Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 111072

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Сергеев Сергей Сергеевич

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Москва №1580

Регистрационный номер ШМ 2009

Вариант задания 20

Дата проведения "11" марта 20 18 г.

С работой ознакомлен 16.03.2018 г.

Подпись участника

46 (сорок шесть)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	12	16	0	15	0					46

111072

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

111072

072

Вариант № 20

№6.

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – Δ призма

$\alpha = (\parallel AC_1; C_1F)$ ABC – прав, $AB=a$

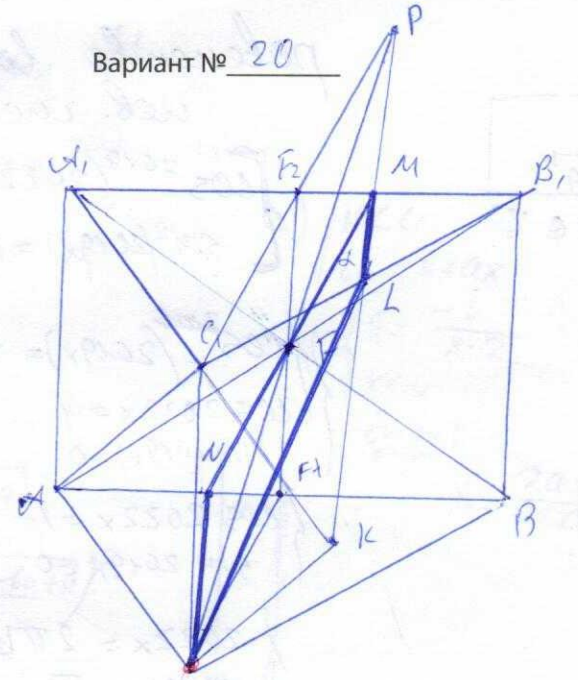
F – центр. AA_1B_1B

$S_\alpha = \frac{7\sqrt{3}}{4}$

$a = \sqrt{\frac{14}{3}}$

V_1 – ?

V_2 – ?



Решение: 1) $CK \parallel AC_1$

$C \subset (C_1F_2F_1)$

$F \subset (C_1F_2F_1)$

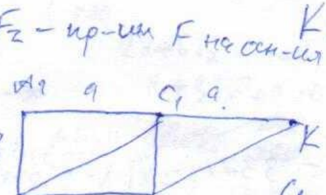
$CF \cap C_1F_2 = P$

$KP \cap C_1B_1 = L$; $KP \cap A_1B_1 = M$. $\Rightarrow \alpha = (CNML)$

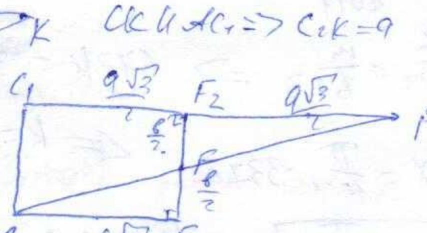
$CN \parallel ML$

F_1, F_2 – пр-ии F на осн-ия

2)

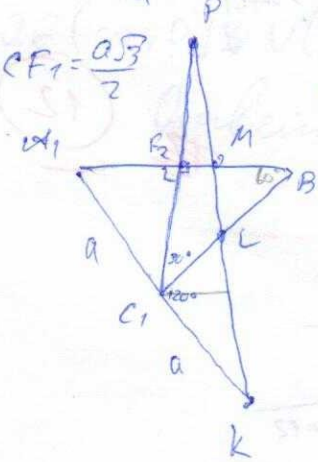


$CK \parallel AC_1 \Rightarrow C_1K = a$



$\Delta CFF_1 = \Delta FF_2P \Rightarrow F_2P = CF_1 = a$

$CF_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



$tg\angle F_2C_1B_1 = \frac{F_2B_1}{F_2C_1} = \frac{2x}{a\sqrt{3}} = tg\,30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$2x = a$

$x = \frac{a}{2}$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

№2

$\sin^4(2019x)+\cos^{2019}(2022x)\cos^{2018}(2019x)=1$

$(1+\sin^2(2019x))\cos^2(2019x)=\cos^{2018}(2019x)\cos^{2019}(2022x)$

$\cos^2(2019x)\left(\cos^{2016}(2019x)\cos^{2019}(2022x)-1-\sin^2(2019x)\right)=0.$

