Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

X 1 курс

Шифр 111075
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Баранов Фёдор Сергеевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва лицей №1580

Регистрационный номер ШМ 5025

Вариант задания 20

Дата проведения "11" марта 2018 г.

С работой ознакомлен
16.03.2018

Подпись участника

44 (сорок четыре)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	9	0	20	15	0					44

Шифр 111075

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 20

№2.

$\sin^4(2019x) + \cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2018}(2019x) = 1$

$\sin^4 2019x = (\sin^2 2019x)^2 = (1-\cos^2 2019x)^2 =$

$= 1 - 2\cos^2 2019x + \cos^4 2019x$

$\cancel{1} - 2\cos^2 2019x + \cos^4 2019x + \cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2018}(2019x) = \cancel{1}$

$\cos^2 2019x(-2 + \cos^2 2019x + \cos^{2019}(2022x)\cos^{2016}(2019x) = 0$

1) $\cos^2 2019x = 0$

2) $-2 + \cos^2 2019x + \cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2016}(2019x) = 0$

1) $\to$ $2019x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\in Z$

$x = \frac{\pi}{4038} + \frac{\pi}{2019}n,\ n\in Z$

2) $\to$ $\cos^2 2019x + \cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2016}(2019x) = 2$

$\begin{cases}\cos 2019x \le 1 \\ \cos 2022x \le 1\end{cases}$ из опр. косинуса $\Rightarrow \begin{cases}\cos^2 2019x \le 1 \\ \cos^{2019} 2022x \le 1 \\ \cos^{2016}(2019x) \le 1\end{cases}$

~~cos~~

$\Rightarrow \begin{cases}\cos^2 2019x \le 1 \\ \cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2016}(2019x) \le 1\end{cases}$

$\Rightarrow$ для выполнения 2) $\Rightarrow \begin{cases}\cos^2 2019x = 1 \Rightarrow \cos 2019x = \pm 1 \\ \cos^{2019}(2028x)\cdot\cos^{2016}(2019x) = 1 \to \cos^{2019}(2022x) = 1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}\cos 2019x = 1 \\ \cos 2022x = 1 \\ \cancel{\cos 2019x = 1}\end{cases}$ и $\begin{cases}\cos 2019x = -1 \\ \cos 2022x = 1\end{cases}$

$$\begin{cases} \cos 2019x = 1 \\ \cos 2022x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{2\pi k}{2019}, k \in Z \\ x = \frac{2\pi k}{2022}, k \in Z \end{matrix} \Rightarrow \frac{2\pi k}{2019} = \frac{2\pi k}{2022} \Rightarrow k = 0$$

разные k $\Rightarrow x = 0$

$$\begin{cases} \cos 2019x = -1 \\ \cos 2022x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2019x = \pi + 2\pi k \\ 2022x = 2\pi l \end{matrix} \Rightarrow \frac{\pi}{2019} + \frac{2\pi k}{2019} = \frac{2\pi l}{2022}$$

$$l\left(\frac{2}{2022} - \frac{2}{2019}\right) = \frac{1}{2019}$$

$$2l\left(\frac{2019-2022}{2019 \cdot 2022}\right) = \frac{1}{2019}$$

9

$$l = \frac{2019 \cdot 2022}{2 \cdot 2019 \cdot (-3)} < 0 \text{ т.к. } l \in Z \Rightarrow l \in \varnothing$$

$\Rightarrow$ Ответ: $\left[\begin{matrix} \cancel{x = 0} \\ x = \frac{\pi}{4038} + \frac{\pi n}{2019}, n \in Z. \end{matrix}\right.$

№4.

$$\frac{7}{9} g\left(\frac{g(x)}{3}\right) + 2\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}} \geq 13 g(g^2(x)) \qquad g(x) = \frac{9}{x^2 - 6x + 12}$$

Рассмотрим $g(x)$. Найдем область значений ф-ии.

$$g(x) = \frac{9}{x^2 - 6x + 12}$$

Рассмотрим $f(x) = x^2 - 6x + 12$

$$f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$$

$f'(x)$: $-$ 3 $+$

$\Rightarrow x = 3$ - т. минимума ф-ии $f(x)$

т.к. $g(x) = \frac{9}{f(x)} \Rightarrow x = 3$ - т. ~~минимума~~ максимума

$$g(3) = \frac{9}{9 - 18 + 21} = 3$$

при $x \to \infty$ $f(x) \to \infty \Rightarrow g(x) \to 0$

$\Rightarrow g(x) \in (0; 3]$.

