функция $\Rightarrow$ можно рассматривать только отрезок $x\in[1;2]$, где функция $g(x)$ монотонно возрастает, а потом добавить ~~симметр~~ симметричные относительно $x=2$ решения.

$E(g([1;2]))=[\frac{3}{2};3]$

$\frac{g(x)}{3}<2 \Rightarrow \frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)$ монотонно возрастает на $x\in[1;2]$

Аналогично $2-\frac{3}{g(x)}$

$E\left(\frac{2}{3}g\left(g\frac{([1;2])}{3}\right)\right)=E\left[\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2};1\right]\right]=\left[\frac{8}{13};1\right]$

$E\left(2\sqrt{2-\frac{3}{g([1;2])}}\right)=[0;2]$

$E(g^2([1;2]))=[\frac{9}{4};9]$

$E(50g(g^2[1;2]))=[3;50\cdot\frac{3}{\frac{1}{16}+1}]$

$\Rightarrow E\left(\frac{2}{3}g\frac{(g(x))}{3}\right)+2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}=[\frac{8}{13};3]$ при $x\in[1;2]$

а $E(50g(g^2(x)))=[3;50\cdot\frac{48}{17}]$

$\Rightarrow$ пересекаются только в точке $x=2$ (значение

$x=2$ симметрич самой себе отн $x=2$

$\Rightarrow$ единств ответ $x=2$

Ответ: $x=2$

20

№2

$\sin^4(2025x)+\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)=1$

$(1-\cos^2(2025x))^2+\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)=1$

$\cos^2(2025x)(\cos^2(2025x)+\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2(2025x)=0 \\ \cos^2(2025x)+\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)-2=0 \end{array}\right.$

1) $\cos(2025x)=0$

$2025x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

$x=\frac{\pi}{4050}+\frac{\pi k}{2025}, k\in Z$

2) $\cos^2(2025x)\le 1$

$|\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)|\le 1$

$\begin{cases} \cos^2(2025x)=1 \\ \cos^{2019}(2016x)=1 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \cos(2025x=\pm 1 \\ \cos^{2019}(2016x)=1 \end{array}\right.$

$\begin{cases} \cancel{2025}\ 2025x=\pi n \\ 2016x=2\pi m \end{cases}$ $n,m\in Z$

НОД$(2025;2016)$ = НОД$(2016;9)=9$, т.к. $2+1+6=9$ (признак: на 9.

$\begin{cases} 225\cdot 9x=\pi n \\ 224\cdot 9x=2\pi m \end{cases}$

$\frac{225}{112}=\frac{n}{m}$

$n=225k$

$m=112k$

$9x=\pi k, k\in Z$

$x=\frac{\pi k}{9}, k\in Z$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4050}+\frac{\pi k}{2025}$; $x=\frac{\pi k}{9}, k\in Z$

№6.

12

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

218326

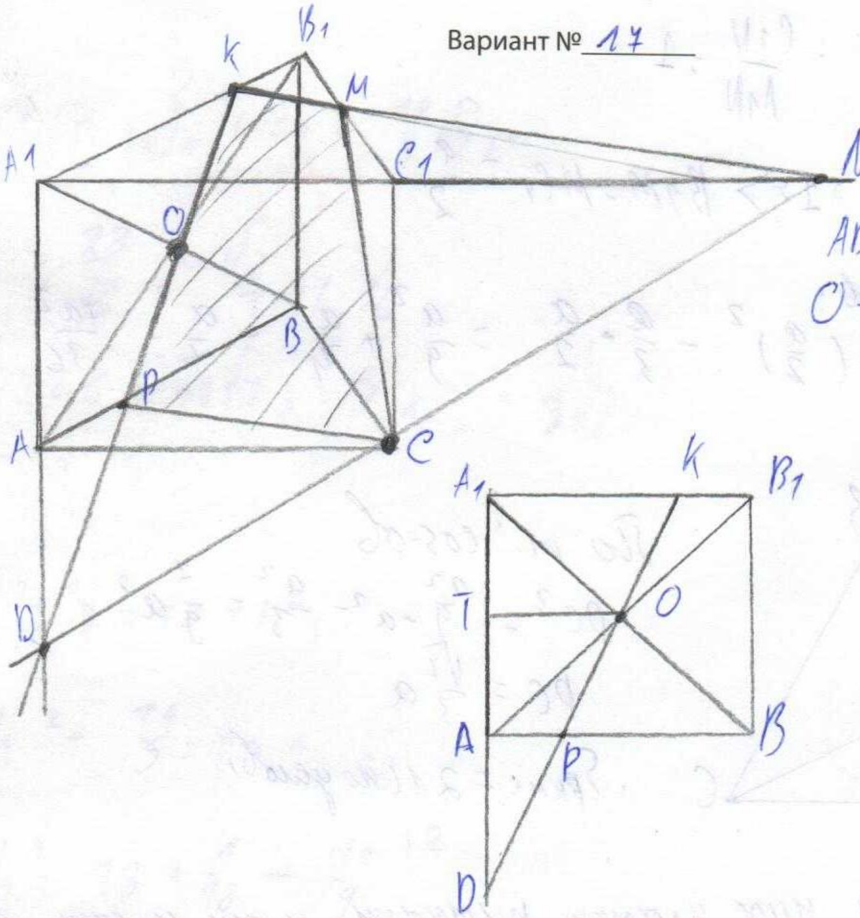
Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 17

