Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+ 1 мист

111582

Шифр ____________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Стрельников Алексей Олегович

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Тверь, МОУ СОШ №14,

Регистрационный номер ШМ4517

Вариант задания 20

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника Стрельников

сорок шесть

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

111582

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
∅	12	4	20	10	∅					46

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

582

Вариант № 20

№4.

$g(x)$ – функция ограниченная, поскольку $g(x)=\frac{9}{(x^2-6x+12)}=\frac{9}{(x-3)^2+3}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(x-3)^2+3\geqslant 3 \Leftrightarrow 0<g(x)\leqslant 3$.

Кроме того, по ОДЗ неравенства $2-\frac{3}{g(x)}\geqslant 0$, т.е. $g(x)\geqslant\frac{3}{2}$.

Таким образом, $g(x)\in[\frac{3}{2};3]$ на ОДЗ неравенства.

Тогда $(\frac{g(x)}{3})\in[\frac{1}{2};1]$ $\Leftrightarrow$ $g(\frac{g(x)}{3})\in[\frac{36}{37};\frac{9}{7}]$.

$\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}$, очевидно, больше нуля, но меньше 1 (т.к. $\frac{3}{g(x)}\leqslant 1$), т.е. $\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}\in[0;1]$.

$g^2(x)\in[\frac{9}{4};9]$ $\Leftrightarrow$ $g(g^2(x))\in[\frac{3}{19};\frac{3}{13}]$.

Тогда $\frac{7}{9}g(\frac{g(x)}{3})+2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}\in[\frac{28}{37};3]$, а $13g(g^2(x))\in[\frac{39}{19};3]$

Заметим, что $\frac{7}{9}g(\frac{g(x)}{3})+2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}$ – функция ~~убывающая~~ возрастающая, а $g(g^2(x))$ – ~~возрастающая~~ убывающая $\Leftrightarrow$ единственное решение достигается в точке максимума $g(x)$ $\Leftrightarrow$ точка максимума $g(x)$ ~~достигается~~ при $(x-3)^2$ минимальном, т.е. при $x=3$. Следовательно, $x=3$.

(значение $\frac{7}{9}g(\frac{g(x)}{3})$ ~~во много раз~~ меньше $2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}$ в большое кол-во раз, поэтому $\frac{7}{9}g(\frac{g(x)}{3})+2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}$ – возрастающая).

Ответ: $x=3$.

20

№1.

По всей видимости, искомая раскраска разукрашиваемых стенок такая, что хотя бы одна из частей всех ~~каждого~~ треугольников должна остаться незакрашенной.

Первый треугольник раскрашиваем произвольно, а значит количество вариантов умножаем на 3.

Без учёта верхнего треугольника, всего существует $3^4=81$ способов раскрашивания этих треугольников. При этом $\frac{2}{3}$ каждых возможных вариантов „удачные", т.е. оставят хотя бы одну стенку незакрашенной.

При этом, если хоть один треугольник располагается в одной из „узких" частей, то тогда лишь одна из „частей" становится узкой. Иными словами, все ~~части~~ закрашенные части должны располагаться где угодно, кроме „узкой" части. Таких вариантов существует 2 для каждого треугольника, а для всей строки $2^4 = 16$.
Значит, всего способов такой укладки $16 \cdot 3 = 48$. $(32-1) \cdot 5!$

Ответ: ~~48~~. 0

№5.

$$2a - ab\,ctg\,x + 2\sqrt{2(x + |x + b\,ctg\,x| + b\,ctg\,x)} = 6 + ax.$$

1. Пусть $x + b\,ctg\,x \le 0$. В таком случае уравнение примет вид

$2a - ab\,ctg\,x = 6 + ax$. Т.к. $a \ne 0$, то сократим на него

$2 - b\,ctg\,x = \frac{6}{a} + x$, или же $b\,ctg\,x + x = 2 - \frac{6}{a}$.

Очевидно, $a \ne 3$.

Единственность корня этого уравнения достигается в двух случаях:

либо $b = 0$, $x \le 0$, ~~которое~~ и тогда $x = 2 - \frac{6}{a}$ ✓

либо $b \ne 0$, и тогда x такой, что при прохождении одного периода $b\,ctg\,x$ функция не приобретает прежнее значение.