1) $\cos^2(2019x)=0.$

$\Leftrightarrow \cos(2019x)=0$

$2019x=\frac{\pi}{2}+\pi n$

$\boxed{x=\frac{\pi}{4038}+\frac{\pi}{2019}n}$ $n\in Z.$

2) $\underbrace{\cos^{2019}(2022x)\cos^{2016}(2019x)}_{\in[-1;1]}=\underbrace{1+\sin^2 2019x}_{\in[1;2]}$

равенство возможно, когда лев. часть = прав. части = 1.

$\begin{cases}\cos^{2019}(2022x)\cos^{2016}(2019x)=1\\ \sin^2(2019x)=1-1\end{cases}$

$\begin{cases}\cos^{2016}(2019x)=\pm1\\ \cos 2022x=1\\ \sin(2019x)=0\end{cases}$

$\begin{cases}\cos 2022x=1\\ \sin 2019x=0\end{cases}$

$\begin{cases}2022x=2\pi k\\ 2019x=\pi m.\end{cases}$

$\begin{cases}x=\frac{\pi}{1011}k\\ x=\frac{\pi}{2019}m\end{cases}$

$\frac{\pi}{1011}k=\frac{\pi m}{2019}$

$\frac{k}{337}=\frac{m}{673}\Rightarrow 673k=337m$

$x=\frac{\pi}{1011}\cdot 337a \Leftarrow k=337a$

$\boxed{x=\frac{\pi}{3}a}$ $k,m,a\in Z.$

3) $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4038}+\frac{\pi}{2019}n\\ x=\frac{\pi}{3}a\end{array}\right.$ $n,a\in Z$

12

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4038}+\frac{\pi}{2019}n\\ x=\frac{\pi}{3}a\end{array}\right.$ $n,a\in Z.$

№4

$\frac{7}{9}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)+2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}\geq 13g(g^2(x))$; $g(x)=\frac{9}{x^2-6x+12}$

$(x-3)^2+3\geq 3$

$\boxed{g(x)\leq 3}\Rightarrow g^2(x)\leq 9 \Rightarrow g(g^2(x))$

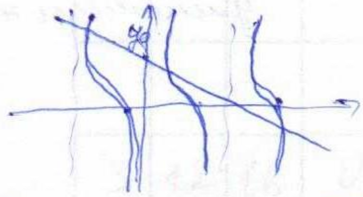
0

№5.

$2a - ab\,ctg\,x + 2\sqrt{2(x+|x+b\,ctg\,x|+b\,ctg\,x)} = 6+ax$

$x + b\,ctg\,x = y_0$

$b\,ctg\,x = y_0 - x$



$\forall y_0$ беск. число реш. при $b=0$.

$b=0 \Rightarrow 2a + 2\sqrt{2(x+|x|)} = 6+ax$ +

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0 \\ 2a + 2\sqrt{2(x+x)} = 6+ax \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x < 0 \\ 2a + 2\sqrt{2(x-x)} = 6+ax \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

1) $\begin{cases} x \ge 0 \\ 4\sqrt{x} - 6 = a(x-2) \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge 0 \\ a = \dfrac{4\sqrt{x}-6}{x-2} \end{cases}$

$\begin{cases} a = \dfrac{4\sqrt{x}-6}{x-2} \\ x \ne 2 \\ x \ge 0 \end{cases}$

$ax - 4\sqrt{x} + 6 - 2a = 0$

$\sqrt{x} = \dfrac{2 \pm \sqrt{2a^2-6a+4}}{a}$

$x = \left(\dfrac{2 \pm \sqrt{2a^2-6a+4}}{a}\right)^2$

$a' = \dfrac{\frac{4}{2\sqrt{x}}(x-2) - (4\sqrt{x}-6)}{(x-2)^2} = 0.$

$\dfrac{2x-4}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} - 6 = 0.$

$\begin{cases} 2x - 4 - 4x - 6\sqrt{x} = 0 \\ x \ne 0 \end{cases}$

$2x + 6\sqrt{x} + 4 = 0$

$x + 3\sqrt{x} + 2 = 0.$

$\lim\limits_{x\to 2-} (a) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2+} (a) = \lim\limits_{x\to 2+} \left(\dfrac{4\sqrt{x}-6}{x-2}\right)$

