Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 111032

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Абитуров Александр Сергеевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, школа N 444

Регистрационный номер ШМ 5451

Вариант задания 19

Дата проведения "11" Марта 20 18 г.

С работой ознакомлен 16.03.2018

Подпись участника

45 (сорок пять)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	12	0	20	10	0					45

111032

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

032

Вариант № 19

N4

$$\frac{2}{3}\underbrace{g\left(\frac{g(x)}{2}\right)}_{k(x)} + \underbrace{\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}}_{h(x)} \geq \underbrace{13g\left(g^3(x)\right)}_{c(x)}, \quad g(x) = \frac{6}{x^2-4x+7}$$

(1.) $g(x) = \frac{6}{(x-2)^2+3}$

$g(0) = \frac{6}{7}$

$g(x) \leq 0 : x \in \varnothing$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$

$g'(x) = \frac{-12(x-2)}{((x-2)^2+3)^2}$

$g'(x)$: $+$ 2 $-$; $g(x)$: ↗ ↘ ; $g(2) = 2$

$g(x) \in (0; 2]$ +.

(2.) $g^3(x) = a(x)$

$a(x) \in (0; 8]$ +.

$g(a(x)) = b(x)$

$g(0) = \frac{6}{7}$ $\quad b(x) \in \left[\frac{6}{39}; 2\right]$

$g(8) = \frac{6}{39}$ $\quad c(x) = 13\,b(x)$

$\frac{6}{7} \not> \frac{6}{39}$ $\quad \boxed{c(x) \in [2; 26]}$

$\frac{1}{7} \not> \frac{1}{39}$ $\quad \frac{6\cdot 13}{39_3} = 2$ +.

$39 > 7$

(3.) $\frac{2}{g(x)} = d(x)$

$d(x) \in [1; +\infty)$

$e(x) = 2 - d(x)$

$e(x) \in (-\infty; 1]$

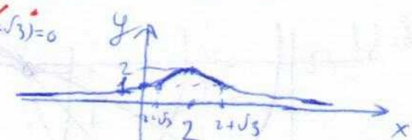
$e(x) \geq 0$: $d(x) \leq 2$; $\frac{2}{g(x)} \leq 2$; $g(x) \geq 1$

$g(x) = 1$: $(x-2)^2+3 = 6$

$(x-2)^2 = \pm\sqrt{3}$?

$(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3}) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 2+\sqrt{3} \\ x = 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$



~~$x \in 2$~~

$x \in [2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}]$: $e(x) \in [0; 1]$; $h(x) = \sqrt{e(x)}$

$\boxed{h(x) \in [0; 1]}$ +.

(4.) $\frac{g(x)}{2} = i(x)$ $\quad g(0) = \frac{6}{7}$

$i(x) \in (0; 1]$ $\quad g(1) = \frac{3}{2}$

$j(x) = g(i(x))$

$j(x) \in \left(0; \frac{3}{2}\right]$; $k(x) = \frac{2}{3}j(x)$?

$\boxed{k(x) \in [0; 1]}$ ±.

(5.)

(5.1) $k(x) + h(x) \geq c(x)$, где $\begin{cases} k(x) \in [0; 1] \\ h(x) \in [0; 1] \\ c(x) \in [2; 26] \end{cases} \Rightarrow$ Неравенство будет выполнено только при условии: $\begin{cases} k(x) = 1, \\ h(x) = 1 \\ g(x) = 2 \end{cases}$

20

$k(x) = 1$: $i(x) = 1$: $g(x) = 2$: $x \in \{2\}$

(5.2) проверим будет ли при $h(2) = 1$, $g(2) = 2$: $\sqrt{2 - \frac{2}{2}} = 1$, да, будет; проверим $c(2) = 2$: $13g(8) = \frac{13\cdot 6}{39_3} = 2$, да

(5.3) $x \in \{2\}$: $\begin{cases} k(x) = 1 \\ h(x) = 1 \\ c(x) = 2 \end{cases}$; $2 \in [2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}] \Rightarrow$ $\boxed{\text{Ответ: } x \in \{2\}}$