Однако $ctg(x) \in (-\infty; +\infty)$, $x \ne \pi n$, $n \in Z$; т.е. $(b\,ctg\,x + x) \in (-\infty; +\infty)$, причём с периодом в π, т.е. если $b\,ctg\,x + x \ne b\,ctg\,x + x + \pi$, то уравнение имеет единственное решение. Иначе говоря, если $f(x_0) = b\,ctg\,x_0 + x_0$ будет равно нечётному $f(x_1) = b\,ctg\,x_1 + x_1$, то решение не единственное. Тогда перепишем уравнение в виде $b\,ctg\,x + \frac{6}{a} = 2 - x$.

Очевидно, график $b\,ctg\,x + \frac{6}{a}$ имеет с прямой $2 - x$ бесконечное множество ~~точек~~ точек пересечения, т.е. решение не единственное.

2. Пусть $x + b\,ctg\,x > 0$.

Тогда уравнение примет вид $2a - ab\,ctg\,x + 4\sqrt{x + b\,ctg\,x} = 6 + ax$.

Отсюда же, разделив на a:

$x + \frac{6}{a} = \frac{4}{a}\sqrt{x + b\,ctg\,x} - b\,ctg\,x + 2$.

$x + b\,ctg\,x - \frac{4}{a}\sqrt{x + b\,ctg\,x} = 2 - \frac{6}{a}$.

Пусть $x + b\,ctg\,x = t$.

Тогда уравнение имеет вид $t - \frac{4}{a}\sqrt{t} = 2 - \frac{6}{a}$, или же

пусть $\sqrt{t} = k \Rightarrow k^2 - \frac{4}{a}k - 2 + \frac{6}{a} = 0$.

Чтобы решение было единственным, необходимо, чтобы $D = 0$ или один из корней k был меньше 0.

Преобразуем в удобный вид: $ak^2 - 4k - 2a + 6 = 0$

$D = 16 - 4a(6 - 2a) = 4(4 - 6a + 2a^2) =$

$= 8(a^2 - 3a + 2)$.

Следовательно, единственное решение достигается при $D = 0$: $a^2 - 3a + 2 = 0$, $\begin{cases} a_1 + a_2 = 3 \\ a_1 a_2 = 2 \end{cases}$

$a_1 = 2$, $a_2 = 1$.

Следовательно, при $1 \le a \le 2$ корней у уравнения нет.

В то же время $k = \frac{4 \pm 2\sqrt{2(a^2-3a+2)}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{2(a^2-3a+2)}}{a}$.

Значит, если ~~$a \neq 0$, то решений не~~ $\frac{2 \pm \sqrt{2(a^2-3a+2)}}{a} < 0$, то решений нет:

если $a > 0$:

$2 - \sqrt{2(a^2-3a+2)} < 0$, $2 + \sqrt{2(a^2-3a+2)} > 0$.

$$\Downarrow$$

$\sqrt{2(a^2-3a+2)} > 2$

~~$2a$~~ $a^2-3a+2 > 2$.

$a^2-3a > 0$

$a(a-3) > 0$.

$a < 0,\ a > 3$ ⇒ по условию $a > 3$.

если $a < 0$:

$2 + \sqrt{2(a^2-3a+2)} > 0$.

$2 > \sqrt{2(a^2-3a+2)}$,

$0 < a < 3$ ⇒ тоже невозможно

Значит, при $a > 3$ $k = \frac{2+\sqrt{2(a^2-3a+2)}}{a}$ ⇒ $t = \left(\frac{2+\sqrt{2(a^2-3a+2)}}{a}\right)^2 =$

$= \left(\frac{4+4\sqrt{2(a^2-3a+2)}+2a^2-6a+4}{a^2}\right)$ ⇒ $x + b\,\mathrm{ctg}\,x = \left(\frac{2a^2-6a+4\sqrt{2(a^2-3a+2)}+8}{a^2}\right)$.

Но, опять же, это непрерывная функция, которая должна принимать несколько раз ⇒ решение не единственное.

$D=0$: $a^2-3a+2=0$ ⇒ $a=2$ или $a=1$.

Опять же, имеем непрерывную функцию (например, в точке 4 при $x=1$ ⇒ $x+b\,\mathrm{ctg}\,x=4$), где решений бесконечное множество

3. Пусть $a=0$.

Тогда $2\sqrt{2((x+b\,\mathrm{ctg}\,x)+|x+b\,\mathrm{ctg}\,x|)} = 6$.

$\sqrt{2(x+b\,\mathrm{ctg}\,x)+|x+b\,\mathrm{ctg}\,x|} = 3$.

При $x+b\,\mathrm{ctg}\,x < 0$ решений нет,

при $x+b\,\mathrm{ctg}\,x > 0$:

$x+b\,\mathrm{ctg}\,x = \frac{9}{4}$.

