Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+ 1 лист

111561

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математике

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Титов Анатолий Сергеевич

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Москва, ГБОУ школа №2107

Регистрационный номер ШМ4012

Вариант задания 19

Дата проведения “11” 03 2018 г.

С работой ознакомлен 16.03.18 АТитов

Подпись участника АТитов

44 (сорок четыре)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

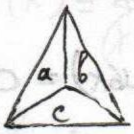
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
9	6	4	20	0	5					44

Шифр 111561

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

N1



5 - р/с. Стекла одинакового размера и формы, ~~зн-т~~ ~~Пусть~~ но разные цвета окраски, зн-т ~~не~~различимы. Различимы они только тем, какая часть закрашена (a, в или c)

Вариант	Количество перестановок в этом варианте ($P_{повт.}$)
aaabc	$\frac{5!}{3!} = 5\cdot4=20$
aabbc	$\frac{5!}{2!\cdot2!} = 5\cdot4\cdot3\cdot2=30$
aabcc	$\frac{5!}{2!\cdot2!} = 30$
abbbc	$\frac{5!}{3!} = 5\cdot4=20$
abbcc	$\frac{5!}{2!\cdot2!} = 30$
abccc	$\frac{5!}{3!} = 20$

$(C_4^2\cdot 2)\cdot 3 + 2C_4^3 + C_4^2 = \frac{4!}{2}\cdot 3 + 2\cdot 4 + 6 = 36+14=50.$

никар.

Сумма всех вариантов: $20+30+30+20+30+20=150.$

К каждому варианту необходимо добавить варианты цветов (например, $a_1a_2a_3b_4c_5$, $a_2a_1a_3b_4c_5$, $a_2a_3a_1b_4c_5$ и т.д.; таких вариантов $5!$).

Т.о. итоговое кол-во вариантов: $150\cdot5! = 20\cdot6\cdot15\cdot10 = 18000$

Ответ: 18000

9

№2

$\sin^4(2016x) + \cos^{2017}(2025x)\cos^{2016}(2016x) = 1$

$\cancel{\sin^4(2016x) - \sin^2(2016x) + \cos^2(2016x)) \cdot (}$

$\sin^4(2016x) - \sin^2(2016x) + \cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x) - \cos^2(2016x) = 0$

$\sin^4(2016x) - \sin^2(2016x) + \cos^2(2016x)\cdot(\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x) - 1) = 0.$

Ур-е квадратное относительно $\sin^2(2016x)$.

$\cancel{D=1}$ $\sin^4(2016x) - \sin^2(2016x) + (1-\sin^2(2016x))\cdot(\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x) - 1) =$

$\sin^4(2016x) - \sin^2(2016x) + \sin^2(2016x) - \sin^2(2016x)\cdot\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x) - 1 +$
$+\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x) = 0$

$\sin^4(2016x) - \sin^2(2016x)\cdot(\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x)) + \cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x) - 1 = 0$

$D = (\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x))^2 - 4\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x) + 4 =$

$= (\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x) - 2)^2.$

Т.о. $\sin^2 x = \frac{\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x) \pm |\cos^{2017}(2025x)\cdot}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} \sin^2 x = \frac{\cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x) - \cos^{2017}(2025x)\cos^{2016}(2016x) + 2}{2} = 1 \ (2) \\ \sin^2 x = \cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x) - 1. \ (1) \end{array}\right.$$

(1) $\underbrace{\underbrace{\sin^2 x}_{min=0} + 1}_{\substack{min=1\\max=2}} = \underbrace{\cos^{2012}(2025x)\cdot\cos^{2016}(2016x)}_{\substack{min<1\\max=1}}$

Равенство выполняется когда левая и правая части равны 1

$\sin^2 x = 0$

и $x = \pi k, k\in\mathbb{Z}$

$\begin{cases} \cos^{2012}(2025x) = 1 \\ \cos^{2016}(2016x) = 1 \end{cases}$ (вариант $(-1)\cdot(-1)$ невозможен, т.к. $\cos^{2016}(t) \geq$

$\begin{cases} x = \pi k \\ 2025x = 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ 2016x = \pi l, l\in\mathbb{Z} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pi k \\ x = \frac{2\pi n}{2025} \\ x = \frac{\pi l}{2016} \end{cases}$ +. $\cancel{x = 2\pi n}$, $n\in\mathbb{Z}$.