+

Найдем область значений $l(x)$

$l(x)=\frac{7}{9}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)$

$g(x)\in(0;3]$

$\frac{g(x)}{3}\in(0;1]$

$g\left(\frac{g(x)}{3}\right)\in(g(0);g(1)]$

$g(0)=\frac{3}{4}$, $g(1)=\frac{9}{7}$ $\Rightarrow g\left(\frac{g(x)}{3}\right)\in\left(\frac{3}{4};\frac{9}{7}\right]$

$l(x)=\frac{7}{9}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)\in\left(\frac{7}{12};1\right]$

Найдем область значений $n(x)=2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}$

$g(x)\in(0;3]$

$\frac{3}{g(x)}\in[1;+\infty)$

$2-\frac{3}{g(x)}\in$ ~~[1;~~ $(-\infty;1]$

$\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}\in[0;1]$ т.к. $2-\frac{3}{g(x)}\geq 0$ – подкоренное выражение.

$2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}\in[0;2]$.

Найдем область значений $m(x)=13g(g^2(x))$

$g(x)\in(0;3]$

$g^2(x)\in(0;9]$

т.к. $g(x)$ – ф-ия убывающая $\Rightarrow$ с увеличением ~~увеличение~~ аргумента уменьшаются значения ф-ии

$\Rightarrow g(g^2(x))\in[g(9);$ ~~$g(0)$~~ $3]$

$g(9)=\frac{9}{81-54+12}=\frac{9}{39}=\frac{3}{13}$

$\Rightarrow m(x)=13\cdot g(g^2(x))\in[3;39]$.

~~Расс~~ Запишем нер-во:

$l(x)+n(x)\geq m(x)$, где $l(x)=\frac{7}{9}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)$, $m(x)=13\cdot g(g^2(x))$, $n(x)=2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}$

$l(x)\in\left(\frac{7}{12};1\right]$

$n(x)\in[0;2]$

$m(x)\in[3;39]$

$\Rightarrow$ для выполнения нер-ва

$\begin{cases} l(x)=1 \text{ – максимум ф-ии при } x=3 \\ n(x)=2 \text{ максимум ф-ии при } x=3 \\ m(x)=3 \text{ – минимум ф-ии при } x=3 \end{cases}$

Ответ: $x=3$.

20

N5.

$2a - ab\,ctg x + 2\sqrt{2(x+|x+b\,ctg x|+b\,ctg x)} = 6+ax$

т.к. $ctg x$ – четная ф-ция => кол-во решений бесконечно => $b=0$. + Тогда:

$2a + 2\sqrt{2(x+|x|)} = 6+ax$

1. $x<0$

$2a = 6+ax \Rightarrow x = \frac{2(\cancel{3-a})\ a-3}{\cancel{2}a} < 0$

$\frac{3-a}{a}<0 \Rightarrow 0<a<3$

$\Rightarrow b=0,\ 0<a<3,\ x=\frac{2(\cancel{3-a})\ a-3}{a}$ +

2. $x\geq 0$

$2a + \cancel{4}\sqrt{x} = 6+ax$

$t=\sqrt{x},\ t>0$

$2a+4t=6+at^2$

$at^2-4t+6-2a=0$

$D = \cancel{4}16 - 24a+8a^2 = 8(a^2-3a+2) = 8(a-1)(a-3)$

$D=0$ при $a=1 \Rightarrow$

$t=\frac{4}{2a}=2 \Rightarrow x=t^2=4$

два реш. не расм.

при $a=3 \Rightarrow t=\frac{4}{2a}=\frac{2}{3} \Rightarrow x=\frac{4}{9}$.

$D>0 \Rightarrow \begin{cases} t_1>0 \\ t_2<0 \end{cases}$ (чтобы был один корень).

$\Rightarrow a\cdot f(0) < 0$

$a\cdot(6-2a)<0$

$a\cdot(3-a)<0$

$a(a-3)>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a>3 \\ a<0 \end{array}\right.$

~~при~~ ~~a>0~~ найдем корни:

$t_{1,2} = \frac{\cancel{2}\cancel{4} \pm \cancel{2}\sqrt{2(a-1)(a-3)}}{\cancel{2}a} = \frac{2\pm\sqrt{2(a-1)(a-3)}}{a}$

Если $a<0 \Rightarrow x=t^2=\left(\frac{2-\sqrt{2(a-1)(a-3)}}{a}\right)^2$

Если $a>3 \Rightarrow x=t^2=\left(\frac{2+\sqrt{2(a-1)(a-3)}}{a}\right)^2$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 111075

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 20.

№5 (продолжение).

Калигерие

$\Rightarrow$ Ответ: при $b=0,\ a<0$ $x=\left(\frac{2-\sqrt{2(a-1)(a-3)}}{a}\right)^2$

при $b=0,\ 0<a<3$ $x=\cancel{\frac{2(\dots)}{a}}\ \frac{2(a-3)}{a}$

при $a=3,\ b=0$ $x=\frac{4}{9}$

при $a=1,\ b=0$ $x=4$

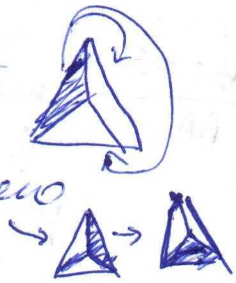
при $a>3,\ b=0$ $x=\left(\frac{2+\sqrt{2(a-1)(a-3)}}{a}\right)^2$

15

№1.

