Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

811066

Шифр ____________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Любич Софья Геннадиевна

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Тамбов, МАОУ „Лицей №14 им. А.М. Кузьмина", 11 класс

Регистрационный номер ШМ 6666

Вариант задания 17

+1 Мехал
+1 Мехал

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника [подпись]

65 (шестьдесят пять)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
12	12	16	~~10~~ 15	10	—					65

Шифр 811066

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

066

Вариант № 17

Задача 2

$\sin^4(2025x)+\cos^{2013}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)=1$

$(1-\cos^2(2025x))^2+\cos^{2013}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)=1$

$1-2\cos^2(2025x)+\cos^4(2025x)+\cos^{2013}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)=1$

$\cos^2(2025x)\left(-2+\cos^2(2025)+\cos^{2013}(2016x)\cdot\cos^{2016}(2025x)\right)=0$

1) $\cos^2(2025x)=0$

$\cos(2025x)=0$

$2025x=\frac{\pi}{2}+\pi n$

$x=\frac{\pi}{4050}+\frac{\pi k}{2025},$

$k\in\mathbb{Z}$

2) $\cos^2(2025x)+\cos^{2013}(2016x)\cos^{2016}(2025$

$0\le\cos^2(2025x)\le 1$

$-1\le\cos^{2013}(2016x)\le 0$

тогда сумма равна 2 только в случае, если

$\begin{cases}\cos^2(2025x)=1\\ \cos^{2013}(2016x)=1\end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases}\sin^2 2025x=0\\ \cos(2016x)=1\end{cases}$

$\begin{cases}2025x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ 2016x=2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{\pi n}{2025},\ n\in\\ x=\frac{\pi l}{1008},\ l\in\end{cases}$

$\Downarrow$

$$\frac{\pi n}{2025} = \frac{\pi l}{1008}$$

$$n = \frac{9\cdot 25\cdot l}{2^4\cdot 7}, \text{ т.к. } n\in Z,\ l\in Z \Rightarrow l = 16\cdot 7$$

$$x = \frac{\pi\cdot l_1}{9},\quad l_1\in Z$$

Ответ: $\frac{\pi l}{9};\ \frac{\pi}{4050}+\frac{\pi k}{2025},\quad l,k\in Z$

12

Задача 4

$$g(x) = \frac{3}{x^2-4x+5},\qquad \frac{2}{3}\, g\left(\frac{g(x)}{3}\right) + 2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}} \ge 50\, g(g^2(x))$$

Пусть $x^2-4x+5 = t$ $\quad (x^2-2)+1 = t \Rightarrow t\ge 1$

$$g\left(\frac{g(x)}{3}\right) = g\left(\frac{1}{x^2-4x+5}\right) = g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{3}{\frac{1}{t^2}-\frac{4}{t}+5} = \frac{3t^2}{1-4t+5t^2}$$

$$\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}} = \sqrt{2-\frac{3(x^2-4x+5)}{3}} = \sqrt{2-t}$$

$$g(g^2(x)) = g\left(\frac{9}{t^2}\right) = \frac{3}{\left(\frac{9}{t^2}\right)^2 - 4\cdot\frac{9}{t^2}+5} = \frac{3t^2}{81-36t^2+5t^4}$$

Тогда неравенство принимает вид:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3t^2}{1-4t+5t^2} + 2\sqrt{2-t} \ge 50\cdot\frac{3t^4}{81-36t^2+5t^4}$$

имеем $1\le t\le 2$ $\quad \begin{cases} 2-t\ge 0 \\ t\ge 1\end{cases}$

$$\frac{1}{2}\le\frac{1}{t}\le 1$$

$$-\frac{3}{2}\le\frac{1}{t}-2\le -1$$

$$1\le\left(\frac{1}{t}-2\right)^2\le\frac{9}{4}$$

$$2\le\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+1\le\frac{13}{4}$$

$$\frac{4}{13}\le\frac{1}{\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+1}\le\frac{1}{2}\qquad \frac{8}{13}\le\frac{2}{\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+1}\le 1$$

