+ ℓu 2
+ 1 2

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

111591

Шифр ____________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника ЕРМИЛОВ АРСЕНИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, ГБОУ лицей №1580

Регистрационный номер ШМ5107

Вариант задания 19

Дата проведения "11" МАРТА 2018 г.

Подпись участника ____________________

сорок девять / [illegible]

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	6	–	20	0	20					49

Шифр 111591

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

Задача №1.

1) Чтобы стопка была непрозрачной достаточно уложить три треугольника так, чтобы стопка была непрозрачной. Всего существует $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\cdot4}{2} = 10$ способов выбрать 3 треугольника из 5 возможных. ? Без учета порядка?..

2) Рассмотрим один из десяти способов. Существует $3! = 6$ способов ~~менять кра~~ поворачивать три треугольника так, чтобы стопка из трех треугольников была непрозрачной. +

Но осталось еще $5-3=2$ треугольника, которые можно разместить как угодно. $\exists\, C_6^2 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6\cdot5}{2} = 15$ способов „размещений" этих двух треугольников (т.к. суммарно 6 частей и две из них закрашены)

3) $6\cdot15 = 90$ способов для одного из десяти способов $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 4) $90\cdot10 = 900$ - всего способов.

Ответ: ~~900~~.

3

А теперь они не по порядку!

№2

$\sin^4(2016x)+\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2018}(2016x)=1$

$(1-\cos^2(2016x))^2+\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2018}(2016x)=1$

$1-2\cos^2(2016x)+\cos^4(2016x)+\cos^{2017}(2025x)\cos^{2018}(2016x)=1$

$\cos^2(2016x)\left(-2+\cos^2(2016x)+\cos^{2017}(2025x)\cos^{2016}(2016x)\right)=0$

$$\left[\begin{array}{l}\cos^2(2016x)=0\\ \cos^2(2016x)+\cos^{2017}(2025x)\cos^{2016}(2016x)=2 \quad (*)\end{array}\right.$$

+

$(*)$ $\cos^2(2016x)+\cos^{2017}(2025x)\cos^{2016}(2016x)=2$

$E_{\cos^2(2016x)}\in[0;1]\Rightarrow$ max значение - единица

$E_{\cos}$ $\cos^{2017}(2025x)\cos^{2016}(2016)$ - также имеет max значение, равное единице. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ каждое слагаемое $=1$.

Вернемся к совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\cos^2(2016x)=0 \quad +\\ \begin{cases}\cos^2(2016x)=1\Rightarrow \cos^{2016}(2016x)=1\\ \cos^{2017}(2025x)\cos^{2016}(2016x)=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2(2016x)=0\\ \cos^{2017}(2025x)=1\end{array}\right. \text{потеряно!} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2016x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ 2025x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4032}+\frac{\pi n}{2016},\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{2\pi n}{2025},\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

6.

Ответ: $x\in\left\{\frac{\pi}{4032}+\frac{\pi n}{2016};\ \cancel{\frac{2\pi n}{2025}}\right\}$, $n\in\mathbb{Z}$

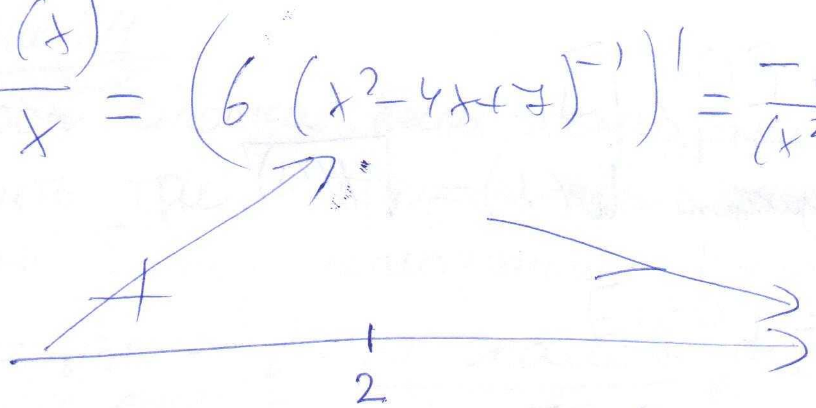
№4.

$$\frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) + \sqrt{2-\frac{2}{g(x)}} \geq 13 g\left(g^3(x)\right)$$

