Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

111609

Шифр ______________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету Математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Егоров Илья Дмитриевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, Лицей 1550

Регистрационный номер ШМ 4450

Вариант задания 20

Дата проведения "11" 3 20 13 г.

Подпись участника

сороп четыре

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
0	9	0	20	15	–					44

Шифр 111609

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

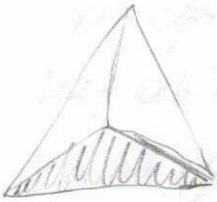
111609

609

Вариант № 20

№1

Общее количество способов укладки равно $3^5 = 243$



Из общего числа надо вычесть количество тех укладок, через которые свет не проходит.

Чтобы закрыть свет необходимо только 3 куска стекла, и вероятность того, что 3 куска закроют свет равна $\frac{2}{9}$.

Тогда из 243 стопок только $\frac{2}{9}$ часть не пропускает свет

$243 \cdot \frac{2}{9} = 54$

$243 - 54 = 189$ (стопки, которые частично пропускают свет)

$\boxed{\text{Отв: } \cancel{189}}$ 0

$31 \cdot 120 = 3720$

№2 $\sin^4 2019x + \cos^{2019}(2022x) \cdot \cos^{2018}(2019x) = 1$

$\sin^4 2019x = (\sin^2 2019x)^2 = (1-\cos^2 2019x)^2 = 1+\cos^4 2019x - 2\cos^2 2019x$

$1+\cos^4 2019x - 2\cos^2 2019x + \cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2018}(2019x) = 1$

$\cos^2(2019x)(\cos^2 2019x + \cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2016}(2019x) - 2) = 0$

$\cos^2(2019x) = 0$ или $\cos^2(2019x) + \cos^{2019} 2022x \cdot \cos^{2016} 2019x = 2$

$2019x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$x = \frac{\pi}{4038} + \frac{\pi n}{2019};\ n \in Z$

$\cos^2 2019x \geq 0 \quad x \in R$

$\cos^{2019} 2022x \cdot \cos^{2016} 2019x \geq 0 \quad x \in R$

$\Rightarrow \cos^2 2019x = 1$, $\cos^{2018} 2022x \cdot \cos^{2016} 2019x = 1$

Очевидно $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$

Отв: $\frac{\pi}{4038} + \frac{\pi n}{2019}$; πn; $n \in Z$

$-\cancel{08}$ 9

№4

Найдём область значения для:

$f\left(\frac{f(x)}{3}\right)$ $\qquad f(x)=\frac{9}{x^2-6x+12}$

$f(x)$ $\qquad x^2-6x+12 \in [3;+\infty)$; $\frac{9}{x^2-6x+12}\in(0;3]$

$f(f^2(x))$ $\qquad$ вершина $(3;3)$

$f(x)\in(0;3]$

$\frac{f(x)}{3}\in(0;1]$

$f\left(\frac{f(x)}{3}\right)\in\left(\frac{3}{4};\frac{9}{7}\right]$

$f^2(x)\in(0;9]$

$f(f^2(x))\in\left[\frac{9}{39};\frac{3}{4}\right)$

Подставим в выражение $x=3$

$\frac{7}{9}\cdot\frac{9}{7}+2\sqrt{2-\frac{3}{3}}\geq 13\cdot\frac{9}{39}$

$1+2\geq 3$

$3\geq 3$

При $x=3$ неравенство верно

Изобразим $\frac{9}{x^2-6x+1}$

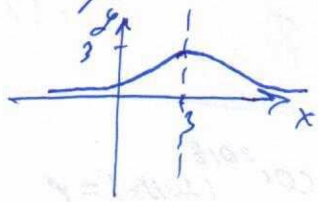


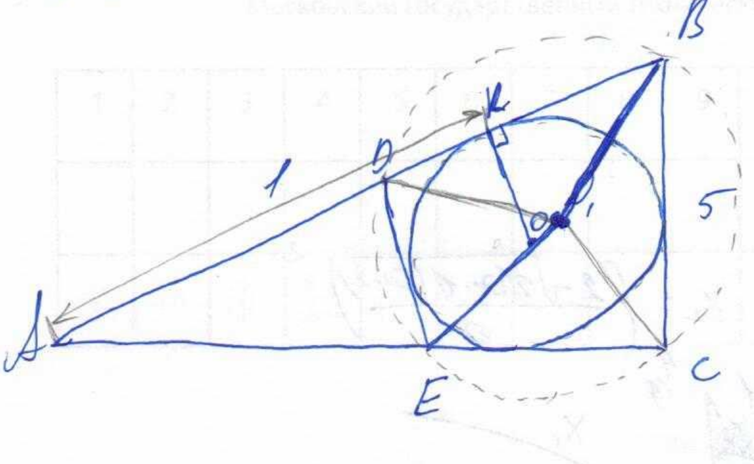
график симметричен относительно $x=3$,

значит при отклонении переменной x от $x=3$ выражения $\frac{7}{9}f\left(\frac{f(x)}{3}\right)$ и $2\sqrt{2-\frac{3}{f(x)}}$ будут убывать, а $13f(f^2(x))$ возрастать, тогда других решений неравенства не будет.