N5

$8a+3b\,ctg x\cdot a+2\sqrt{2(x+|x-3b\,ctg x|-3b\,ctg x)}=12+ax$, ед. реш

пусть $3b\,ctg x = t$, тогда:

$8a+at+2\sqrt{2(x+|x-t|-t)}=12+ax$

$\left[\begin{array}{l} x\ge t:\ 8a+at+2\sqrt{4\cdot(x-t)}=12+ax \ (1) \\ x\le t:\ 8a+at+2\sqrt{2(\underbrace{x-x+t-t}_{0})}=12+ax \ (2)\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4\sqrt{(x-t)}=12+ax-8a-at \\ x\ge t\end{cases} (1) \\ \begin{cases}8a+at=12+ax \\ x\le t\end{cases} (2)\end{array}\right.$

(2) ~~$3a\,b\,ctg x$~~ $8a-12=ax-at$

$\begin{cases}a\cdot 3b\,ctg x=a(x-8)+12 \\ x\le 3b\,ctg x\end{cases}$

~~(2.1) $a=0$: бесконечное мно-во решений~~

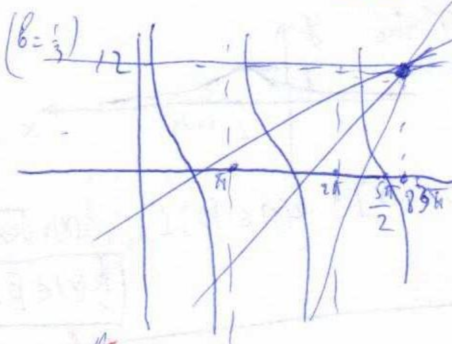
~~(2.2) $a\ne 0$: $a\cdot 3b\,ctg x = a(x-8)$~~ | поделим на (a)

~~$3b\,ctg x = x-8$~~

(2.1) $a=0$: $0=12$ решений нет

(2.2) $a\ne 0$: $a\cdot 3b\,ctg(x)=a(x-8)+12$

$(b=\frac{1}{3})$



семейство прямых, прох. через точку $(8;12)$

$8 > \frac{5\pi}{2}$ $\quad 8 < 3\pi$

$\frac{16}{5} > \pi$ $\quad \frac{8}{3} < \pi$

$3{,}2 > \pi$ $\quad 2\frac{2}{3} < \pi$

Аналогично п.(1) беск. мно-во решений при любых $b\ne 0$ => если решение одно то $b=0$: $a(x-8)+12=0$

$x-8=-\frac{12}{a}$

$t=0$. $\quad x\ge 8-\frac{12}{a}<0$

При $\begin{cases}a\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ b\in\{0\}\end{cases}$: $x\in\{8-\frac{12}{a}\}$

$x=8-\frac{12}{a}$

(1) $\begin{cases}4\sqrt{(x-t)}=12+a(x-t)-8a \\ x\ge t\end{cases}$ (1.1)

(1.1) ~~$x-t$~~ Пусть $\sqrt{x-t}=v$, тогда

~~$4t=12+at$~~ $4v=12+av^2-8a$;

$av^2-4v+12-8a=0$, ед. решение при $D=0$:

$4(~~1~~4-12a+8a^2)=4\cdot 16(2a^2-3a+1)=$

$D_a=9-8=1$: $a=\frac{3\pm 1}{4}=\begin{matrix}1\\ \frac{1}{2}\end{matrix}$

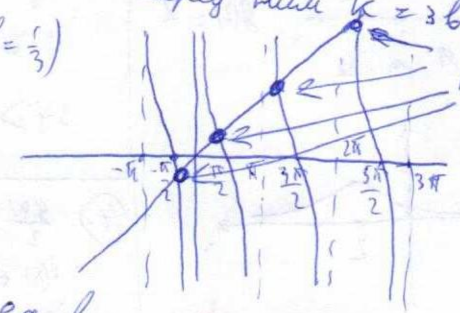
~~При $a\in\{1;\frac{1}{2}\}$:~~ $\quad a\in\{1\}$: $v=4$

