Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

111486

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Анисимова Екатерина Игоревна

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, лицей 1580

Регистрационный номер ШМ5242

Вариант задания 18

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника

$\Sigma = 60$ (шестьдесят) ким-

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
0	9	16	20	10	5					60

111486

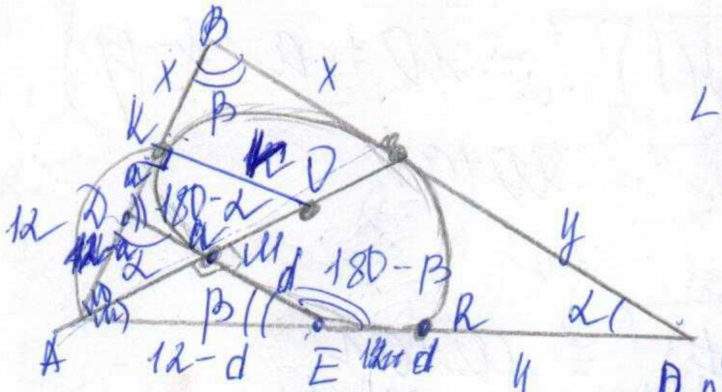
Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

486

Вариант № 18

№3



$ABCE$ – вписанный ч-к $\Rightarrow$

$\angle BCE + \angle BDE = 180$

$\angle DBC + \angle DEC = 180$

$KD = DM = a \Rightarrow AD = 12 - a$

$AK = AR$ – касат. из 1 точки

$AE = 12 - d \quad ER = EM = d$

$p_{\triangle ADE} = \frac{12-d+12-a+a+d}{2} = 12$

$P_{\triangle ABC} = 12 + x + \underbrace{x + y}_{18} + y + 12 = 12 + 18 + 18 + 12 = 60$

$p_{\triangle ABC} = 30$

$\triangle AED \sim \triangle ABC$ ($\angle ADE = 180 - \angle BDE = \angle ABC$; $\angle BAC$ – общий)

$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{P_{\triangle AED}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

$\frac{ED}{BC} = \frac{2}{5}; \quad \frac{ED}{18} = \frac{2}{5} \Rightarrow ED = \frac{36}{5} = 7{,}2$

$r = \frac{S_{\triangle ADE}}{p_{\triangle ADE} - DE} = \frac{24}{12 - 7{,}2} = \frac{24}{4{,}8} = 5$

AO – бис-са; OK – радиус, $\angle OKA = 90^\circ$

$\operatorname{tg}\angle KAO = \frac{OK}{AK} = \frac{5}{12}$

$\operatorname{tg}\angle BAC = \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \cancel{\frac{10}{24}\left(1 - \frac{25}{12}\right)} = \cancel{\frac{10}{24} \cdot \frac{12}{7}} = \cancel{\frac{10}{14}}$

$= \frac{10}{12} \cdot \frac{1}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{10 \cdot 144^{12}}{\cancel{12} \cdot 119} = \frac{120}{119}$