Опять же, при данной функции решений бесконечное множество.

Значит, одно решение достигается лишь в том случае, если $b=0$ и $x \le 0$, $x = 2-\frac{6}{a}$, т.е. ~~a~~ $0 < a \le 3$.

Ответ: $b=0$, $a \in (0; 3]$, $x = 2-\frac{6}{a}$.

~~a~~ $\in (-\infty; 0)$

$(1; 2)$

$\{0\}$

$(3; +\infty)$

X

10

№2.

Преобразуем уравнение.

$$\cancel{\sin^4(2019x) = (\sin^2(2019x))^2 = \left(\frac{1-\cos(4038x)}{2}\right)^2 = \frac{1-2\cos(4038x)+\cos^2 4038x}{2} =}$$

$$\cancel{= \frac{1-2\cos(4038x)+\frac{1+\cos(8076x)}{2}}{2} = \frac{3-4\cos(4038x)+\cos(8076x)}{4}}$$

$$\cancel{\cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2018}(2019x) = 1.}$$

$$\sin^4(2019x) + \cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2018}(2019x) = 1.$$

$$\cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2018}(2019x) = \frac{1}{\sin^4(2019x)}$$

$$\cos(2022x)\cdot\cos(2019x) = (\cos(3x)+\cos(4041x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((\cos(3x)+\cos(4041x))^{2018}\cdot\cos(2022x) = \frac{1}{\sin^4(2019x)}$$

Из графических функций можно понять, (либо) $\sin^4(2019x) = 1$, а $\cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2018}(2019x) = 0$, или, наоборот $\cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2018}(2019x) = 1$, а $\sin^4(2019x) = 0$.

$\sin^4(2019x) = 1$.

$\sin 2019x = 1$ или $\sin 2019x = -1$

$2019x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$x = \frac{\pi + 4\pi k}{4038};\ k\in\mathbb{Z}$.

Для $\sin 2019x = -1$.

$2019x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$x = \frac{-\pi + 4\pi k}{4038};\ k\in\mathbb{Z}$.

Общее решение – $x = \frac{\pi + 2\pi k}{4038};\ k\in\mathbb{Z}$.

Для $\cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2018}(2019x) = 1$ необходимо выполнение двух условий: $\cos^{2019}(2022x) = 1$ и $\sin(2019x) = 0$.

$\cos(2022x) = 1$

$2022x = 2\pi n$

$x = \frac{\pi n}{1011};\ n\in\mathbb{Z}$.

$2019x = \pi m;\ m\in\mathbb{Z}$.

$x = \frac{\pi m}{2019};\ m\in\mathbb{Z}$.

$$\frac{\pi n}{1011} = \frac{\pi m}{2019} \Rightarrow \frac{n}{1011} = \frac{m}{2019} \Rightarrow \frac{n}{337} = \frac{m}{673} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \cancel{m = \frac{673}{337}n \Rightarrow}$ ~~лишь при n.~~ $n = \frac{337}{673}m$,

т.е. лишь при m, кратн 673.

Общее решение: $x = \frac{\pi + 2\pi k}{4038};\ k\in\mathbb{Z}$; или $x = \frac{\pi m}{2019}$, где $m\in\mathbb{Z}$, $m = 673q$,

т.е. $x = \frac{\pi\cdot 673q}{2019} = \frac{\pi q}{3};\ q\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi + 2\pi k}{4038};\ k\in\mathbb{Z}$ и $\cancel{x = \frac{\pi m}{2019};\ m\in}$ $x = \frac{\pi q}{3};\ q\in\mathbb{Z}$.

12

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

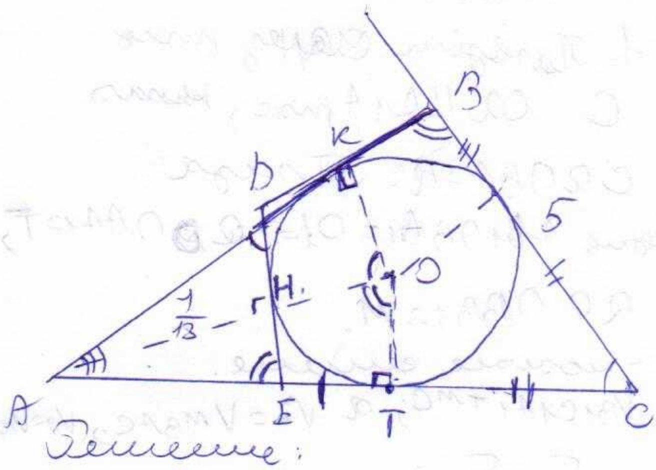
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

111582

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 20.