$a\in\{\frac{1}{2}\}$: $v=8$

$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-t}=4 \\ \sqrt{x-t}=8 \\ x\ge t\end{array}\right.$ $\quad \begin{cases}x-t=16 \\ x-t=64 \\ x\ge t\end{cases}$; $\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=16+3ctg b(x) \\ x=64+3ctg b(x)\end{array}\right. \\ x\ge ctg b(x)\end{cases}$

(!) Поскольку $ctg(x)$ – периодичная функ... то решений будет беск. много независимо от стоящего перед ним $k=3b$

(При $b=\frac{1}{3}$)



=> ед. возможное условие, при кот... ур-ние имеет ед. решение: $b=$

$\begin{cases}x\ge 16 \\ x\ge 64 \\ x\ge 0\end{cases}$, $\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in\{1\} \\ b\in\{0\}\end{cases};\ x\in\{16\} \\ \begin{cases}a\in\{\frac{1}{2}\} \\ b\in\{0\}\end{cases};\ x\in\{64\}\end{array}\right.$

учет знака корня кв. ур.

$\begin{cases}a\in(-\infty;0)\cup(0;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};1)\cup(1;+\infty) \\ b\in\{0\}\end{cases}$: $x\in\{8-\frac{12}{a}\}\cup$

$\begin{cases}a\in\{1\} \\ b\in\{0\}\end{cases}$: $x\in\{16\}\cup$

$\begin{cases}a\in\{\frac{1}{2}\} \\ b\in\{0\}\end{cases}$: $x\in\{64\}\cup$ $\quad \begin{cases}a\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\end{cases}$ беск. мно-во решений

$b\in\mathbb{R}$, $a\in\{0\}$: корней нет

Ответ: при $(a,b)\in(1;0)$: $x\in\{16\}$

при $(a,b)\in(\frac{1}{2};0)$: $x\in\{64\}$

при $(a,b)\in\{(-\infty;0)\cup(0;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};1)\cup(1;+\infty);0\}$

$x\in\{8-\frac{12}{a}\}$

10

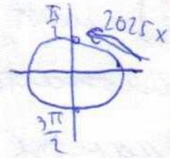
№2

$$\sin^4(2016x)+\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2013}(2016x)=1$$

$$\cancel{\sin^4(2016x)}+\cos^{2017}\underbrace{2025x}_{\alpha}\cdot\cos^{2013}\underbrace{2016x}_{\beta}=\cancel{\sin^4(2016x)}+\cos^4\underbrace{(2016x)}_{\alpha}$$

$$\cos^{2017}\alpha\,\cos^{2013}\beta=\cos^4\alpha$$

(1) $\cos 2025x=0;$



$2025x\in\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$

$\cancel{x\in\frac{\frac{\pi}{2}+\pi n}{2025}}$

$$\boxed{x\in\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cdot\frac{1}{2025}\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}}$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0\\ \cos^{2017}\alpha\cos^{2013}\beta\,\cancel{=}-\cos^4\alpha=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0\\ \cos^4\alpha(\cos^{2013}\alpha\cos^{2013}\beta-1)=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0\quad(1)\\ \cos^{2013}\alpha\cos^{2013}\beta=1\,(2)\end{array}\right.$$

(2)

$$\cos^{2013}(2025x)\cdot\cos^{2013}(2016x)=1$$

(*) $\cos x\in[-1;1]$, если $\cos a\cdot\cos b=1$, то $\left\{\begin{array}{l}\cos a=1\\ \cos b=1\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\cos a=-1\\ \cos b=-1\end{array}\right.$

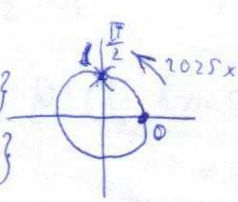
$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\cos^{2013}(2025x)=1\ (1)\\ \cos^{2013}(2016x)=1\ (2)\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\cos^{2013}(2025x)=-1\ (3)\\ \cos^{2013}(2016x)=-1\ (4)\end{array}\right.\ \emptyset\end{array}\right.$$