Ответ: $\frac{120}{119}$

16

№5

$6a+2ab\,tgx+2\sqrt{2(x+|x-2b\cdot tgx|-2b\,tgx)}=$
$=10+ax$

$2b\,tgx=y$

$6a+ay+2\sqrt{2(x+|x-y|-y)}=10+ax$

$6a+2\sqrt{2(x-y+|x-y|)}=10+ax-ay$

$x-y=x-2b\,tgx=t$

$6a+2\sqrt{2(x-y+|x-y|)}=10+a(x-y)$

$6a+2\sqrt{2(t+|t|)}=10+at$

1) $t\geq 0$

$6a+2\sqrt{2(t+t)}=10+at$

$6a+2\sqrt{4t}=10+at$

$6a+4\sqrt{t}=10+at$

$at-4\sqrt{2}+10-6a=0$

$\sqrt{t}=z$

$az^2-4z+10-6a=0$

$D/4=2(3a-2)(a-1)=2(3a^2-3a-2a+2)=$

$=6a^2-10a+4$

$f(0)=10-6a$

$$z=\frac{2\pm\sqrt{6a^2-10a+4}}{a}$$

① $a=0$

$-4z+10=0 \qquad z=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

$t=\frac{25}{4}$

$x-2b y x=\frac{25}{4}$

$x=\frac{25}{4}+\cancel{2b y x}\ 2b y x$

$b=0;\ x=\frac{25}{4};\ a=0$

$a\neq 0$

$\boxed{1}$ $D=0$

$z_0\geq 0$

$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a=\frac{2}{3}\\ a=1\end{array}\right.\\ a\geq 0\end{array}\right.$ $\Rightarrow a=\frac{2}{3} \Rightarrow z=\left(2+\sqrt{26\cdot\frac{4}{9}-10\cdot\frac{2}{3}+4}\right):3=3$

$\underline{x=9}$

$a=1 \quad z=\frac{2+\sqrt{6-10+4}}{1}=2$

$\underline{x=4}$

нет да

$\boxed{2}$ $f(0)\cdot a<0$

$(10-6a)\cdot a<0$

$a=\frac{5}{3}$

$a\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$

$z=\frac{2+\sqrt{6a^2-10a+4}}{a}$

$t=\left(\frac{2+\sqrt{6a^2-10a+4}}{a}\right)^2$

$b=0;\ x=\left(\frac{2+\sqrt{6a^2-10a+4}}{a}\right)^2$

$\boxed{3}$ допустим, $f(0)=0$

$a=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

$z_0=\frac{6}{5}\Rightarrow$

2 решения

$(z_1=0,\ z_2=2{,}4)$

?

?

2) $t<0$

$6a + 2\sqrt{2(t-t)} = 10 + at$

2 реш-я $x_{1,2} \neq 0$?

$6a = 10 + at$

$a = 0 - \varnothing$

$a \neq 0 \Rightarrow \frac{6a-10}{a} < 0 \quad a \in \left(0, \frac{5}{3}\right)$

$x - 2btgx = \frac{6a-10}{a}$

$x = \frac{6a-10}{a} + 2btgx$

$b = 0 \quad a \in \left(0; \frac{5}{3}\right) \quad x = \frac{6a-10}{a}$

Ответ: $a = \frac{2}{3};\ b = 0;\ x = 0$

$a = 1;\ b = 0;\ x = 4$

$a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right);\ b = 0;\ x = \frac{2 + \sqrt{6a^2 - 10a}}{a}$

$a \in \left(0; \frac{5}{3}\right);\ b = 0;\ x = \frac{6a-10}{a}$

№ 4

$\frac{3}{4} lg\left(\frac{g(x)}{2}\right) + \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} \geq lg\left(g^3(x)\right)$

$g(x) = \frac{4}{x^2 - 4x + 6}$ → см. следующий чистовик

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 111486

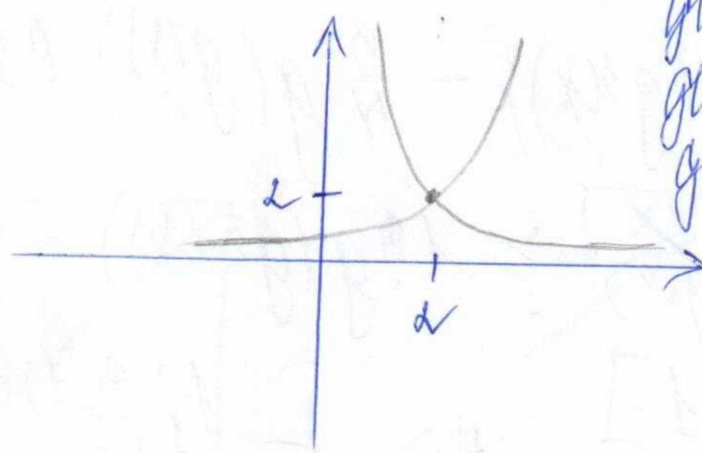
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 18