(2) $\sin^2 x = 1$

$\sin x = \pm 1$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

6

Ответ: $2\pi n$; $\frac{\pi}{2} + \pi m$.

N4

$$\frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) + \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} \geqslant 13 g\left(g^3(x)\right) \qquad g(x) = \frac{6}{x^2 - 4x + 7}.$$

Найдём $E(g)$.

$$g(x) = \frac{6}{(x-2)^2 + 3} \qquad \left((x-2)^2 + 3\right) \in [3; +\infty).$$

$g(x) \in (0; 2]$ $\quad x = 2$ – т. максимума

(т.к. при $x \neq 2$ $(x-2)^2 + 3 > 3$, а $\frac{6}{(x-2)^2+3} < 2$.)

ОДЗ из $\sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}}$: $\quad 2 - \frac{2}{g(x)} \geqslant 0$.

$\frac{2g(x) - 2}{g(x)} \geqslant 0$. Т.к. $g(x) > 0$, то $g(x) - 1 \geqslant 0$.

$g(x) \geqslant 1$ (ОДЗ). Т.о. $g(x) \in [1; 2]$.

1) $\frac{g(x)}{2} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

2) $g\left(\frac{g(x)}{2}\right) \in \left[\frac{6 \cdot 4}{9 + 12}; \frac{3}{2}\right]$, $\quad g\left(\frac{g(x)}{2}\right) \in \left[\frac{8}{7}; \frac{3}{2}\right]$.

3) $\frac{2}{g(x)} \in [1; 2]$. $\quad \frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) \in \left[\frac{16}{21}; 1\right]$.

4) $\left(2 - 2/g(x)\right) \in [0; 1]$.

5) $\sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} \in [0; 1]$.

6) $g^3(x) \in [1; 8]$

7) $g\left(g^3(x)\right) \in \left[\frac{6}{39}; 2\right]$, $\quad g\left(g^3(x)\right) \in \left[\frac{2}{13}; 2\right]$.

наиб. значение ф-ии $g(t)$ при $t = 2$, а наим. при $t = 8$ (в данном случае)

8) $13 g\left(g^3(x)\right) \in [2; 26]$.

$$\underbrace{\frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{2}\right)}_{max=1} + \underbrace{\sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}}}_{max=1} \geqslant \underbrace{13 g\left(g^3(x)\right)}_{min=2}.$$

Т.е. может достигаться только равенство

При ~~g(x)~~ g(x), где x = 2: (При x = 2 g(x) = 2 и x = 2 – т. максимума g(x))

$\frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)=\frac{2}{3}g(1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{4}=1.$

$\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}=\sqrt{1}=1.$

$13g(g^2(x))=13g(4)=13\cdot\frac{6}{36+3}=\frac{6}{3}=2.$ 20

$1+1\geq 2.$ – верно.

Ответ: 2.

~~8a+3abctgx+2√~~ №5

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 3b\cdot ctgx\\ 8a-12+3abctgx-ax+2\sqrt{2(x-6bctgx)}=0 \quad (1)\end{cases}\\ \begin{cases}x<3bctgx\\ 8a-12+3abctgx-ax=0 \quad (2)\end{cases}\end{array}\right.$

(2) ~~4(2a-3)~~ $-a(x-3bctgx)\neq 0$

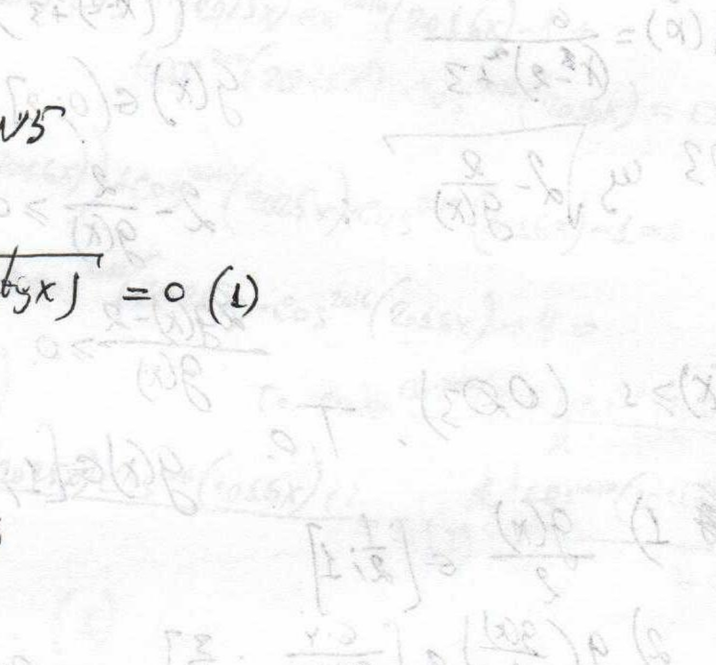
<0

(1)

$4(2a-3)-a(x-3bctg(x))+4\sqrt{x-3bctg(x)}=0$

Пусть $t=\sqrt{x-3bctg(x)}$.