$-2 \le -t \le -1$

$0 \le 2-t \le 1$

$0 \le \sqrt{2-t} \le 1$

$0 \le 2\sqrt{2-t} \le 2$

В итоге левая часть:

$$\frac{8}{13} \le \frac{2t^2}{1-4t+5t^2} + 2\sqrt{2-t} \le 3$$

Оценим правую часть

$$\frac{150t^2}{81-36t^2+5t^4} = \frac{150}{\frac{81}{t^4}-\frac{36}{t^2}+5} = \frac{150}{\left(\frac{9}{t^2}-2\right)^2+1}$$

$\frac{1}{4} \le \frac{1}{t^2} \le 1$

$\frac{9}{4} \le \frac{9}{t^2} \le 9$

$\frac{1}{4} \le \frac{9}{t^2}-2 \le 7$

$\frac{1}{16} \le \left(\frac{9}{t^2}-2\right)^2 \le 49$

$\cancel{\frac{17}{16} \le \frac{1}{\left(\frac{9}{t^2}-2\right)^2+1} \le 50}$

$\frac{17}{16} \le \left(\frac{9}{t^2}-2\right)^2+1 \le 50$

$\frac{1}{50} \le \frac{1}{\left(\frac{9}{t^2}-2\right)^2+1} \le \frac{16}{17}$

$$3 \le \frac{150}{\left(\frac{9}{t^2}-2\right)^2+1} \le \frac{150 \cdot 16}{17}$$

В итоге правая часть:

$$\frac{150}{\left(\frac{9}{t^2}-2\right)^2+1} \ge 3$$

Тогда неравенство $f(t) \geq g(t)$,
где $f(t) \leq 3$, $g(t) \geq 3$ имеет решение,
если $f(t) = g(t) = 3$

$$\Downarrow$$

$$t = \cancel{2}\ 1$$

$x = 2.$

$$x^2 - 4x + 5 = 2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$D = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

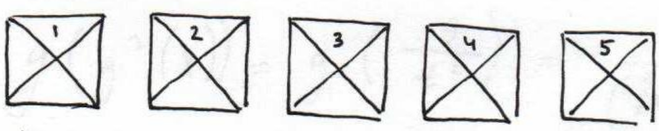
$$\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Ответ: 1; 3

? $x = 2.$

~~10~~ 15

Задача 1



Возьмем одну любую плитку и зафиксируем её закрашенной стороной вверх (для каждой укладки, где нижняя закрашенная часть смотрит в другую сторону, есть укладка, где нижняя закрепленная часть смотрит вверх, полученная вращением)

На неё можно положить любую из оставшихся четырех плиток двумя способами:

1. чтобы её закрашенная часть смотрела вверх;
2. закрашенная часть смотрела в какую-то другую сторону.

$\downarrow$ см. следующий ~~оборот~~ разворот

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 811066
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 17

↓

1) У нас осталось 3 плитки и 3 незакрашенных стороны. Выбрать в каких направлениях будут смотреть 3, 4, 5 плитки мы можем 3! способами (нам надо, чтобы каждая сторона смотрела в свою сторону), также 3! способами мы можем задать их расположение в вертикальной стопке.

2) У нас осталось 3 плитки и 2 незакрашенные стороны.

(2.1) „Заплатка" смотрит закрашенной стороной в уже закрашенном направлении. Надо расположить 2 плитки так, чтобы они закрыли 2 оставшиеся стороны. Это можно сделать $2 \cdot 2 = 4$ способами.

(2.2) 3-я плитка смотрит закрашенной стороной в новую сторону. Осталось 2 плетки и одна незакрашенная сторона

2.2.1 ~~4-я плитка не закрашенной~~ смотрит

4-я плитка не закрашивает новую сторону

Тогда оставшаяся плитка должна на неё (сторону) смотреть.

2.2.2 4-я плитка закрашивает новую сторону.