$y = x^2 - 4x + 6$

$x_0 = 2$

$y_0 = 4 - 8 + 6 = 2$



$g(8) = \frac{2}{19}$

$g(0) = \frac{2}{3}$

$g(1) = \frac{4}{3}$

$g(x) \in (0; 2]$

ОДЗ:

$2 - \frac{2}{g(x)} \geq 0$

$1 - \frac{1}{g(x)} \geq 0$

$\frac{g(x) - 1}{g(x)} \geq 0$

$\underline{g(x) \in [1; 2]}$

$\sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} \geq 19g(g^3(x)) - \frac{3}{4}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)$

$[0; 1]$

$g^3(x) \in (0; 8]$

$g(g^3(x)) \in [\frac{2}{19}; 2]$

$19g(g^3(x)) \in [2; 38]$

20

$\frac{g(x)}{2} \in [0;1]$

$g\left(\frac{g(x)}{2}\right) \in \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$

$\frac{3}{4} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

$-\frac{3}{4} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right)$

$19 g(g^3(x)) - \frac{3}{4} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) \in [1; 37{,}5)$

$$\underbrace{\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}}_{[0;1]} \geq \underbrace{19 g(g^3(x)) - \frac{3}{4} g\left(\frac{g(x)}{2}\right)}_{[1;\ 37{,}5)}$$

$\Downarrow$

возможно только равенство,

причем обе части $= 1$

$\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}} = 1$

$2-\frac{2}{g(x)} = 1$

$\frac{2}{g(x)} = 1$

$g(x) = 2$

$\frac{4}{x^2-4x+6} = 2$

$\frac{2}{x^2-4x+6} = 1$

$2 = x^2-4x+6$

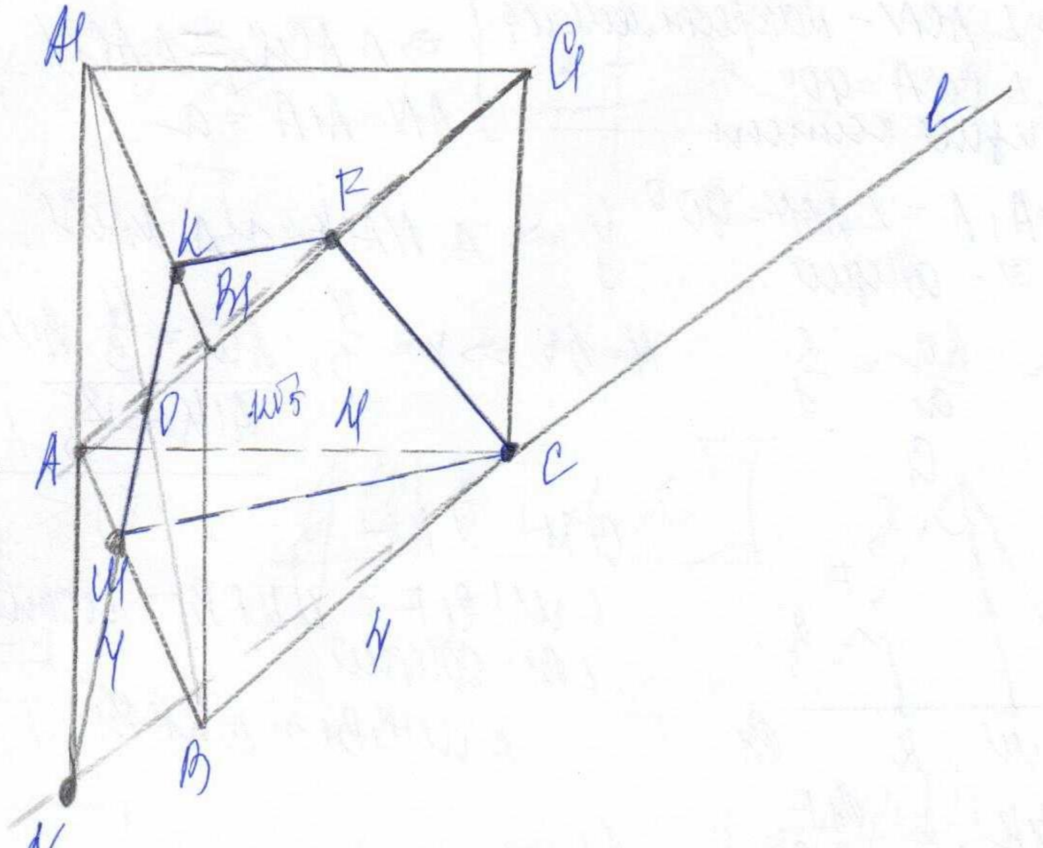
$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$x=2$