(*) Т.к. степень четная выполнение равенства (4) невозможно

$$\left\{\begin{array}{l}\cos^{2013}(2025x)=1\\ \cos^{2013}(2016x)=1\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}\cos(2025x)=1\ (2.1)\\ \left[\begin{array}{l}\cos(2016x)=1\\ \cos(2016x)=-1\end{array}\right.(2.2)\end{array}\right.$$

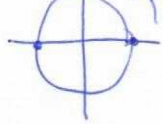
(2.1) $2025x\in\left\{2\pi n\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$

$x\in\left\{\frac{2\pi n}{2025}\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$



(2.2) $2016x\in\left\{\pi n\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$

$x\in\left\{\frac{\pi n}{2016}\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$



$$\left[\begin{array}{l}\cos(2025x)=0\\ \left\{\begin{array}{l}\cos(2025x)=1\\ \left[\begin{array}{l}\cos(2016x)=1\\ \cos(2016x)=-1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x\in\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cdot\frac{1}{2025}\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}\\ x\in\left\{\frac{2\pi k}{9}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\end{array}\right.$$

12

(2.1)+(2.2): $\left\{\begin{array}{l}x\in\left\{\frac{2\pi n}{2025}\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}\\ x\in\left\{\frac{\pi n}{2016}\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}\end{array}\right.$

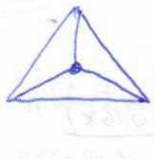
$\boxed{x\in\left\{\frac{2\pi n}{9}\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}}$ $\frac{2\pi n}{2025};\ \frac{2\pi n}{4032}$

$2025=225\cdot 9$
$2016=224\cdot 9$
$4032=448\cdot 9$

Ответ: $\cancel{\mathbb{Z}}$

$$x\in\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cdot\frac{1}{2025};\ \frac{2\pi k}{9}\,\middle|\,n,k\in\mathbb{Z}\right\}$$

№1



Пусть стекляшко имеет вид $\overline{xyz}$ где $\left[\begin{array}{l} x,y,z \in \{1\} \\ x,y,z \in \{0\} \end{array}\right.$, $\{1\}$ - закрашено, $\{0\}$ - нет.

То есть $\begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$ подобная комбинаци - нам не подходи

$\begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$ - подобная подходит

В нашей ~~А~~ посл-ти обязательно хотя бы 1 раз должны встретиться стекляшки типа 100, 010, $\overline{001}$, оставшиеся две ячейки не имеют значения. Значит, найдя сколькими способами можно расположи три ячейки и умножив это число на 9 (кол-во варианто для оставшихся двух ячеек), мы получим ответ.

~~Пускай~~ Пусть 100 = [a]
010 = b
001 = c

1) [a] стоит на первом месте:
2) [b] стоит на первом месте - 12 вариантов аналогично
3) [c] стоит на первом месте: 12 вариантов

a a a a a a a a a
b b b : : c : : c :
: c c b b b : c : :
: c : : c : b b b c
c : : c : : c : : b

$\underbrace{\qquad\qquad}_{12 \text{ вариантов}}$

Всего: $36 \cdot 9 = 9 \cdot 9 \cdot 4 = 9 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2 = 18^2 = 324$

3

$\boxed{\text{Ответ: } 324}$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

111032

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

№6

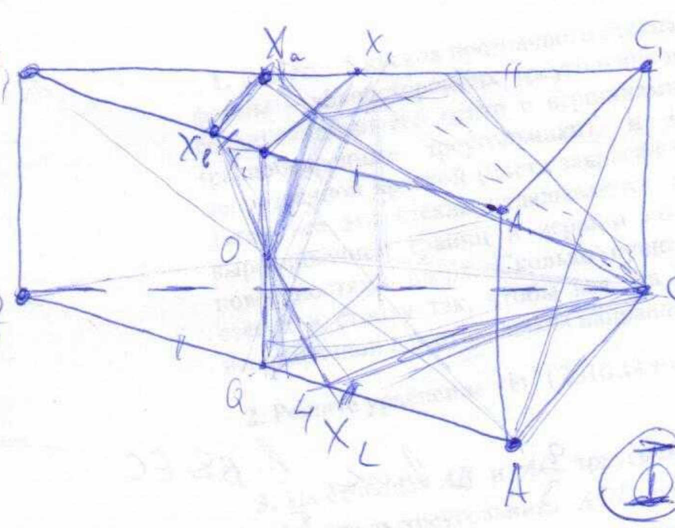
Дано: $ABCA_1B_1C_1$ - прав. треуг. призма