$at^2-4t-4(2a-3)=0.$



коэффициент (3b) влияет на „растяжение" гр-ка ctg(x) по вертикали.

Т.о. при $x\neq 3bctg(x)$ всегда найдётся более 1 корня

6 -?

При $x=3bctg(x)$:

$4(2a-3)=0.$

$a=\frac{3}{2}.$

$x=3bctg(x)$

$\frac{1}{3b}=\frac{ctg(x)}{x}$ (по ОДЗ ctg(x): $x\neq 0$).

0

Ответ: $a=\frac{3}{2}$; $\frac{ctg(x)}{x}=\frac{1}{3b}$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

111561

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр ____________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

N3

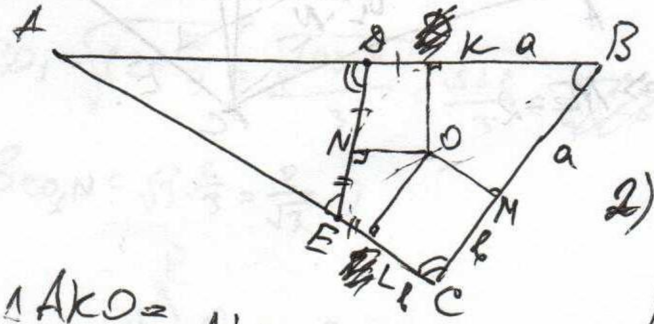
Дано: $\triangle ABC$: $D \in AB$; $E \in AC$; $S_{ADE} = \frac{8}{3}$.

ω – окр. впис. в $BDEC$; ω кас. $AB = K$.

$AK = 4$; $BC = 6$; около $BDEC$ можно описать окр-ть.

Найти: $tg(\hat{BAC})$

Решение:



1) Если ω впис. в $BDEC$, то она кас. AC, AB, и BC, зн-т ω впис. в $\triangle ABC$

2) Т.к. $BDEC$: можно впис. и опис. окр-ть, то:

$$\begin{cases} BD + EC = BC + DE \\ \hat{B} + \hat{E} = \hat{D} + \hat{C} = 180^\circ \end{cases}$$ (углы внутри $BDEC$)

3) $\triangle AKO = \triangle ALO$ $\left(\begin{matrix} KO = OL \\ AO - \text{общ.} \end{matrix}\right)$ по катету и гип.

Зн-т $AK = AL = 4$.

$BK = BM = a$ $(\triangle BKO = \triangle BMO)$

~~$LO = OM$~~ $LC = CM = b$ $(\triangle LCO = \triangle COM)$

$a + b = BC = 6$.

$P_{ABC} = 2 \cdot AK + 2(a+b) = 8 + 12 = 20$; $p_{ABC} = \frac{P_{ABC}}{2} = 10$. +

$\hat{B} = \alpha$; $\hat{DEC} = 180^\circ - \alpha$; $\hat{AED} = \alpha$; $\hat{B} = \hat{AED}$

Аналогично: $\hat{ADE} = \hat{C}$.

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{DE}{BC}$; $\frac{AD}{4+b}=\frac{AE}{4+a}=\frac{DE}{6}$.

