Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1 лист [подпись]

111540

Шифр ____________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математике
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Миронов Антон Сергеевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, лицей № 1523

Регистрационный номер ШМ 4982

Вариант задания 18

Дата проведения "11" марта 2018 г.

С работой ознакомлен 16.03.2018 [подпись]

Подпись участника [подпись]

$\Sigma = 46$ (сорок шесть) Кеф

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

111540

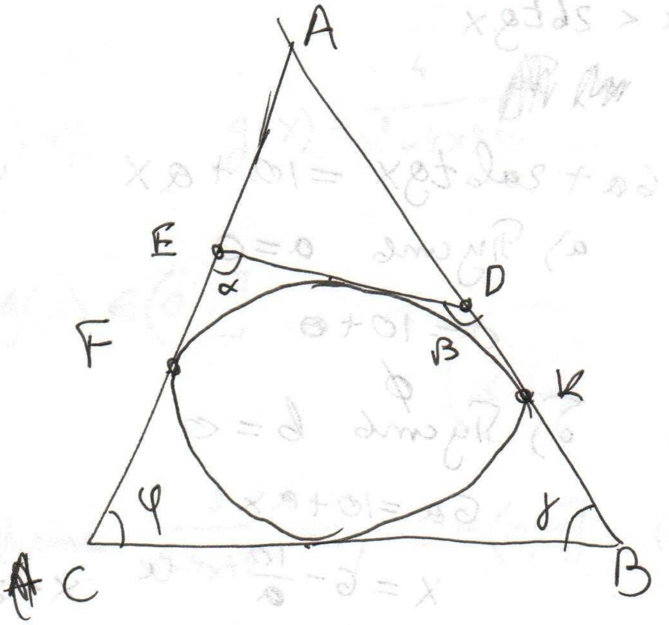
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
3	9	4	20	10	–					46

Шифр ________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

540

Вариант № 18



N3

Дано:

$\triangle ABC$

$D \in AB$

$E \in AC$

$S_{ADE} = 24$

$(O_1; r_1)$ впис в $BDEC$

$(O_2; r_2)$ опис $BDEC$

$BC = 18$

$K \in AB$

$AK = 12$

Найти: $tg \angle BAC$ – ?

Решение:

4

1) т.к. ~~окружн.~~ $(O_1; r_1)$ впис. в $BDEC \Rightarrow \angle\varphi + \angle\beta = \angle\gamma + \angle\alpha = 180°$

2) ~~$\triangle A$~~ угол при $A = \angle A$

$\angle AED + \angle ADE + \angle A = 180°$

3) $\angle\alpha$ – внешний для $\triangle EAD \Rightarrow \angle\alpha = \angle A + \angle ADE$.

$\angle\alpha + \angle\gamma = \angle A + \angle ADE + \angle\gamma = 180° = \angle A + \angle ADE + \angle AED \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle\gamma = \angle AED$ и аналогично $\angle\varphi = \angle EDA$.

?

4) $\triangle AED \sim \triangle ACB$ по двум углам. V

№ 5

$6a + 2ab\,tgx + 2\sqrt{2(x+|x-2b\,tgx|-2b\,tgx)} = 10 + ax$

1) $x < 2b\,tgx$

$6a + 2ab\,tgx = 10 + ax$

а) Пусть $a = 0$

$0 = 10 + 0$

$\varnothing$

б) Пусть $b = 0$

$6a = 10 + ax$

$x = 6 - \frac{10}{a}$ и $x < 2b\,tgx = 0 \Rightarrow x < 0$

$\Rightarrow 6 - \frac{10}{a} < 0 \Rightarrow \frac{6a-10}{a} < 0 \Rightarrow \frac{a - \frac{10}{6}}{a} < 0$

$0 \quad \frac{10}{6}$

$x = 6 - \frac{10}{a}$ при $b = 0$, $a \in \left(0; \frac{10}{6}\right)$

в) Пусть $a = 0$ и $b = 0$

$\varnothing$?

2) $x > 2b\,tgx$

$6a + 2ab\,tgx + 2\sqrt{2(x + \cancel{\pm} x - 2b\,tgx - 2b\,tgx)} = 10 + ax$

$6a + 2ab\,tgx + 2\sqrt{4x - 8b\,tgx} = 10 + ax$

а) Пусть $b = 0 \Rightarrow x > 0$

$6a + 4\sqrt{x} = 10 + ax$

$\sqrt{x} = t,\ t > 0$ $\quad at^2 - 4t + 10 - 6a = 0$

$D = 16 - 40a + 24a^2 = 8(3a^2 - 5a + 2) = 8(a-1)\left(a + \frac{2}{3}\right)$

10

т.к. решение одно $\Rightarrow D=0$?

$8(a-1)(a+\frac{2}{3})=0$

$a=1$, $a=-\frac{2}{3}$

другие случаи?

$t=\frac{4}{2a}=\frac{2}{a}$

$t_1=2$

$t_2=-3$, но $t>0 \Rightarrow -3$ не подх.