~~Пусть~~ $\cancel{\varphi(x) = \frac{g(x)}{2}}$

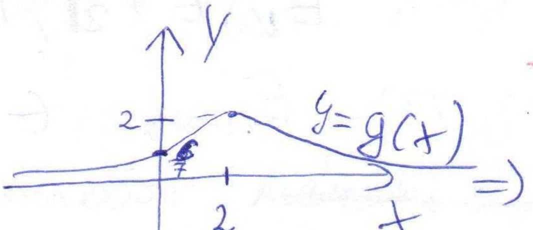
Рассмотрим функцию $g(x)=\frac{6}{x^2-4x+7}$

$$\frac{d g(x)}{d x} = \left(6\left(x^2-4x+7\right)^{-1}\right)' = \frac{-6(2x-4)}{(x^2-4x+7)^2} = 0$$



$$g(2) = \frac{6}{4-8+7} = 2$$

$$g(0) = \frac{6}{7}$$



1. Пусть $\varphi(x) = \frac{g(x)}{2}$, тогда $\Rightarrow E_{g(x)} \in (0;2]$

$E_{\varphi(x)} \in (0;1]$ $\quad g(1) = \frac{6}{1-4+7} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

2. Пусть $\psi(x) = g(\varphi(x))$, тогда $E_{\psi(x)} \in \left(\frac{6}{7}; \frac{3}{2}\right]$

3. Пусть $L(x) = \frac{2}{3}\psi(x)$, тогда $E_{L(x)} \in \left(\frac{12}{21}; 1\right]$

4. Рассмотрим слагаемое $\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}$

О.Д.З

$2-\frac{2}{g(x)} \geq 0$

$\frac{2g(x)-2}{g(x)} \geq 0$ $\quad + \; 0 \; - \; 1 \; +$ $\Rightarrow g(x) \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$

5) Рассм. функцию $Q(x) = \frac{2}{g(x)}$

$$\text{О.Д.З} \begin{cases} E_{g(x)} \in (0; 2] \\ E_{g(x)} \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow E_{g(x)} \in [1; 2]$$

$E_{Q(x)} \in [1; 2]$.

6) Рассм. функцию $N(x) = 2 - Q(x)$

$E_{N(x)} \in [0; 1]$.

7) Рассм. функцию $W(x) = \sqrt{N(x)}$

$E_{W(x)} = [0; 1]$.

8) Т.к. $E_{L(x)} \in (\frac{12}{21}; 1]$, а $E_{W(x)} \in [0; 1]$,

то $E_{L(x)+W(x)} \in (\frac{12}{21}; 2]$.

9) Рассм. правую часть равенства.

1. Пусть $K(x) = (g(x))^3$, тогда $E_{K(x)} \in (0; 8]$

$g(8) = \frac{6}{64-32+7} = \frac{6}{39}$

2. Пусть $U(x) = g(K(x))$, тогда $E_{U(x)} \in [\frac{6}{39}; 2]$

3. Пусть $F(x) = 13\,U(x)$, тогда $E_{F(x)} = [2; 26]$

4. Т.к. $E_{\text{правой части}} \in (\frac{12}{21}; 2]$, а $E_{\text{левой части}} \in [2; 26]$

то неравенство верно лишь тогда, когда обе части $= 2$.

10) Левая часть $= 2$, когда $x = 2$ и правая часть тоже (Просмотрев верхние рассуждения)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

