Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 111422
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Черных Валерий Павлович

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, ГБОУ школа №1571 11 „А"

Регистрационный номер ШМ 4151

Вариант задания 18

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника

Σ = 60 (шестьдесят)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
3	6	16	20	0	15					60

111422

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

422

Вариант № 18

№1

① Посчитаем, сколько всего способов укладки есть.

Неважно, как мы положим 1 стекло, ведь на данном этапе все зависит только от угла зрения.

3

Далее кладем 4 плитки, каждую 4 разными вариантами, итого:

$4^4 = 256$ вариантов $\cdot 5! =$

② Условию задачи не удовлетворяет единственный случай, когда все стекла лягут закрашенными частями друг на друга, тогда:

$N = 256 - 1 = 255$

Ответ: 255 способов

№2

$$\sin^4(2022x) + \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2018}(2022x) = 1;$$

$$\left(1-\cos^2(2022x)\right)^2 + \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2018}(2022x) = 1;$$

$$\cancel{1} - 2\cos^2(2022x) + \cos^4(2022x) + \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2018}(2022x) = \cancel{1}$$

$$\left(\cos^2(2022x)\right)\left(\cos^2(2022x) + \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x) - 2\right) =$$

$$\left[\begin{array}{l} \left(\cos^2(2022x)\right) = 0, \quad (\mathrm{I}) \\ \cos^2(2022x) + \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x) = 2 \quad (\mathrm{II}) \end{array}\right.$$

(при этом 2-е ур-ие не должно терять смысл)

Из (I) имеем, что:

$2022x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$

$x = \frac{\pi}{4044} + \frac{\pi n}{2022},\ n \in \mathbb{Z},$

Из (II):

$$\begin{cases} \cos^2(2022x) + \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x) = 2; \\ -1 \le \cos(2022x) \le 1; \\ -1 \le \cos(2019x) \le 1; \end{cases}$$

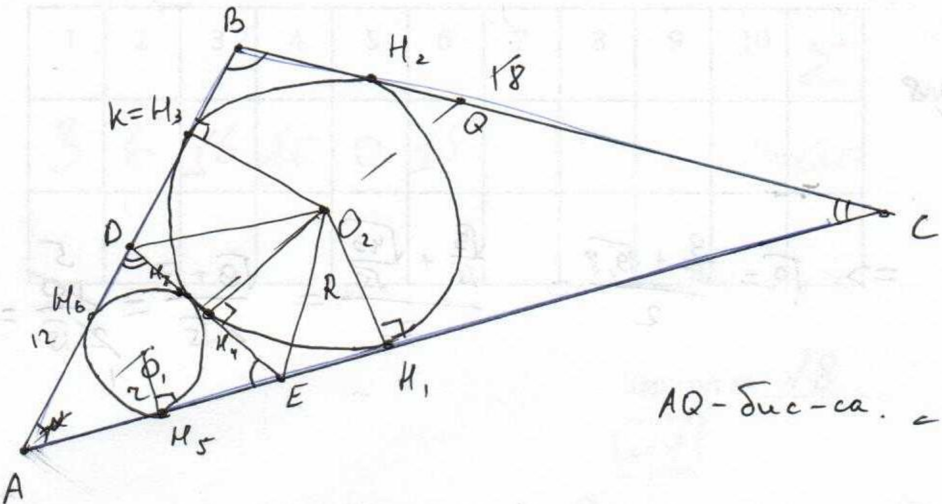
Логично заключить, что:

$$\begin{cases} \cos^2(2022x) = 1 \\ \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2(2022x) = 1 & (1) \\ \cos^{2017}(2019x) = 1 & (2) \\ \cos^{2016}(2022x) = 1 & (3) \end{cases}$$

Одновременно условие (2) и (3) выполняться не могут, поскольку у функции (cos) разные аргументы, а, следовательно, при данном условии и корней быть не может.

Ответ: $\frac{\pi}{4044} + \frac{\pi n}{2022},\ n \in \mathbb{Z}.$

№3



AQ - бис-са. ∠ABC

① По условию, вокруг DBCE можно описать окр-ть, следовательно:

$$\left.\begin{aligned} \angle DBC + \angle DEC = 180^\circ \\ \angle DEC + \angle DEA = 180^\circ \end{aligned}\right| \Rightarrow \angle DBC = \angle DEA$$

Аналогичным образом получаем, что $\angle ADE = \angle ACB$

② $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ по двум углам

16

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{DE^2}{BC^2} = \frac{p_1 \cdot r}{p_2 \cdot R}$$

$$\frac{DE^2}{18^2} = \frac{24}{(12+18)\cdot R} \qquad \left(p_2 = \frac{AB+BC+AC}{2} = AH_3 + BH_2 + CH_2 = 18 + 12 = 30 \right)$$

$$DE^2 = \frac{\overset{4}{\cancel{24}} \cdot 18^2}{\underset{5}{\cancel{30}} \cdot R}$$

$$DE = \frac{36}{\sqrt{5R}}$$

Отрезки кас-ных, проведенных к данной окр-ти из 1 точки, равны.