$\sqrt{x}=2$

$x=4$

б) Пусть $a=0$

$\sqrt{4x-8b\,tgx}=5$

$4x-8b\,tgx=25$

~~а) Пусть $b=0$~~

в) Пусть $a=0$ и $b=0$

$\sqrt{4x}=5$

$4x=25$

$x=\frac{25}{4}$

Ответ: $x=6-\frac{10}{a}$ при $b=0$, $a\in(0;\frac{10}{6})$

$x=4$ при $b=0$, $a=1$

$x=\frac{25}{4}$ при $b=0$, $a=0$

7

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

111540

Шифр ______

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 18

20

№4

$$\frac{3}{4}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)+\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}\geq 19\,g\left(g^3(x)\right), \quad g(x)=\frac{4}{x^2-4x+6}$$

$$g(x)=\frac{4}{x^2-4x+6}=\frac{4}{(x-2)^2+2} \Rightarrow g(x)\in(0;2]$$

$$\frac{g(x)}{2}\in(0;1] \quad (*)$$

Пусть $\frac{2}{x^2-4x+6}=t, \quad t\in(0;1] \quad (*)$

$$g\left(\frac{g(x)}{2}\right)=\frac{4}{\left(\frac{2}{x^2-4x+6}-2\right)^2+2}$$

$$t-2\in(-2;-1]$$

$$(t-2)^2\in[1;4)$$

$$(t-2)^2+2\in[3;6)$$

$$\frac{1}{(t-2)^2+2}\in\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right]$$

$$g\left(\frac{g(x)}{2}\right)\in\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right] \quad \Leftarrow \quad \frac{4}{(t-2)^2+2}\in\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right]$$

$$\frac{3}{4}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)\in\left(\frac{1}{2};1\right] \quad (1)$$

$$\frac{1}{g(x)}\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$$

$$\frac{2}{g(x)}\in[1;+\infty)$$

$$-\frac{2}{g(x)}\in(-\infty;-1]$$

см след стр.

$$2-\frac{2}{g(x)} \in (-\infty; 1]$$

$$\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}} \in [0; 1] \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow \frac{3}{4} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) + \sqrt{2-\frac{2}{g(x)}} \in \left(\frac{1}{2}; 2\right]$$

$$g^3(x) \in (0; 8]$$

$$g(g^3(x)) = \frac{4}{\left(\left(\frac{4}{x^2-4x+6}\right)^3-2\right)^2+2}$$

Пусть $\frac{4}{x^2-4x+6} = q$, $q \in (0; 2] \Rightarrow q^3 \in (0; 8]$

$$q^3-2 \in (-2; 6]$$

$$(q^3-2)^2 \in (4; 36]$$

$$(q^3-2)^2+2 \in (6; 38]$$

$$\frac{1}{(q^3-2)^2+2} \in \left[\frac{1}{38}; \frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{4}{(q^3-2)^2+2} \in \left[\frac{2}{19}; \frac{2}{3}\right)$$

$$19 \cdot g(g^3(x)) \in \left[2; \frac{19 \cdot 2}{3}\right) \quad (3)$$

Мы видим, что максимальное значение в левой части $= 2$, а минимальное значение в правой тоже $= 2$, но левая часть $\geq$ правая $\Rightarrow$ левая часть $=$ правой $= 2$. Равенство достигается в значении $= 2$.

значение 2 максимально для левой часть $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ оно достигается при максимальном $g(x)=2$

$g(x)=2$

$$\frac{4}{x^2-4x+6}=2$$

$$\frac{2}{(x-2)^2+2}=1$$

$$(x-2)^2+2=2$$

$$(x-2)^2=0$$

$$x=2$$

Ответ: $x=2$ ✓

№2

$$\sin^4(2022x)+\cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2018}(2022x)=1$$

(*) $\sin^4(2022x)=(1-\cos^2(2022x))^2=1-2\cos^2(2022x)+\cos^4(2022x)$

подставим (*) в исходное ур.-ие.

$$1-2\cos^2(2022x)+\cos^4(2022x)+\cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2018}(2022x)=1$$

вынесем общий множитель за скобки.

$$(\cos^2(2022x))(-2+\cos^2(2022x)+\cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x))=0$$

рассмотрим вторую скобку:

$$-2+\cos^2(2022x)+\cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x)=0$$

$\cos^2(2022x)\in[0;1]\Rightarrow$ чтобы получался 0 нужно, чтобы

$$\cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x)=1$$

т.к. $\cos^2(2022x)$ уже равен $1\Rightarrow\cos^{2017}(2019x)=1\Rightarrow\cos(2019x)=1$

$$\begin{cases}\cos(2019x)=1\\ \cos(2022x)=\pm1\end{cases}$$

см. след. стр.

$$\begin{cases} 2019x = 2\pi k, & k\in\mathbb{Z} \\ 2022x = \pi n, & n\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\pi k}{2019}, & k\in\mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi n}{2022}, & n\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 9$$

рассмотрим первую скобку:

$\cos^2(2022x)=0$

$\cos(2022x)=0$

$2022x = \frac{\pi}{2} + \pi k', \ k\in\mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{4044} + \frac{\pi k'}{2022}, \ k'\in\mathbb{Z}$

но, если $\cos(2022x)=0$ тогда вторая скобка в 0 не обращается.

Значит у нас два варианта ответов.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4044} + \frac{\pi k'}{2022}, \ k'\in\mathbb{Z}$ либо

либо $\begin{cases} x = \dfrac{2\pi k}{2019}, & k\in\mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi n}{2022}, & n\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k, n - ?$

№1

Так как стекло закрашено на $\frac{1}{4}$ часть, то первое стекло можно положить 4 способами.

Второе и третье стекло можно тоже положить 4 способами.

Допустим, положив 3 стекла, мы закрасили 3 слоя в трёх различных местах (см. рис.) 3

тогда прозрачным у нас осталась всего $\frac{1}{4}$ часть, а это значит, что оставшиеся два стекла можно положить таким образом, чтобы прозрачная часть так и осталась прозрачной (закрашенную часть кладём на закрашенную). Сделать это можно 3 способами.

В итоге у нас существует всего $4\cdot4\cdot4\cdot3\cdot3$? способов

Ответ: 576 способов.

не все случаи!