111591

Шифр ____________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

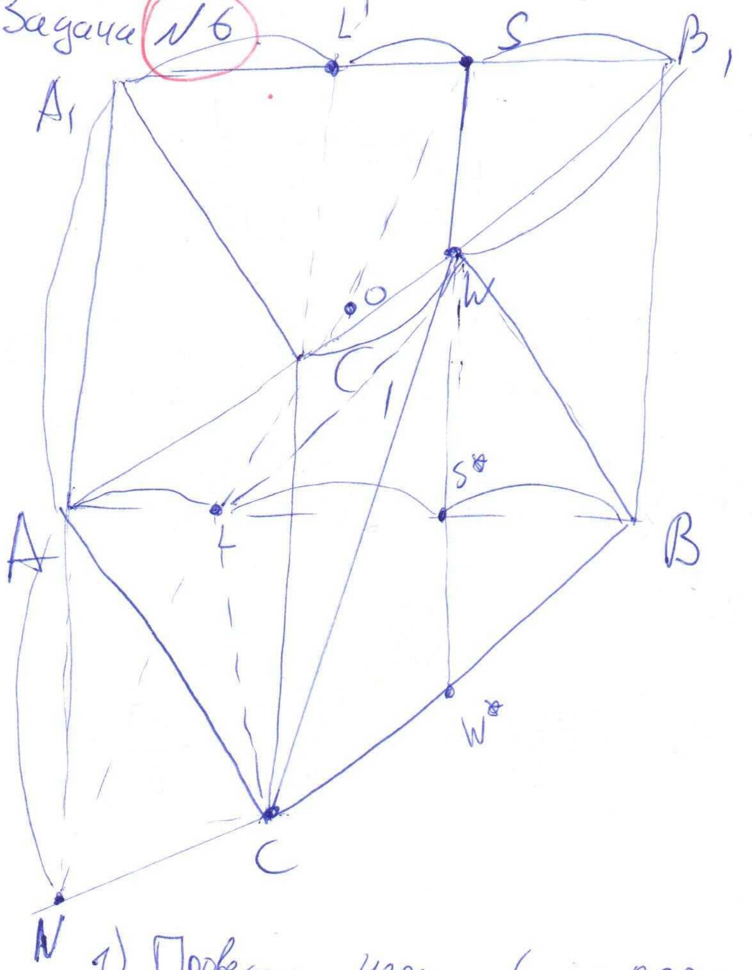
Вариант № 19

Из п. 10 => $x=2$

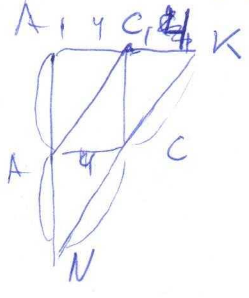
Ответ: ~~{2}~~ {2} +

20

Задача №6



1) Проведем через C прямую $\parallel AC_1$



$ACKC_1$ – параллелограмм =>

=> $AC = C_1K = 4$ => т. Фалеса

$\frac{NC}{CK} = \frac{AA_1}{AN} = \frac{1}{1}$

2) Проведем NO $\quad NO \cap A_1B_1 = S$; $NO \cap AB = L$

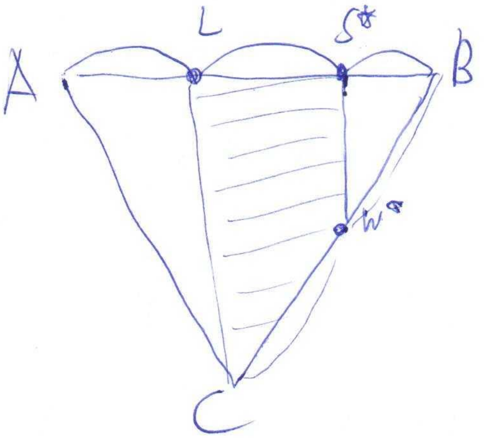
3) $\triangle NAL \sim \triangle NA_1S \overset{k=\frac{1}{2}}{\Rightarrow} \frac{AL}{LB} = \frac{B_1S}{SA_1} = \frac{1}{2}$

4) Проведем $SW \parallel C_1L$ $\quad \frac{C_1W}{WB_1} = \frac{1}{1}$

$LCWS$ – искомое сечение.

5) $S^* = \Pi p_{(ABC)} S$

$W^* = \Pi p_{(ABC} W$



6

6) Т.к. $\triangle ABC$ – правильный, то

$$S_{ABC} = \frac{4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

7) $S_{S^*BW^*} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} =$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$

8) $S_{ALC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

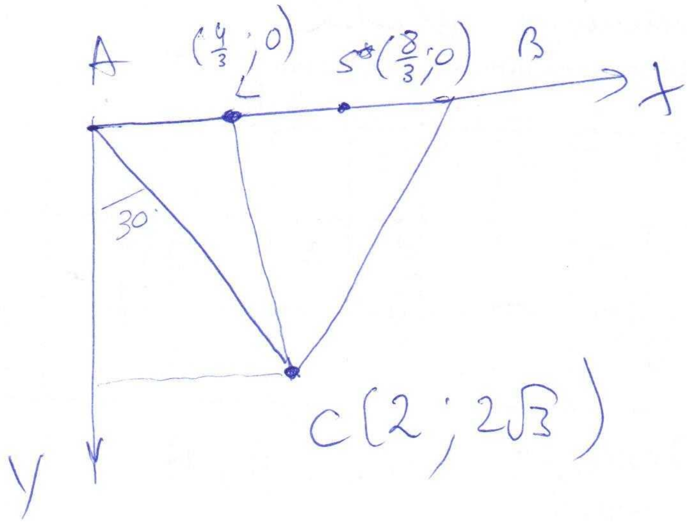
8) $S_{np} = S - S_{S^*BW^*} - S_{ALC} = 4\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} =$

$= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

9) $S_{сеч} = \frac{S_{np}}{\cos\varphi} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{np}}{S_{сеч}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{5} =$

$= \frac{2}{9}\sqrt{15}$

10) Введем систему координат.