плоскость $(\alpha) \parallel (AC_1)$, $\{C\} \in (\alpha)$,

$\{O\} = (A_1B) \cap (AB_1)$ $\{O\} \in (\alpha)$

$S_\alpha = \frac{9}{\sqrt{5}}$, $|AB| = 4$

Найти: $\frac{V_1}{V_2}$ V_1 - ? V_2 - ?



Решение:

I Построение

$\triangle A_1B_1C_1$: $[X_1X_2]$ - ср. линия $(X_1X_2) \parallel (AC_1)$ ~~$\{Q\} \in [AB]$~~ $(OQ) \perp (AB)$ $(OX_1) \subset \alpha$ ① $(CO) \subset \alpha$ $(OX_1) \parallel (AC_1)$?

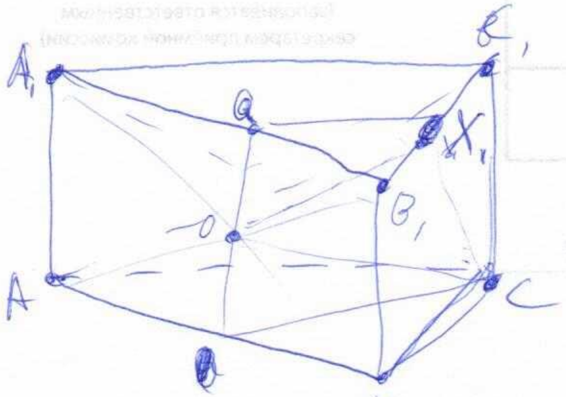
$\triangle A_1B_1C_1$: $[X_1X_2]$ - ср. лин

На $[B_1C_1]$ сущ. $\{X_a\} \in \alpha$, $(X_aX_b) \parallel (A_1C_1)$, $[X_bO] \cap (AB) = \{X_c\}$

$(C\ X_a\ X_b\ X_c) = \alpha$

II Вычисления $S_{C X_a X_b X_c} = \frac{9}{\sqrt{5}}$

0



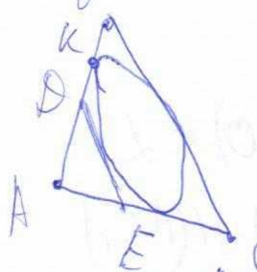
Построение:

~~CQ~~ $\{Q\}$ – проекция $\{O\}$ на (A_1B_1)

$(OX_1) \parallel (A_1C_1)$

$(QX_1) \parallel (A_1C_1)$

№3



Дано: $S_{\triangle ADE} = \frac{8}{3}$, ω впис. в $BDEC$

$\omega \cap (AB) = \{K\}$

$|AK| = 4$, $|BC| = 6$

Найти $\operatorname{tg}\angle BAC = \operatorname{tg}\varphi$ – ?

Пояснение: $BDEC$ – трапеция

р/б — откуда р/б?

$\triangle ABC$ – р/б

(AH) - высота

$S_{BDEC} = \frac{24}{3} = 8 = pr = (|ED| + |CB|) \cdot r$

~~$\frac{1}{2}(\ldots)$~~ $|EC| + |DB| = |ED| + |CB|$

$BC = 6 \Rightarrow ED = 3$

$|BC| = 6 \Rightarrow |BH| = 3$

$r^2 + 16 = \frac{2}{3}|CH|$

$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{4} = \frac{8}{4p} = \frac{2}{p} = \frac{2}{9}$

$\frac{\sin\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}$ $|CH| =$

$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{|BH|}{|CH|}$

3

Не успел (...