③ $S_{AH_3O_2H_1} = 2 \cdot S_{AH_3O_2} = 2 \cdot \frac{12 \cdot R}{2} = \underline{12R} = S_{ADE} + 2S_{DO_2H_4} + 2S_{EO_2H_4} =$

$= 24 + 2\left(S_{DO_2E}\right) = 24 + 2 \cdot DE \cdot \frac{R}{2} = 24 + \underline{\frac{36}{\sqrt{5R}} \cdot R};$

$12R = 24 + \frac{36\sqrt{R}}{\sqrt{5}}$,

$$R - \frac{3\sqrt{R}}{\sqrt{5}} - 2 = 0$$

$$D = \frac{9}{5} + 8 = 9{,}8$$

$$\begin{cases} \sqrt{R} = \dfrac{\frac{3}{\sqrt{5}} \pm \sqrt{9{,}8}}{2} \\ R > 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{R} = \frac{\frac{3}{\sqrt{5}} + \sqrt{9{,}8}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{9}+7}{2\sqrt{5}} = \frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{2}_{\,1}\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$R = 5$.

(4). $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{AH_1}$ (из пр-го $\triangle O_2H_1A$) (AO_2 − бис-са $\angle ABC$)

$(AH_1 = AK_3 = AK)$

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{12}$

$$tg\alpha = \frac{tg\frac{\alpha}{2} + tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{144-25}{144}} = \frac{5\cdot \cancel{144}^{\,24}}{\cancel{6}_{\,1}\cdot 119} = \frac{120}{119}$$

Ответ: $\frac{120}{119}$ V

$\boxed{№4}$

$$\frac{3}{4}g\left(\frac{g(x)}{2}\right) + \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} \geq 19g\left(g^3(x)\right); \quad g(x) = \frac{4}{x^2-4x+6} = \frac{4}{(x-2)^2+2}$$

ОДЗ: $\sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} \geq 0$;

$g(x) \geq 0$

$\sqrt{2}\sqrt{\frac{g(x)-1}{g(x)}} \geq 0$;

$\frac{g(x)-1}{g(x)} \geq 0$; $\quad + \; 0 \; - \; 1 \; + \quad g(x)$

20

$g(x) \geq 1$;

$\frac{4}{(x-2)^2+2} \geq 1$;

$\frac{4 - x^2 + 4x - 6}{(x-2)^2+2} \geq 0$;

$\frac{-(x^2-4x+2)}{(x-2)^2+2} \geq 0$;

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 111422

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 18

$$\frac{-(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})}{(x-2)^2+2} \geq 0,$$

$$\frac{(x-(2+\sqrt{2}))(x-(2-\sqrt{2}))}{(x-2)^2+2} \leq 0 \qquad \underset{2-\sqrt{2}}{+} \quad - \quad \underset{2+\sqrt{2}}{+} \; x$$

Если x принимает значение от $2-\sqrt{2}$ до $2+\sqrt{2}$, то $g(x)$ принимает значение от 1 до 2.

Рассмотрим min и max $g(x)$:

① min. $g(x) = 1$ $\left[\begin{array}{l} x = 2-\sqrt{2} \\ x = 2+\sqrt{2} \end{array}\right.$

$$\frac{3}{\cancel{4}} \cdot \frac{x}{4{,}25} \ngeq 19 \cdot \frac{4}{3} \quad (\text{неравенство не выполнено})$$

② max. $g(x) = 2$ $(x = 2)$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} + \sqrt{1} \geq \cancel{19} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{38}}$$

$2 \geq 2$ (неравенство выполнено)

Если $g(x)$ непрерывна ~~при~~ и монотонно возрастает от 1 до 2 при движении x от $2-\sqrt{2}$ до 2 и, соответственно, убывает, если x от $2 \to 2+\sqrt{2}$, то все слагаемые неравенства будут так же возрастать и убывать.

Только в точке своего максимума $g(x)$ обращает неравенство в верное, а, значит эта точка будет единственным решением:

$g(x)=2$

$x=2$

Ответ: ~~x=2~~ $\{2\}$ V

$\boxed{№6}$

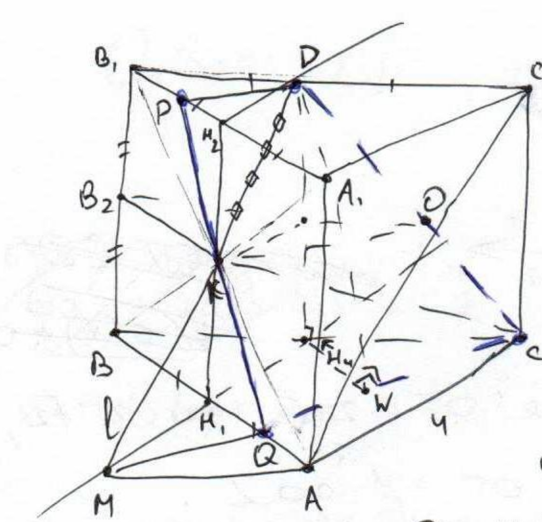
Ход построения:

① Ось симметрии ABB_1A – K – точка пересечения диагоналей.