№3.

Дано: $D \in AB$, $E \in AC$, $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{13}$, BDEC – вписан, ω_1 – вписанная окружность, $\omega_1 \cap AB = K$, $AK = 1$.
BDEC – описанный
$BC = 5$.
Найти: $tg\angle BAC$.

Решение:

1. Т.к. BDEC – вписан и описан, то $BC + DE = BD + CE$, а $\angle B + \angle E = \angle BDE + \angle C = 180°$ ⇒ $\angle DEA = 180° - \angle DEC = \angle B$ как смежн. Аналогично $\angle ADE = \angle C$ ⇒ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

При этом $S_{\triangle ADE} = \frac{AD \cdot AE \cdot \sin\angle DAE}{2}$; но $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}$ ⇒

$AD = \frac{AC \cdot AE}{AB} = \frac{AC \cdot AB \cdot DE}{AB \cdot BC} = \frac{AC}{BC} \cdot DE$ ⇒ $S_{\triangle ADE} = \frac{AC}{2BC} \cdot DE \cdot \sin\angle DAE$

2. Т.к. ω_1 – вписана, то пусть $\omega_1 \cap AC = T$ ⇒ $AK = AT = 1$,

3. Из тех знан, если O – центр ω_1, то $\triangle AKO = \triangle AOT$ по свойству отрезков касательн ⇒ $S_{\triangle AKO} = S_{\triangle ATO} = \frac{S_{\triangle ADE}}{2}$

$\frac{KO \cdot AK}{2} = S_{\triangle AKO}$. При этом AO – биссектриса угла $\angle BAC$ ⇒

⇒ $r = AK \cdot tg\frac{\alpha}{2}$

$DE + BC = BD + CE$ ⇒ $DE = BD + CE - 5$.

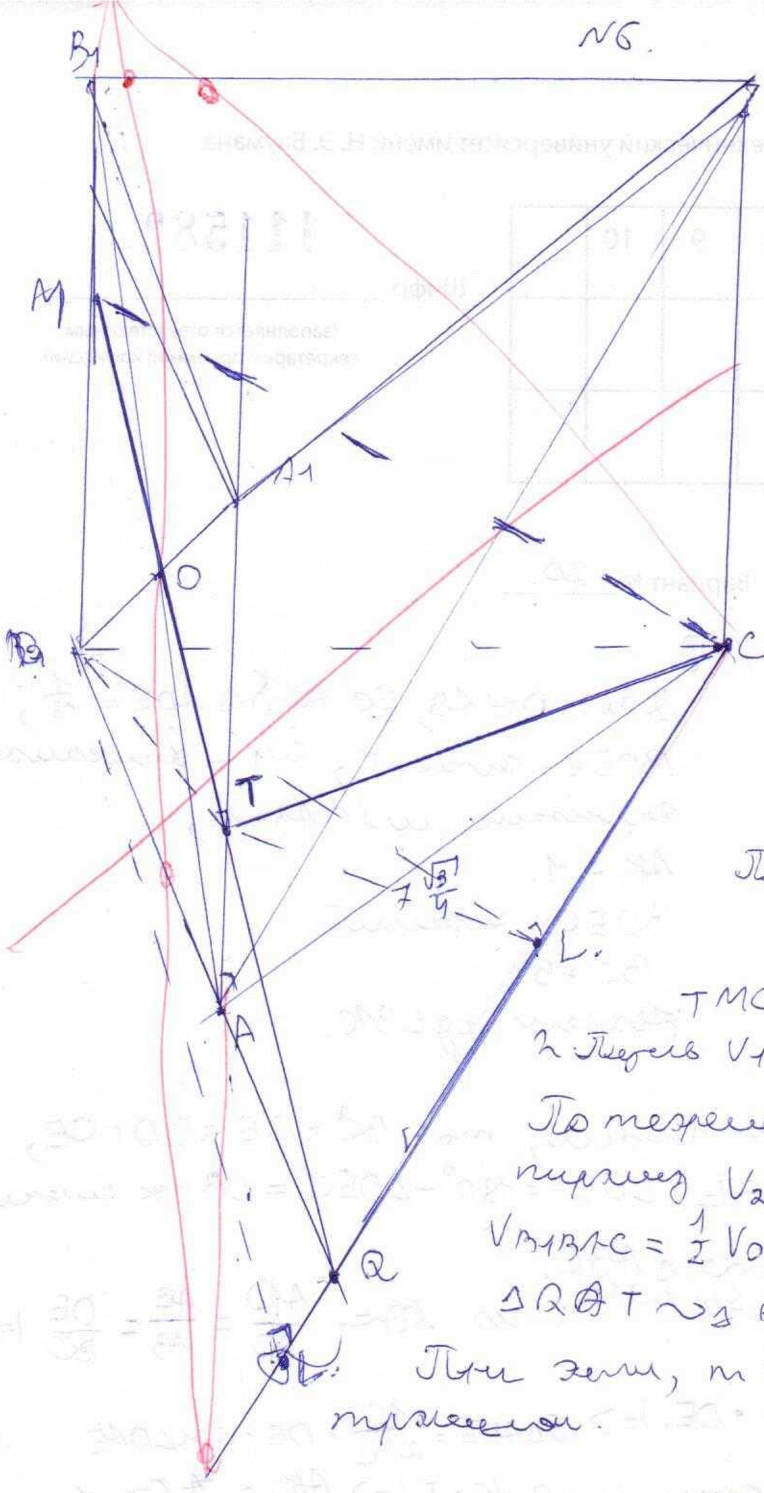
Из подобия треугольников (пусть $BC = 5$, $DB = x$).