4

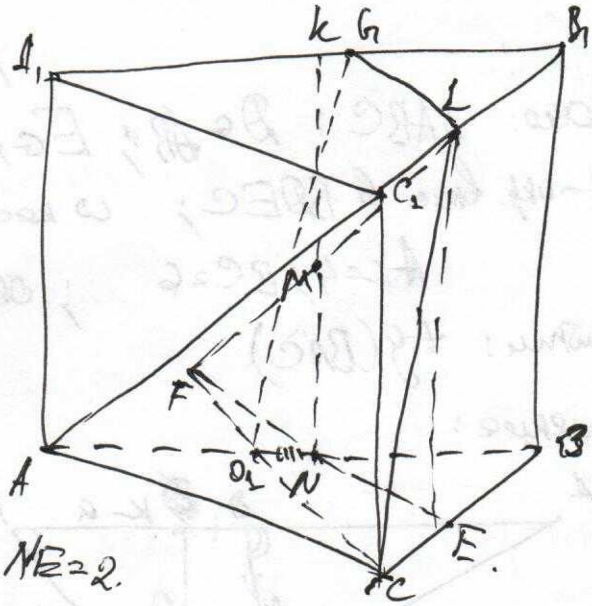
№6

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прав. △ пирамида; α – секущ.: $\alpha \parallel AC_1$, $C \in \alpha$, $M \in \alpha$, где M – центр. AA_1B_1B.

$S_{секущ.} = \frac{9}{\sqrt{5}}$.

$AB = 4$.

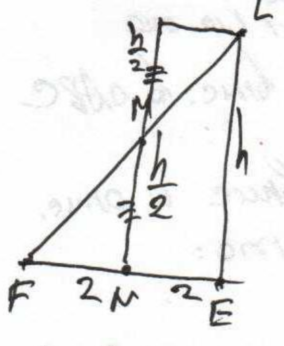
Найти: V_1, V_2.



Решение:

1) $ML \parallel AC_1$.

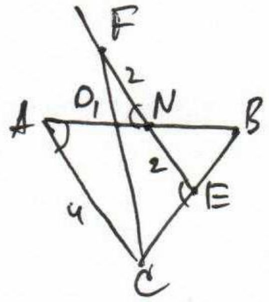
(MLE):



Пусть $AA_1 = h$.

NE – ср. линия $\triangle ABC \Rightarrow NE = 2$.

2) (ABC):



$\triangle FNO_1 \sim \triangle AO_1C$

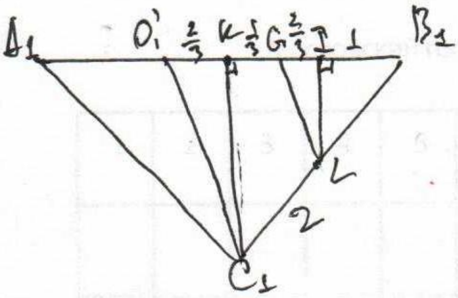
$\frac{FN}{AC}=\frac{O_1F}{O_1C}=\frac{NO_1}{AO_1}$

$\frac{1}{2}=\frac{NO_1}{AO_1}$ $NO_1 + AO_1 = 2$

$3NO_1 = 2$; $NO_1 = \frac{2}{3}$.

+.

3) $(A_1B_1C_1)$:

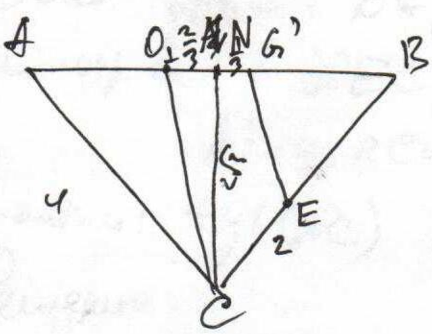


$GL \parallel O_1C$, т.к. $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$

O_1GLC - сечение

4) Найдём $S_{\text{проекц. на } (ABC)} \, O_1GLC$ (сечение)

5) (ABC):



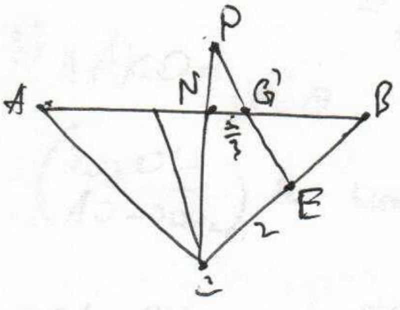
$S_{\text{проекц}} = S \; CO_1G'E$.

$CO_1G'E$ - трапец.

$CN = \cancel{2\sqrt{2}} \; 2\sqrt{3}$.

$CO_1 = \sqrt{12 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{108+4}}{3} = \frac{\sqrt{112}}{3} = \cancel{\frac{2}{3}\sqrt{23}} \; \frac{2}{3}\sqrt{23}$.

$S_{CO_1N} = \sqrt{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$



$S_{NG'EC} = S_{PCE} - S_{PNG'}$

5