Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

111026

Шифр ______________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Гриневская Екатерина Сергеевна

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Москва, „Многопрофильная школа N 1537"

Регистрационный номер ШМ 4386

Вариант задания 18

Дата проведения “11” марта 2018 г.

Подпись участника Грин-

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

сорок пять

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	9	16	20	0	0					45

111026

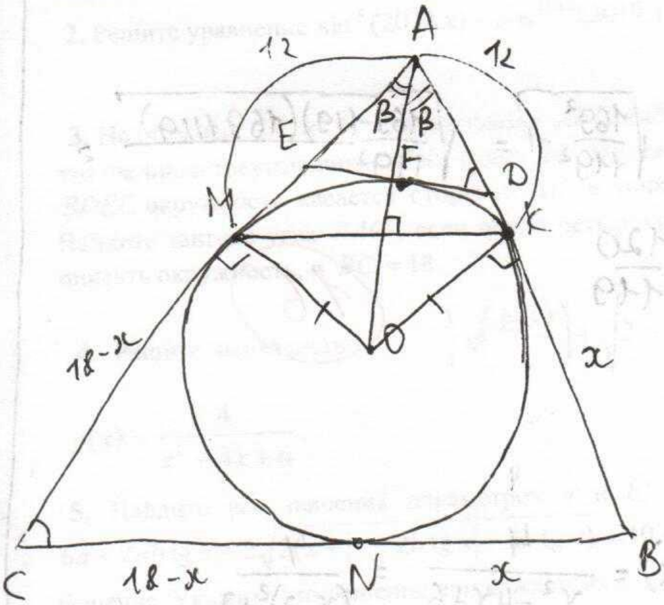
Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

111026

Вариант № 18

№3



Дано: $S_{\triangle EAD} = 24$; $BC = 18$; $AK = AM = 12$

$\angle EDB + \angle ECB = 180^\circ$

Найти: $tg\angle BAC - ?$

Решение:

1) $KB = BN = x$, $CM = CN = 18 - x$ (отр. кас.)

2) ECBD можно впис. в окр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EDB + \angle ECB = 180^\circ \Rightarrow$ пусть $\angle ECB = \alpha$,

тогда $\angle EDB = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \angle EDA = 180^\circ - \angle EDB$ (смежные) $= 180^\circ - 180^\circ + \alpha = \alpha \Rightarrow \angle ADE =$

$= \angle ACB \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ACB$ (по 2ум углам ($\angle A$ - общий)) $\Rightarrow$

3) $\Rightarrow$ пусть $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{ED}{CB} = k \Rightarrow AE = k(12+x)$, $ED = 18k$, $AD = (30-x)\cdot k$

4) $S_{\triangle ABC} = \dfrac{P_{\triangle ABC}}{2} r$, где r - радиус впис. окр. ($OM = OK = OF = ON$)

$P_{\triangle ABC} = 18 + 12 + x + 30 - x = 60$

$\dfrac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = k^2 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{S_{\triangle AED}}{k^2} = \dfrac{24}{k^2}$

$r = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{P_{ABC}} = \dfrac{2 \cdot 24}{k^2 \cdot 60} = \dfrac{4}{5k^2}$

5) $\triangle MAK$ - р/б $\Rightarrow$ AO - бис-са, мед-а, выс-та $\Rightarrow \angle MAO = \angle AOK$

6) $\omega(O; OF)$ - вневпис. окр. $\triangle AED \Rightarrow OF = \dfrac{S_{\triangle AED}}{\frac{P_{\triangle AED}}{2} - ED} = \dfrac{24}{\frac{AE+ED+AD}{2} - ED}$

$$\frac{AE+ED+AD}{2} = \frac{k(12+x)+18k+k(30-x)}{2} = \frac{12k+kx+18k+30k-kx}{2} = 30k \Rightarrow$$

$$OF = \frac{24}{30k-18k} = \frac{2}{k}$$

из (п. 4) и (п. 6) OF: $\frac{2}{k} = \frac{4}{5k^2} \Rightarrow 10k^2 = 4k \quad k \neq 0 \Rightarrow$

$$k = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \Rightarrow r = \frac{2\cdot 5}{2} = 5$$

7) $tg\angle MAO = \frac{MO}{AM} = \frac{5}{12}$, $AO = \sqrt{144+25} = 13$

$$\cos\angle MAO = \frac{NA}{AO} = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos\beta \Rightarrow \cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = 2\cdot\frac{144}{169} - 1 =$$

$$= \frac{288-169}{169} = \frac{119}{169}$$

$$1+tg^2 2\beta = \frac{1}{\cos^2 2\beta} \Rightarrow tg 2\beta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 2\beta} - 1} = \sqrt{\frac{169^2}{119^2} - 1} = \sqrt{\frac{(169-119)(169+119)}{119^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{50\cdot 288}}{119} = \frac{\sqrt{50\cdot 2\cdot 144}}{119} = \frac{10\cdot 12}{119} = \frac{120}{119}$$

Ответ: $\frac{120}{119}$

16

N4.

$$\frac{3}{4}g\left(\frac{g(x)}{2}\right) + \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} \geq 19\, g(g^3(x)), \quad g(x) = \frac{4}{x^2-4x+6} = \frac{4}{(x-2)^2+2}$$

$$2 \leq (x-2)^2 + 2 < +\infty$$

$$0 < \frac{1}{(x-2)^2+2} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 < \frac{4}{(x-2)^2+2} \leq 2 \Rightarrow g(x) \in (0; 2]$$