$S^*(\frac{8}{3};0)$

$\begin{cases} L(\frac{4}{3};0) \\ C(2;2\sqrt{3}) \end{cases}$

$y = kx + b$

$\begin{cases} 0 = \frac{4}{3}k + b \\ 2\sqrt{3} = 2k + b \end{cases} (-) \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{2}{3}k \Rightarrow k = 3\sqrt{3}$

$b = -\frac{4}{3}k = -\frac{4}{3}\cdot 3\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$

$y = 3\sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$

$3\sqrt{3}x - y - 4\sqrt{3} = 0$

$$\rho(S^*; LC) = \frac{|\frac{8}{3}\cdot 3\sqrt{3} - 1\cdot 0 - 4\sqrt{3}|}{\sqrt{28}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{28}} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = 2\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\rho(S^*; LC)}{L} = \frac{2}{9}\sqrt{15}$$

$$L = \frac{9\cdot\rho(S^*; LC)}{2\sqrt{15}} = \frac{18\sqrt{\frac{3}{7}}}{2\sqrt{15}} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{35}}$$

$$h = \sqrt{L^2 - \rho^2} = \sqrt{\frac{81}{35} - \frac{12}{7}} = \sqrt{\frac{81-60}{35}} = \sqrt{\frac{21}{35}} = \sqrt{\frac{3}{5}} \quad F$$

призмы

11) Рассмотрим пирамиду $WLBC$

$$S_{LBC} = \frac{2}{3} S_{ABC} = \frac{2}{3} 4\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$V_{WLBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{\cancel{24}^{8}}{\cancel{9}_{3}\sqrt{5}} = \frac{8}{3\sqrt{5}} \text{ ед}^3$$

12) Рассмотрим пирамиду $WLSB_1B$.

Т.к. LS проходит через центр симметрии, то

$$S_{LSB_1B} = \frac{1}{2} S_{AA_1B_1B} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot AB =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot 4 = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$$

13) $\rho(W; ABB_1) = \frac{1}{2} \cdot H_{\text{прав.}\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = \sqrt{3} = H$ (в силу подобия $\Delta GL'B_1$ и ΔWSB_1)

14) $V_{WLSB_1B} = \frac{1}{3} \cdot H \cdot S_{LSB_1B} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{\frac{3}{5}} =$

$= \frac{2}{\sqrt{5}}$ ед^3 +

15) $\underline{V_{LCBWSB_1}} = V_{WLBC} + W_{WLSB_1B} = \frac{8}{3\sqrt{5}} + \frac{2^{\,3}}{\sqrt{5}} = \frac{14}{3\sqrt{5}} = \underline{\frac{14\sqrt{5}}{15}}$

16) $V_{\text{призмы}} = \cancel{\frac{1}{3}} S_{ABC} \cdot h = \cancel{\frac{1}{3}} \cdot 4\sqrt{3} \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$

17) $V_{ALCA_1SWC_1} = V_{\text{призмы}} - V_{LCBWSB_1} = \frac{\cancel{4}12}{\sqrt{5}} - \frac{14}{3\sqrt{5}} = \frac{36-14}{3\sqrt{5}} = 22$ $=$

$= \frac{\cancel{21}}{3\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$

Ответ: $\frac{14\sqrt{5}}{15}$; $\cancel{\frac{7\sqrt{5}}{5}}$.

20 −

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 111591
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

Задача №5.

$$8a + 3a\text{в}\,ctg\,x + 2\sqrt{2(x+|x-3\text{в}\,ctg\,x|-3\text{в}\,ctg\,x)} = 12+ax$$

$$8a + a(3\text{в}\,ctg\,x - x) + 2\sqrt{2(x-3\text{в}\,ctg\,x + |x-3\text{в}\,ctg\,x|)} = 12$$

Пусть $3\text{в}\,ctg\,x - x = t$

$$8a + at + 2\sqrt{2(|t|-t)} = 12$$

I $t \geq 0$ $3\text{в}\,ctg\,x - x \geq 0$

$$8a + at = 12$$

$t = \frac{12-8a}{a}$ – 1 решение А ещё – ?

А про в – ?

0