② Через K должна пройти прямая пар-льная AC_1, лежащая в пл-ти сечения.

③ $(H_1H_2D) \parallel (AA_1C_1)$

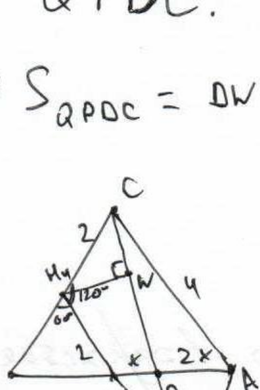
④ $l \parallel AC_1$, $l \subset (H_1H_2D)$, построим её через точку K (KD).



⑤ MC – след секущей пл-ти на пл-ти основания (ABC)

⑥ Имея всё необходимое, строим секущую плоскость по точкам: $QPDC$. Данная фигура – трапеция. $DW \perp QC$, DW – высота тр-ии, $H_4W \perp MC$ (по Т. о 3 перп.)

⑦ $S_{QPDC} = DW \cdot KO$ KO – ср. линия



⑧ См. выносной чертеж.

$\triangle CQA \sim \triangle MQH_1$,

$\frac{H_1Q}{QA} = \frac{H_1M}{CA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

⑨ $CM^2 = 4 + 16 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot \cos 120°$ (Т. косинусов)

$CM^2 = 20 + 8$

$CM = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

(10) $S_{H_4CM} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{H_4W \cdot CM}{2}$

$8 \cdot \sin 120^\circ = h \cdot 2\sqrt{7}$

$\cancel{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = h \sqrt{7}$ $\quad \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2} = h \cdot \sqrt{7}$

$h = 4\sqrt{\frac{3}{7}}$ $\quad h = 2\sqrt{\frac{3}{7}}$

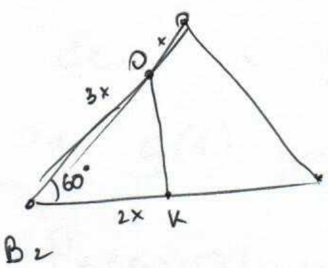
(11) Пусть H - высота ~~трапеции~~ призмы, тогда

$DW^2 = DH_4^2 + H_4W^2$;

$DW^2 = H^2 + \frac{12}{7}$;

$DW = \sqrt{H^2 + \frac{12}{7}}$.

(12) КО - ср. линия тр. QPDC



$KO^2 = 9 + 4 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 13 - 6 = 7$

$KO = \sqrt{7}$

$S_{QPDC} = KO \cdot DW = \sqrt{7} \cdot \sqrt{H^2 + \frac{12}{7}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$ (по усл.)

(13) $7\left(H^2 + \frac{12}{7}\right) = \frac{144}{5}$

$35H^2 + 5 \cdot 12 = 12 \cdot 12$

$35H^2 = 7 \cdot 12$

$H^2 = \frac{12}{5}$

$H = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ ✓

(14) Плоскость сечения делит данную призму на 2 части:

$BCQB_1DP$ и $QCAPDC_1A$

$V_1 = \frac{S_1 + S_2}{2} \cdot H$ $\quad V_2 = \frac{S_3 + S_4}{2} \cdot H$

15 $V_1 = \frac{S_{BCQ} + S_{B_1DP}}{2} \cdot H =$?

$= \frac{\frac{16\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

~~$V_2 = S_{QCA} + S_{PDC_1A}$~~

$V_2 = V_{np} - V_1 = S_{осн}\cdot H - V_1 = \frac{16\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} = \frac{24}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} =$

$= \frac{24\sqrt{5}}{5} - 2\sqrt{5} = 2{,}8\sqrt{5}$

Ответ: $2\sqrt{5}$; $2{,}8\sqrt{5}$

$\boxed{N5}$

$6a + 2ab\,tgx + 2\sqrt{2(x + |x - 2b\,tgx| - 2b\,tgx)} = 10 + ax$

$x - 2b\,tg\,x = n$

$6a + 2\sqrt{2(n + |n|)} = 10 + a(n)$

I. $n > 0$

$6a + 4\sqrt{n} = 10 + an$

II. $n \leq 0$

$6a = 10 + an$

15

6