Отв: $x=2$

№6



Построение:

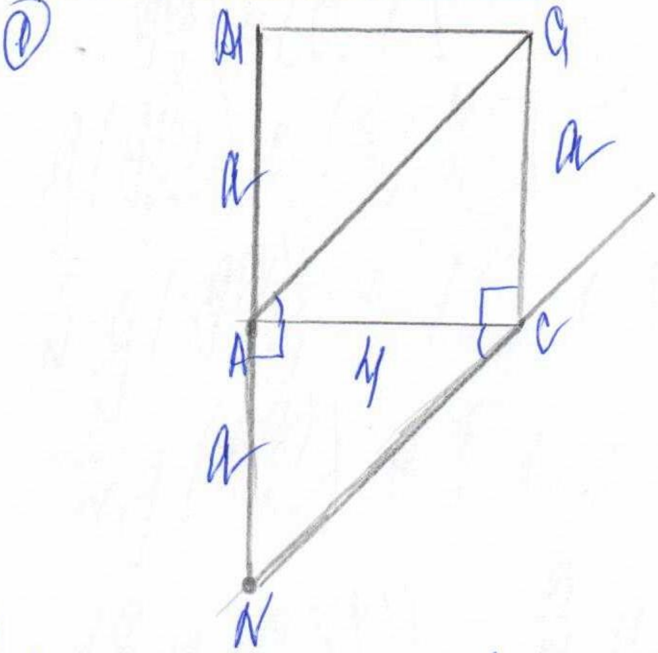
(AA_1C_1): $l \parallel AC_1$; $C \in l$; $l \cap AA_1 = N$

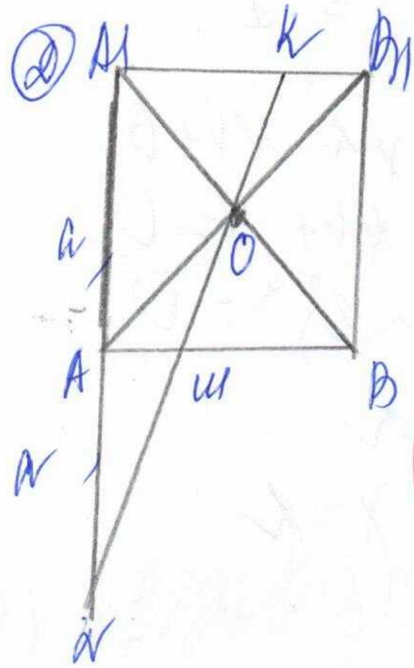
(AA_1B_1): $ND \cap AB_1 = K$; $ND \cap AB = M$