Единственное решение $x=3$

$\boxed{\text{Отв: } 3}$ ✓ 20

№3



№5 $2a - ab\,ctg x + 2\sqrt{2(x + |x + b\,ctg\,x| + b\,ctg x)} = 6 + ax$

$x + b\,ctg x \le 0$

$2a - ab\,ctg x + 0 = 6 + ax$

$ax + ab\,ctg x - 2a + 6 = 0$

$a(x + b\,ctg x) = 2a - 6$

$x + b\,ctg x = \frac{2a-6}{a} \le 0$

$\frac{2a-6}{a} \le 0$

$a \in (0; 3]$

$\begin{cases} b = 0 \\ x_0 = \frac{2a-6}{a} \end{cases}$

$x + b\,ctg x > 0$

$2a - ab\,ctg x + 4\sqrt{x + b\,ctg x} = 6 + ax$

$a(x + b\,ctg x) - 4\sqrt{x + b\,ctg x} + 6 - 2a = 0$

Пусть $t = \sqrt{x + b\,ctg x} > 0$

$at^2 - 4t + 6 - 2a = 0$

$a = 0$

$-4t + 6 = 0$

$t = \frac{6}{4}$

$x + b\,ctg x = \frac{36}{16}$

$b = 0$

$x = \frac{36}{4}$; $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ x = \frac{9}{4} \end{cases}$

$at^2 - 4t + 6 - 2a = 0 \quad a \ne 0$

$\frac{D}{4} = 2(a-1)(a-2)$ $\quad t = \frac{2 \pm \sqrt{2(a-1)(a-2)}}{a}$

$t_1 \cdot t_2 = \frac{3-a}{a}$,

$t_1 + t_2 = \frac{4}{a}$

1 решение: $\begin{cases} D = 0 \\ t > 0 \end{cases}$ $\quad a = 1 \quad a = 2$; $\quad t = 2 \quad t = 1$

$\begin{cases} D > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases}$ $\quad a \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; $\quad a = 3$; $\quad t = \frac{2}{3}$

$\begin{cases} D > 0 \\ t_1 \cdot t_2 < 0 \\ t > 0 \end{cases}$ $\quad a \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; $\quad a \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$; $\quad t_1 = \frac{2 + \sqrt{2(a-1)(a-2)}}{a}$

2 реш: $\begin{cases} D > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases}$ $\quad a \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; $\quad a \in (0; 3)$; $\quad a \in (0; +\infty)$

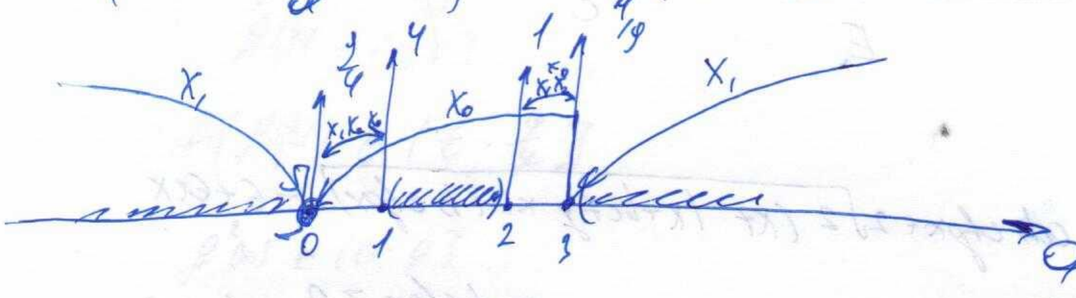
$a \in (0; 1) \cup (2; 3)$ $\quad t_1; t_2$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2(a-1)(a-2)}}{a} = \sqrt{x + b\,ctg x}$$

$b=0$

$$\frac{2 \pm \sqrt{2(a-1)(a-2)}}{a} = \sqrt{x}$$

$$x_1 = \left(\frac{2+\sqrt{2(a-1)(a-2)}}{a}\right)^2 \qquad x_2 = \left(\frac{2-\sqrt{2(a-1)(a-2)}}{a}\right)^2$$



$b=0$

Ответ: $b=0$

$a \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$ $\quad x = \left(\frac{2+\sqrt{2(a-1)(a-2)}}{a}\right)^2$

при $a \in (-\infty; 0)$ $\quad x = \left(\frac{2-\sqrt{\ldots}}{\ldots}\right)^2$

$b=0$
$a=0$ $\quad x = \frac{9}{4}$ ✓

при $a \in (3; +\infty)$ $\quad x = \left(\frac{2+\sqrt{\ }}{\ }\right)^2$

$b=0$
$a \in (1; 2)$ $\quad x = \frac{2a-6}{a}$ ✓

15