Для рассмотрения всех вариантов сначала будем двигать ~~верхний тр. по кругу~~ первый (верхний) закрашенный треугольничек по кругу: – 3 варианта

еще по 2 варианта с каждого нижнего



$3+8=11$

$3+2\cdot4=12$ вариантов

Теперь будем их двигать попарно

1 с 2
1 с 3
1 с 4
1 с 5
2 с 3
2 с 4
2 с 5
4 с 3
4 с 5
5 с 1

10 вариантов, $12+2\cdot10=22$

0

Теперь будем двигать:

первые 2

первые 2 с ~~3~~ 4

первые 2 с ~~4~~ 5 $\Rightarrow$ $22+6=28$

Теперь ~~наоборот~~ последние 2

3 $\begin{cases} \text{последние 2 с 1} \\ \text{последние 2 со 2} \end{cases} \Rightarrow 28 + 3\cdot 2 = \cancel{30}\ 34$

Теперь:

4 $\begin{cases} \text{первые три с 5} \\ \text{первые три} \\ \text{последние три} \\ \text{последние 3 с 5} \end{cases} \Rightarrow 34 + 2\cdot 4 = 42$

Теперь

4 $\begin{cases} \text{последние 4} \\ \text{первые 4} \\ \text{„средние" 3 (2-ая, 3-ая, 4-ая)} \\ \text{все 5} \end{cases} \Rightarrow 42 + 2\cdot 4 = 50$

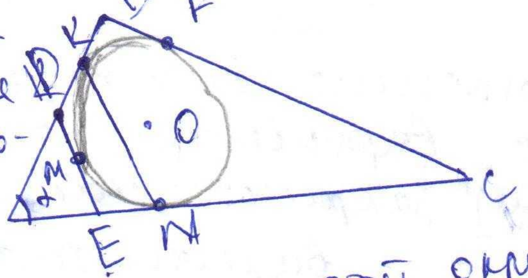
Ответ: 50 вариантов

№3.

Дано:
ABC - тр.
$S_{\triangle ADE} = 18$
$AK = 1$
$BC = 5$

$tg\ BAC$ - ?

Пусть окружность касается четырехугольника DEBC в т. K, F, M, N, O - центр этой окружности. $\angle BAC = \alpha$



AN и AK - касательные, проведенные к окружности из одной точки A $\Rightarrow$ AN = AK = 1

т.к. около $\triangle ABC$ можно описать окружность $\Rightarrow$ суммы противоположных сторон равны.

BC + DE = DB + NC

CN и CB - касательные $\Rightarrow$ CB = CN

BK и BF - касательные $\Rightarrow$ BK = BF

$S_{ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot AE \cdot \sin\alpha$

0

По теореме о касательной: $\angle BAE = \frac{\overset{\frown}{KN}}{2}$

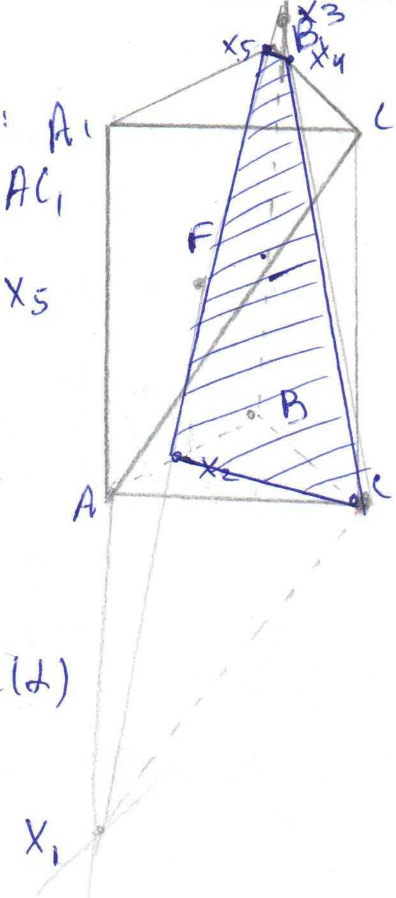
т.к. ~~BK~~ AK и AN - касательные.

№6.

Дано:
$ABCA_1B_1C_1$ - призма
$\alpha \parallel AC_1$
F - центр симметрии
AA_1B

V_1 - ?
V_2

1) Построим α:
проведем $CX_1 \parallel AC_1$
$CX \cap AA_1 =$ т. X_1
$X_1 \leftrightarrow F$ $FX_1 \cap A_1B = X_5$
$FX_1 \cap AB = X_2$
$FX1 \cap BB_1 = X_3$
$C \leftrightarrow X_3$
$CX_3 \cap B_1C_1 =$ т X_4
$X_2 \leftrightarrow C$; $X_5 \leftrightarrow X_4$.
=> CFX_2X_5 - иск. сечение (α)



0