$(A_1B_1C_1)$: $KF \parallel MC$

(BB_1C_1): CF; $MKFC$ — искомое сечение

Рассчет новых точек





5

① $\angle C_1AC = \angle ACN$ — накрест лежащие

$\angle CAN = \angle C_1CA = 90°$

AC — общий катет

$\Rightarrow \Delta AC_1C = \Delta ACN$

$AN = A_1A = a$

② $\angle B_1A_1A = \angle BAN = 90°$

$\angle N$ — общий

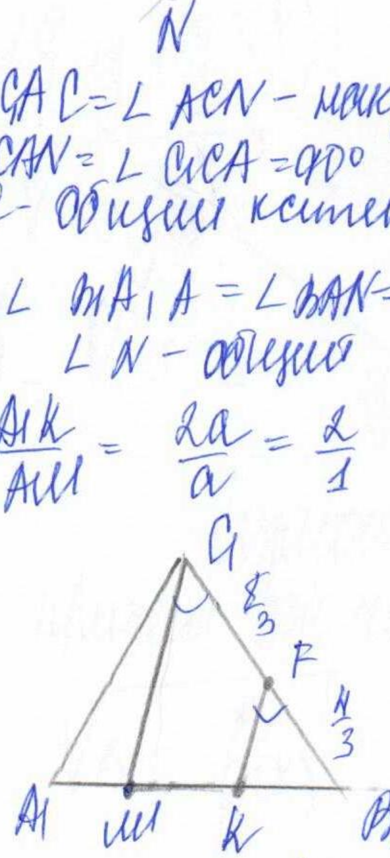
$\Rightarrow \Delta NA_1K \sim \Delta NAM$

$\frac{A_1K}{AM} = \frac{2a}{a} = \frac{2}{1}$

$m = 3x \Rightarrow x = \frac{m}{3}$; $AM = \frac{m}{3}$ $BM = \frac{8}{3}$

$A_1K = \frac{8}{3}$; $KB_1 = \frac{m}{3}$

③



$C_1M' \parallel KF$

$\angle M'C_1F = \angle KFB_1$ — соответств.

$\angle B_1$ — общий

$\Delta M'C_1B_1 \sim \Delta KFB_1$

$\frac{B_1K}{B_1M'} = \frac{B_1F}{B_1C_1}$

$\frac{m \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 8} = \frac{B_1F}{B_1C} = \frac{1}{2} \Rightarrow B_1F = \frac{m}{3}$; $FC_1 = \frac{8}{3}$

№ 2

$\sin^m(2022x) + \cos^{2017}(2019x) \cdot \cos^{2018}(2022x) = 1$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 111486

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 18

$\sin^4(2022x) = (\sin^2(2022x))^2 = (1-\cos^2(2022x))^2 =$

$= 1 - 2\cos^2(2022x) + \cos^4(2022x)$

$1 - 2\cos^2(2022x) + \cos^4(2022x) + \cos^{2017} 2019x \cdot$

$\cdot \cos^{2018}(2022x) = 1$

$\cos^2 2022x(\cos^2(2022x) + \cos^{2017}(2019x) \cdot \cos^{2016}(2022x)$

$-2) = 0$

$\cos^2 2022x = 0$

$\cos 2022x = 0$

$2022x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$x = \frac{\pi}{4044} + \frac{\pi}{2022} \cdot n,$

$n \in \mathbb{Z}$

$\cos^2(2022x) + \cos^{2017} 2019x \cdot \cos^{2016}(2022x) = 2$

1

1

всегда +

$\begin{cases} \cos^2 2022x = 1 \\ \cos^{2017}(2019x) = 1 \\ \cos^{2016}(2022x) = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2022x = 2\pi m, & m \in \mathbb{Z} \\ 2019x = 2\pi l, & l \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$x = \frac{2\pi}{2022} \cdot m$

$x = \frac{2\pi}{2019} \cdot l$

Отв. $x = \frac{\pi}{4044} + \frac{\pi}{2022} \cdot n,$ $n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{2\pi}{2022} \cdot m,\ m \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{2\pi}{2019} \cdot l,\ l \in \mathbb{Z}$

9

?

9

связь l, m?