ОДЗ: $2 - \frac{2}{g(x)} \geq 0$

$$\frac{g(x)-1}{g(x)} \geq 0 \qquad + \quad 0 \quad - \quad 1 \quad + \quad g(x)$$

$$\Rightarrow g(x) \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$$

$$0 < \frac{g(x)}{2} \leq 1$$

пусть $\frac{g(x)}{2} = t$, $t \in (0; 1] \Rightarrow g(t) = \frac{4}{(t-2)^2+2}$ $\quad 3 \leq (t-2)^2+2 < 6$

$$\frac{2}{3} < g\left(\frac{g(x)}{2}\right) \leq \frac{4}{3} \qquad \frac{1}{6} < \frac{1}{(t-2)^2+2} \leq \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}g\left(\frac{g(x)}{2}\right) \leq 1 \qquad \frac{2}{3} < \frac{4}{(t-2)^2+2} < \frac{4}{3} \Rightarrow g(t) \in \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{g(x)} < +\infty$$

$$1 \leq \frac{2}{g(x)} < +\infty$$

$$-\infty < -\frac{2}{g(x)} \le -1$$

$$-\infty < -\frac{2}{g(x)} + 2 \le 1$$

$$0 < \sqrt{-\frac{2}{g(x)} + 2} \le 1$$

при $-\frac{2}{g(x)} + 2 \geq 0$

$$-\frac{1}{g(x)} + 1 \geq 0$$

$$\frac{g(x)-1}{g(x)} \geq 0$$

$g(x)$: $+$ 0 $-$ 1 $+$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$, но

$g(x) \in (0; 2] \Rightarrow \boxed{g(x) \in [1; 2]} \Rightarrow$

$\frac{1}{2} \le \frac{g(x)}{2} \le 1$, $\frac{g(x)}{2} = t$, $t \in [\frac{1}{2}; 1]$

$g(t) = \frac{4}{(t-2)^2+2}$ $\quad (t-2)^2+2$

:

$$\begin{cases} g(x) \in (0; 2] \\ g(x) \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow g(x) \in [1; 2]$

$\frac{1}{2} \le \frac{g(x)}{2} \le 1$, $\frac{g(x)}{2} = t$, $t \in [\frac{1}{2}; 1]$

$g(t) \in [\frac{16}{17}; \frac{4}{3}]$, т.к.

$$3 \le (t-2)^2 + 2 \le \frac{17}{4}$$

$$\frac{4}{17} \le \frac{1}{(t-2)^2+2} \le \frac{1}{3}$$

$$\frac{16}{17} \le \frac{4}{(t-2)^2+2} \le \frac{4}{3}$$

$$\boxed{\frac{12}{17} < \frac{3}{4} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) \le 1}$$

$\sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}}$ $\quad 1 \le \frac{2}{g(x)} \le 2$

$$-2 \le -\frac{2}{g(x)} \le -1$$

$$0 \le 2 + \left(-\frac{2}{g(x)}\right) \le 1$$

$$\boxed{0 \le \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} \le 1}$$

$$< \frac{3}{4} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) + \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} \le 1 + 1$$

$$\boxed{\frac{12}{17} < \frac{3}{4} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) + \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} \le 2}$$

$g^3(x) \in [1; 8]$, $g^3(x) = a$, $a \in [1; 8]$

$$g(a) = \frac{4}{(a-2)^2+2}$$

$$3 \le (a-2)^2 + 2 \le 38$$

$$\frac{1}{38} \le \frac{1}{(a-2)^2+2} \le \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{19} \le \frac{4}{(a-2)^2+2} \le \frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{19} \le g(a) \le \frac{4}{3}$$

$$\boxed{2 \le 19 g(a) \le \frac{76}{3}}$$

21

$(\frac{12}{17}; 2] \geq [2; \frac{76}{3}] \Rightarrow$ обе части неравенства равны 2.

Обе части нер-ва равны 2 при $g(x)=2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{4}{x^2-4x+6}=2$$

$$\frac{2}{(x-2)^2+2}=1$$

$2=(x-2)^2+2$, т.к. $(x-2)^2+2\geqslant 0$

$$\boxed{(x-2)^2=0}$$

$$x=2$$

Ответ: $x=2$ ✓

N2

$$\underbrace{\sin^4(2022x)-1}+\cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2018}(2022x)=0$$

$$\underbrace{(\sin^2(2022x)-1)}_{-\cos^2(2022x)}(\sin^2(2022x)+1)+\cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2018}(2022x)=0$$

$$-\cos^2(2022x)\left(\sin^2(2022x)+1-\cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x)\right)=0$$

✓ $\left[\begin{array}{l}\cos^2(2022x)=0\\ \sin^2(2022x)+1=\cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x)\end{array}\right.$ — возможно только при $\boxed{x=0}$, т.к. левая часть $\geqslant 1$, а правая $\leqslant 1$:

$$\left\{\begin{array}{l}\sin(2022x)=0\\ \cos(2019x)=1\\ \left[\begin{array}{l}\cos(2022x)=1\\ \cos(2022x)=-1\end{array}\right.\end{array}\right.$$

неверные корни!

$\cos(2022x)=0$

$2022x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{4044}+\frac{\pi n}{2022}, n\in\mathbb{Z}$

9

Ответ: $\frac{\pi}{4044}+\frac{\pi n}{2022}, n\in\mathbb{Z}$; 0. ?

N1.

Всего вариантов размещения этих стекол $4^5=2^{10}=1024$ фиксируем нижний 4^4.

Вариантов, в которых нет ни одного прозрачного столбца (расстановление 5 треугольников (закр.) по 4 местам)

$5^4=25\cdot 25=625$

повороты + перемещения слоёв!

$1024-625=399$

$$\begin{array}{r}1024\\ -\ 625\\ \hline 399\end{array}$$

0

Ответ: 399