Тогда пятая плитка может смотреть в ~~лю~~ любую сторону

В итоге имеем:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{способов выбрать первую плитку}}}{5} \cdot \Big(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{выбираем одну из 4-х сторон, которая тоже смотрит вверх}}}{4} \cdot \overset{\text{см. пункт 1)}}{\overbrace{3! \cdot 3!}} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{выбираем одну из четырех плиток и одно из трех направлений}}}{4 \cdot 3} \cdot \Big(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{выбираем третью плитку и одно из 2-х закрашен. направлений}}}{3 \cdot 2} \cdot \overset{\text{см. пункт 2.1}}{\overbrace{2 \cdot 2}} +$$

$$+ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{выбирает третью плитку и одно из 2-х новых направлений}}}{3 \cdot 2} \Big(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{выбираем 4-ую плитку и закраш. новую сторону}}}{2 \cdot 3 \cdot 1} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{выбираем четвертую плитку, закраш. новую сторону}}}{2 \cdot 1 \cdot 4}\Big) =$$

$$= 5\left(4 \cdot 6 \cdot 6 + 4 \cdot 3\left(24 + 6\left(6+8\right)\right)\right) =$$

$$= 5\left(144 + 12\left(24 + 84\right)\right) = 7200$$

Ответ: 7200 ✓ 12

Задача 5

$$6a - 2ab\,tgx + \sqrt{2\left(x + |x + b\,tgx| + b\,tgx\right)} = 4 + 2ax$$

Пусть $x + b\,tgx = t$

$$6a - 2at + \sqrt{2\left(t + |t|\right)} = 4 -$$

уравнение относительно переменной t должно иметь единственное решение.

Но рассмотрим сначала саму переменную t

$x + b\,tg\,x = t$

$b\,tg\,x = t - x$, где t - некоторое изменяющееся число. Тогда, если $b \neq 0$, ~~будет~~ бесконечно много решений; прямая $y = t - x$ пересекает график $y = b\,tg\,x$. Тогда $\underline{b = 0}$ ✓ и уравнение принимает вид $6a - 2ax + \sqrt{2(x+|x|)} = 4$

1) $x < 0$

$6a - 2ax = 4$

$2ax = 6a - 4$

$x = \frac{6a-4}{2a} = \frac{3a-2}{a}$

$\frac{3a-2}{a} < 0$ $\quad 0 \quad 2/3$

2) $x \geq 0$

$6a - 2ax + 2\sqrt{x} = 4$

$3a - ax + \sqrt{x} = 2$

$\sqrt{x} = m$, $\underline{m \geq 0}$

$am^2 - m + 2 - 3a = 0$ - имеет единственное решение?

1. $a = 0$ $\quad m = 2$

2. $a \neq 0$ $\quad D = 0$ $\quad D = 1 - 4a(2-3a) = 12a^2 - 8a + 1$

$12a^2 - 8a + 1 = 0$

$D_1 = 16 - 12 = 4$

$a = \frac{4 \pm 2}{12}$

$a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{6}$

Проверка: (1) $\underline{a = \frac{1}{2}}$ $\quad \frac{1}{2}m^2 - m + 2 - \frac{3}{2} = 0$

$m^2 - 2m + 1 = 0$

$\underline{m = 1}$ - подходит

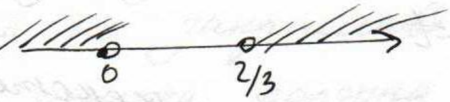
(2) $a = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}m^2 - m + 2 - \frac{1}{2} = 0$

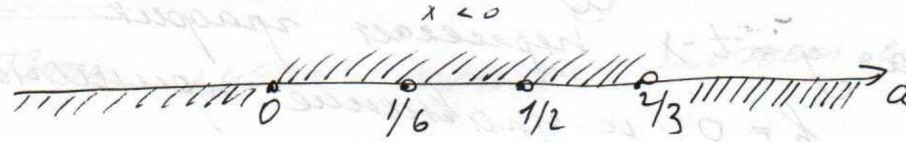
$m^2 - 6m + 9 = 0$ $\quad \underline{m = 3}$ - подходит

3) $D \geq 0$, но корни разных знаков

$\frac{2-3a}{a} < 0$



Итого:



?

