Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 111434

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Шлыков Константин Дмитриевич

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Одинцово, лицей №10

Регистрационный номер ШМ4106

Вариант задания 19

Дата проведения "11" марта 20 18 г.

Подпись участника

53 (пятьдесят три)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	9	16	20.	–	5					53

111434

Шифр ____________

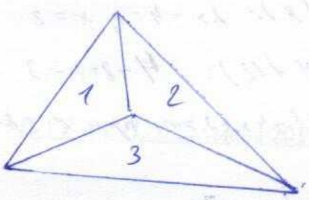
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

111434

134

Вариант № 19

№ 1



Пусть 1, 2, 3 – номера зон. Одна из зон закрашена. Чтобы стопка оказалась непрозрачной нужно, чтобы в стопке были хотя бы 3 треугольника с различными ~~зонами~~ номерами закрашенных частей. Тогда эти три треугольника можно расставить $\frac{5!}{2!}$ способами. ~~Остальные два треугольника можно расположить 3 способами, 2-ой – двумя 3^2 способами~~ 1-й из них можно повернуть 3 способами, 2-ой – двумя способами. Остальные два треугольника можно расположить 2! способами, а повернуть 3^2 способами.

Всего комбинаций: $\frac{5!}{2!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2! \cdot 3^2 = 120 \cdot 2 \cdot 3^3 = 27 \cdot 2 \cdot 120 = \boxed{54 \cdot 120 =}$
$= (540 + 108) \cdot 10 = 6480$

Ответ: 6480 – 3

№ 2

$\sin^4(2016x) + \cos^{2017}(2025x) \cdot \cos^{2018}(2016x) = 1$

$\cos^{2017}(2025x) \cdot \cos^{2018}(2016x) = (1 + \sin^2(2016x))(1 - \sin^2(2016x))$

$\cos^{2017}(2025x) \cdot \cos^{2018}(2016x) = (2 - \cos^2(2016x))(\cos^2 2016x)$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2016x = 0 \\ \cos^2(2016x) + \cos^{2017}(2025x) \cdot \cos^{2016}(2016x) = 2 \end{array} \right.$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2016x = 0 \\ \begin{cases} \cos^2 2016x = 1 \\ \cos^{2017}(2025x) = 1 \end{cases} \end{array} \right.$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2016x = 0 \\ \begin{cases} \cos 2016x = \pm 1 \\ \cos 2025x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$

$\left[\begin{array}{l} x \cdot 2016 = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \begin{cases} x \cdot 2016 = \pi k \\ x \cdot 2025 = 2\pi l \end{cases} \end{array} \right. , n, k, l \in Z$

$$\left[\begin{array}{l} 2016x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2016} \\ x = \frac{2\pi t}{2025} \end{cases} \end{array}\right. \quad 2 = x \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4032} + \frac{\pi n}{2016} \\ x = 2\pi k \end{array}\right., \ n, k \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4032} + \frac{\pi n}{2016}$; $2\pi k$, $n, k \in Z$

9

9

№ 4

$$\frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) + \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} \geq 13 g(g^3(x)),\ g(x) = \frac{6}{x^2 - 4x + 7}$$

$f(x) = x^2 - 4x + 7$

$f'(x) = 2x - 4 = 0,\ x = 2$

$f(2) = 4 - 8 + 7 = 3$

$x^2 - 4x + 7 > 0$ при $x \in R$, т.к. $D < 0$

$E(g(x)) = (0; 2]$

$E\left(\frac{g(x)}{2}\right) = (0; 1]$

$E\left(g\left(\frac{g(x)}{2}\right)\right) = \left[\frac{6}{7}; \frac{3}{2}\right]$

$E\left(\frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{2}\right)\right) = \left[\frac{4}{7}; 1\right]$

$E(g^3(x)) = (0; 8]$

$E(g(g^3(x))) = \left[\frac{2}{13}; \frac{6}{7}\right)$!?