$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{BD + CE - BC}{BC} = \frac{BD + CE}{BC} - 1$. AH – средний перпендикуляр к DE т.к. AO – его и биссектриса ⇒ $\triangle ADH \sim \triangle AOK$ по двум углам ⇒ $\frac{AO}{AD} = \frac{AK}{AH} = \frac{KO}{DE}$ ⇒ $\frac{DE \cdot AH}{2} = \frac{1}{13}$ ⇒ $DE \cdot AH = \frac{1}{36}$ ⇒

⇒ $\triangle ADE$ – равнобедренный, $AD = AE$, $AK = AT$

4

№6.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма.

$\alpha \parallel AC_1$, $C \in \alpha$,

O – центр симметрии ABB_1A_1, $O \in \alpha$.

$S_{сеч} = 7\frac{\sqrt{3}}{4}$;

$AC = \sqrt{\frac{14}{3}}$

Найти: $\frac{V_1}{V_2}$.

Решение.

1. Проведём через точку C $CQ \parallel A_1A$, такую, что $CQ \cap BA = Q$. Пусть $AB_1 \cap BA_1 = O$ ⇒ $QO \cap AA_1 = T$, $QO \cap BB_1 = M$.

TMC – искомое сечение.

2. Пусть $V_1 = V_{B_1C_1A_1TMC}$, а $V_2 = V_{MBAC}$, $V_0 = V_{призм}$

По теореме об объёме пирамид $V_2 = \frac{BM}{} V_{B_1BAC} \cdot \frac{BM}{BM_1}$, где $V_{B_1BAC} = \frac{1}{2} V_0$

$\triangle QAT \sim \triangle QBM$ по двум углам ($TA \parallel BM$)

При этом, т.к. $C_1A \parallel CQ$, то C_1AQC – трапеция.

3. $\triangle ABC$ – правильный, т.е. $AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2}$. Пусть $CC_1 = h$.

~~$S_{проекц}$ $S_{TCM} = S \cdot \cos$~~ $S_{TCM} = \frac{S_{ABC}}{\cos\alpha}$, где $\alpha = \widehat{(ABC),(TMC)}$.

~~$S_{ABC} = AC^2 \cdot \sin 60° = 49 \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$~~ $= \frac{49 \cdot 7\sqrt{3}}{32}$ ⇒

$\frac{S_{\triangle ABC}}{\cos\alpha} = S_{сеч}$ ⇒ $\cos\alpha = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{сеч}} = \frac{AC^2 \cdot \sin 60°}{S_{сеч}} = \frac{49 \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{}$

$= \frac{\frac{14}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{14}}{3}} = \frac{14\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6 \cdot \sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{6} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Построим линейный угол. Пусть ~~BQ~~ $BL \perp CQ$, $BL \perp CQ$,

$TL \perp CQ$ ⇒ $\angle\alpha$ $\cos\angle BLT = \frac{\sqrt{14}}{2}$ ⇒ $BT =$

V всей призмы $V_0 = \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot h$;

$V_{ABMC} = \frac{BM}{BB_1} \cdot V_{ABMC} = V_{BTAC} + V_{MBTC} =$

$\varnothing$