единственное решение: $b = 0$

$a \in \cancel{(0; \frac{1}{6})}; (\frac{1}{6}; \frac{1}{2}); \cancel{(\frac{1}{2}; \frac{2}{3})}$ $\quad x = \frac{3a-2}{a}$

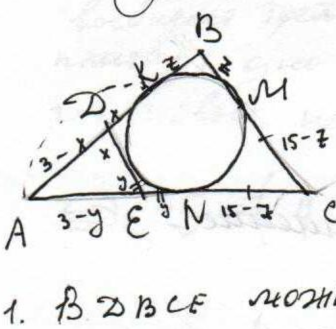
b=0 $\quad$ 10

$a = 0 \qquad x = 4$

√ $a \in (\frac{2}{3}; +\infty) \quad x = \frac{1 + \sqrt{12a^2 - 8a + 1}}{2a}$ $\quad$ a=0 !

√ $a \in (-\infty; 0) \quad x = \frac{1 - \sqrt{12a^2 - 8a + 1}}{2a}$ $\quad$ О.Д.З ?

Задача 3.



Найти: $tg \angle BAC$ ($tg A$ – ?)

Решение:

1. В $DBCE$ можно вписать окружность

$\angle BDE = 180° - \angle C$

$\angle ADE = 180° - \angle BDE = \angle C$

2. $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ (по 2 углам 1. $\angle A$ – общий 2. $\angle ADE = \angle ACB$) $\Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$

Пусть $DK = x$, тогда и $DE = x$, $KB = BM = z$, $MC = NC = 15 - z$

$EN = ED$; ~~AD = AE~~ ~~(по правы~~ (по свойству касательных к окружности)

тогда $\begin{cases} \frac{x+y}{15} = \frac{3-y}{3+z} = \frac{3-x}{18-z} \\ \frac{1}{2}(3-x)(3-y) \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} S_{ADE}, \ \sin\alpha = \frac{1}{(3-x)(3-y)} \end{cases}$

$\downarrow$ см. следующий ~~оборот~~ разворот $\quad S_{ADE} = \frac{(18-z)(3+z)}{2}$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 811066

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 17

~~3x~~

$$\begin{cases} 15(3-x) = (x+y)(3+15-z) \\ 15(3-y) = (x+y)(3+z) \\ \frac{3-x}{3-y} = \frac{18-z}{3+z} \end{cases}$$

$$\left(\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \left(\frac{(3-x)}{(18-z)}\right)^2\right.$$

$$\left(r = \frac{S}{p-6} = \frac{\frac{1}{2}}{3-(x+y)} = \frac{1}{6-2(x+y)}\right)$$

Имеем формулу для внешней окружности

$$r = \frac{S_{ADE}}{P_{ADE} - DE} = \frac{1/2}{3-(x+y)} = \frac{1}{6-2(x+y)}$$

Эта окружность является вписан. для $\triangle ABC$

$$r = \frac{S_{ABC}}{\cancel{P_{ABC}}\, P_{ABC}} \qquad r = \frac{S_{ABC}}{P_{ABC}}$$

~~$P_{ABC} =$~~

$$P_{ABC} = \frac{AB+BC+AC}{2} = 18$$

$$S_{ABC} = p \cdot r = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \sin\alpha$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(3+z)(18-z)\cdot\sin\alpha = \frac{9}{3-(x+y)} \\ (x+y)^2 (18-z)(3+z) = \frac{225}{\sin\alpha} \end{cases}$$

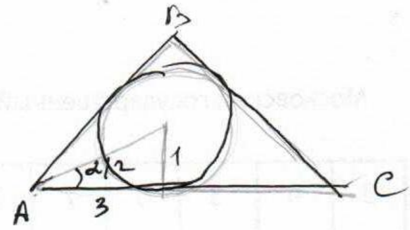
$$2(x+y)^2 = \frac{225(3-(x+y))}{9}$$

$$x+y = t$$

$$2t^2 = 25(3-t) \Rightarrow t = 2{,}5 = DE$$

$\frac{BC}{DE} = k = 6$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18, \; r = 1$



$tg\frac{\alpha}{2} = 1/3$

$tg\angle A = \frac{2tg\,\alpha/2}{1 - tg^2\alpha/2} = \frac{2 \cdot 1/3}{1 - 1/9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{4}$

Ответ: $tg\angle A = \frac{3}{4}$ ✓

16