$E(13g(g^3(x))) = \left[2; \frac{26}{7}\right)$?

$E\left(\frac{2}{g(x)}\right) = [1; +\infty)$

$E\left(-\frac{2}{g(x)}\right) = (-\infty; 1]$

$E\left(2 - \frac{2}{g(x)}\right) = (-\infty; 1]$

$E\left(\sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}}\right) = [0; 1]$

$E\left(\frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) + \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}}\right) = \left[\frac{4}{7}; 2\right]$?

$\frac{g(x)}{2} = z \in (0; 1]$

$\frac{2}{3} g(z) + \sqrt{2 - \frac{1}{z}}$

$z \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

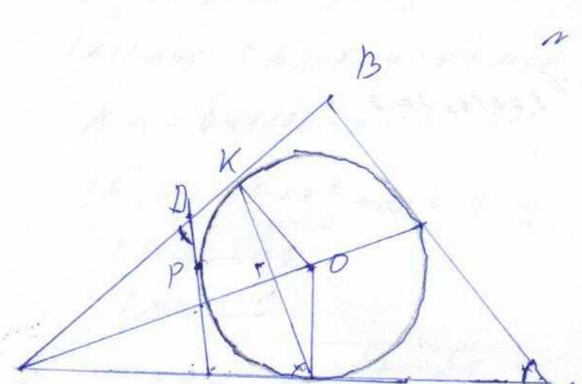
$\frac{2}{3} g\left(\frac{1}{2}\right) + 0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{\frac{1}{4} - 2 + 7} = \frac{4}{\frac{21}{4}} = \frac{16}{2...}$

Максимальное значение левой части равно минимальному значению правой => неравенство выполняется только в том случае, если левая часть достигает максимального значения. Это возможно при $x = 2$

Ответ: 2

20.

№ 3



Дано: $AK = 4$, $BC = 6$

$S_{ADE} = \frac{8}{3}$

Найти $tg \angle BAC$

Решение

Проведём радиус OM к AC

$KB + MC = BC = 6$

$AM = AK = 4$

$AB + AC = KM + MC + AK + AM = 6 + 4 + 4 = 14$

$P_{ABC} = 14 + 6 = 20$

AO - биссектриса

$tg\angle\frac{A}{2} = \frac{KO}{AK}$

Пусть $KO = r$, тогда $tg\angle\frac{A}{2} = \frac{r}{4} = \frac{2S_{ABC}}{4\cdot P} = \frac{S_{ABC}}{2p} = \frac{S_{ABC}}{40}$

Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle DEC = 180 - \alpha$ т.к около DBCE можно описать окружность

$\angle AED = \alpha \Rightarrow \angle AED = \angle ABC$

Аналогично получаем, что $\angle ADE = \angle ACB$ $\Big| \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2$

$S_{ABC} = \frac{S_{ADE}\cdot BC^2}{DE^2} = \frac{\frac{8}{3}\cdot 36}{DE^2} = \frac{8\cdot 12}{DE^2}$

$P_{ABC} = AD + DB + BC + AE + EC = 20$

$P_{ABC} = (AE + AD + DE) + DB + BC + EC = 20 + DE$

$P_{ADE} + (DB + EC) + BC = DE + 20$

$P_{ADE} + BC + DE + BC = DE + 20$

$P_{ADE} = 20 - 2BC = 20 - 12 = 8$

$\frac{DE}{BC} = \frac{P_{ADE}}{P_{ABC}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

$DE = \frac{12}{5}$

$tg\angle\frac{A}{2} = S_{ABC} = \frac{8\cdot 12\cdot 25}{12^2} = \frac{8\cdot 25}{12} = \frac{50}{3}$

$tg\angle\frac{A}{2} = \frac{50}{3\cdot 40} = \frac{5}{12} = \frac{KO}{AK}$

$KO = \frac{5\cdot 4}{12} = \frac{5}{3}$

$AO = \sqrt{16 + \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{169}{9}} = \frac{13}{3}$