$AB = BC = AC = 2\sqrt{14} = a$

$O = A_1B \cap AB_1$



Решение:

1). строим сечение методом следов :

PKMC-сечение

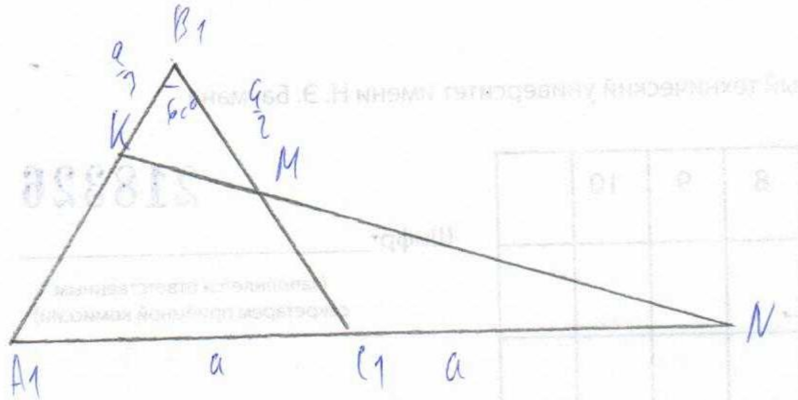
$AA_1 = h$

В $\triangle DA_1N$: $AD = CC_1 = AA_1$, т.к. $AC_1 \parallel DN$, $AD \parallel CC_1$ и $\triangle DCC_1$ - пар.м

2) $A_1T = TA$, $OT \parallel AB$, $OT = \frac{a}{2}$

$\triangle DAP \sim \triangle\ \triangle DTO \Rightarrow \frac{AP}{a/2} = \frac{h}{3h/2} \Rightarrow AP = \frac{a}{3}$

~~Аналогично~~ Аналогично: $A_1K = \frac{2a}{3}$



По теореме Менелая

$\frac{A_1K}{KB_1}\cdot\frac{B_1M}{MC_1}\cdot\frac{C_1N}{A_1N}=1$

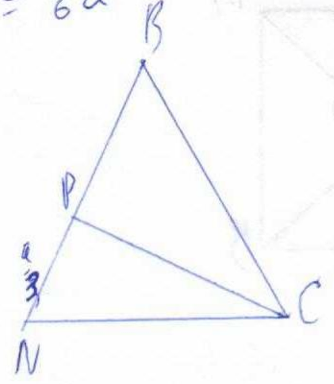
$2\cdot\frac{B_1M}{MC_1}\cdot\frac{1}{2}=1 \Rightarrow B_1M=MC_1=\frac{a}{2}$ +.

По теор. косинусов:

$KM^2=(\frac{a}{3})^2+(\frac{a}{2})^2-\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{6}=\frac{7a^2}{36}$ +.

$KM=\frac{\sqrt{7}}{6}a$

3)



По т. cos-ов

$PC^2=\frac{a^2}{9}+a^2-\frac{a^2}{3}=\frac{7}{9}a^2$

$PC=\frac{\sqrt{7}}{3}a$

$S_{PKMC}=21$ (по услов.)

$KM \parallel PC$ (через них проходит плоскость, и они лежат в $\parallel$ ~~плоско~~ плоскостях)

$\Rightarrow PKMC$ – трапеция

$S_{PKMC}=(\frac{PC+KM}{2})\cdot h'$, где h' – высота трапеции

$21=\frac{1}{2}\cdot h'(\frac{\sqrt{7}}{3}+\frac{\sqrt{7}}{6})a=\frac{\sqrt{7}}{2}h'(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})a=\frac{3}{2\cdot6}\sqrt{7}h'a=\frac{\sqrt{7}h'}{4}a$

$h'=\frac{21\cdot4}{\sqrt{7}a}=\frac{21\cdot4}{\sqrt{7}\cdot2\sqrt{14}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

4). По теор. Пифагора

$MC=\sqrt{h^2+14}$

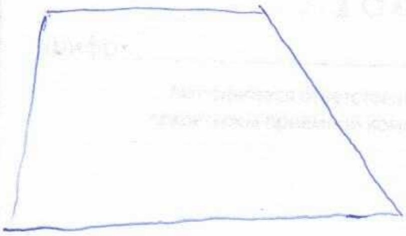
$PK=NP=\sqrt{h^2+\frac{14}{9}}$

5

$KM = \frac{14}{6}\sqrt{2}$

$PC = \frac{14}{3}\sqrt{2}$

$$\begin{cases} h^2+14 = 18+y^2 \\ h^2+\frac{14}{9} = 18+x^2 \\ x+y = \frac{14}{6}\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{8}{9}\cdot 14 = y^2-x^2 \\ y = \frac{14}{6}\sqrt{2}-x \end{cases}$$



$\frac{8}{9}\cdot 14 = \frac{2}{36}\cdot 4\cdot 49 - \frac{14}{3}\sqrt{2}x$

$\frac{8}{9} = \frac{28}{36} - \frac{\sqrt{2}}{3}x \mid \cdot 36$

$32 = 28 - 12\sqrt{2}x \Rightarrow x = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$

$h^2+\frac{14}{9} = 18+x^2$

$h^2+\frac{14}{9} = 18+\frac{1}{18}$

$h^2 = 18+\frac{1}{18}-\frac{14}{9} \mid \cdot 2$

$h^2 = 18+\frac{1}{18}-\frac{28}{18}$

$h^2 = 18-\frac{27}{18}$