$\sin\angle\frac{A}{2} = \frac{KO}{AO} = \frac{5\cdot 3}{3\cdot 13} = \frac{5}{13}$

$\cos\angle\frac{A}{2} = \frac{4\cdot 3}{13} = \frac{12}{13}$

$\sin\angle A = 2\cdot\frac{12\cdot 5}{13^2} = \frac{24\cdot 5}{13^2}$

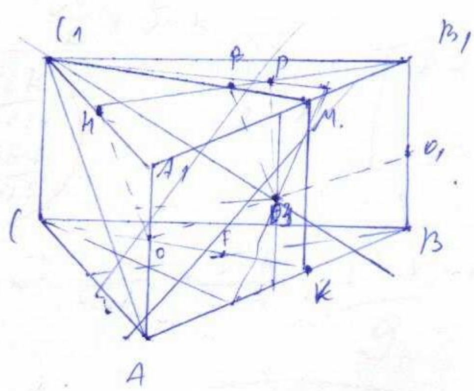
$\cos\angle A = \frac{144 - 25}{13^2} = \frac{119}{13^2}$

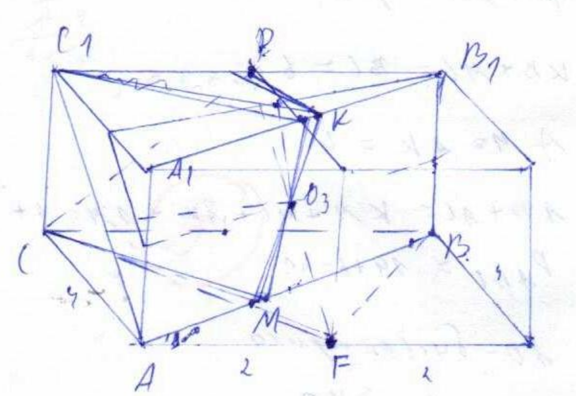
$tg\angle A = \frac{24\cdot 5}{119} = \frac{120}{119}$

Ответ: $\frac{120}{119}$

16

№6





Решение

Проведём НО || AC_1

HB_1 - высота

Проведём OO_1 || HB_1. OO_1 пройдёт через центр симметрии AA_1B_1B.

Проведём через центры HB_1 и OO_1 прямую PE || OH

Проведём C_1M через C_1P. Проведём CK || C_1M

Сечение C_1MKC - искомое

Сделаем параллельный перенос прямой HO таким образом, чтобы она прошла через O_3 - центр симметрии AA_1B_1B. Для этого опустим проекцию из точки O_3 на AA_1C_1C. O_3P - прямая, полученная в результате этого переноса.

Проведём через точку P прямую C_1M, а потом прямую MK, которая проходит через O_3. Сечение CC_1MK - искомое

AF = 2

$CF = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

Достроим призму до четырёхугольной

Проведём прямую PF || AC_1 таким образом, чтобы $O_3 \in PF$

Проведём CF, CF пересечёт AB в точке M

Проведём MO_3. MO_3 пересечёт A_1B_1 в т. K

Сечение CMKP - искомое.

AM - биссектриса. $\frac{CM}{MF} = 2$ +.

$CF^2 = 16^2 + 4^2 + 2\cdot 2\cdot 4\cdot \frac{1}{2} = 20 + 8 = 28$

$CF = 2\sqrt{7}$

$CM = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

$AM = \sqrt{8 - \frac{2\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}} = \sqrt{8 - \frac{7\cdot 2}{9}} = \sqrt{\frac{72-14}{9}} = \sqrt{\frac{58}{9}} = \frac{\sqrt{58}}{3}$ ⊖.

$KB_1 = \frac{\sqrt{58}}{3}$

$C_1P = 4 - \frac{\sqrt{58}}{3}$

16