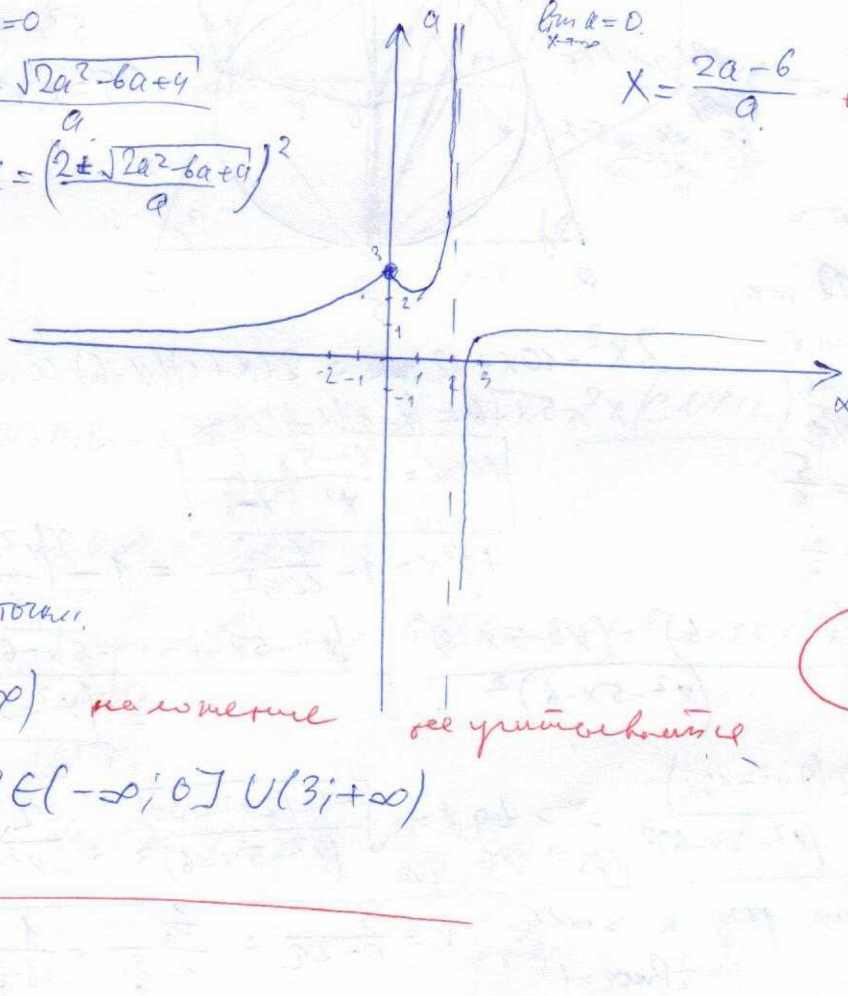
$\left[\begin{array}{l} x \le 3 \\ x = 1 \end{array}\right.$ – крит. точки.

2) $\begin{cases} x < 0 \\ 2a = 6 + ax \end{cases}$

$\begin{cases} a = \dfrac{-6}{x-2} \\ x < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} a = 0.$

$x = \dfrac{2a-6}{a}$ +



$a \in (-\infty; 0] \cup (3; +\infty)$ на множестве не учитывается

15

Ответ: $a \in (-\infty; 0] \cup (3; +\infty)$

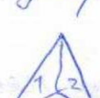
№1.

Имеется 5 кусков стекла.

варианты распределения закрашенных кусков по 2м треу

1и2 (потом 1и3, 2и3)

умножим на



I, II, III, IV, V

$2^5 = 32$ варианта

кол-во перемешиваний – 5!

кол-во способов $= 3 \cdot 2^5 \cdot 5! = 3 \cdot 32 \cdot 120 = 11520$

Ответ: 11520 способов

3

№3.

Дано: $\triangle ABC$

$D \in AB$

$E \in AC$

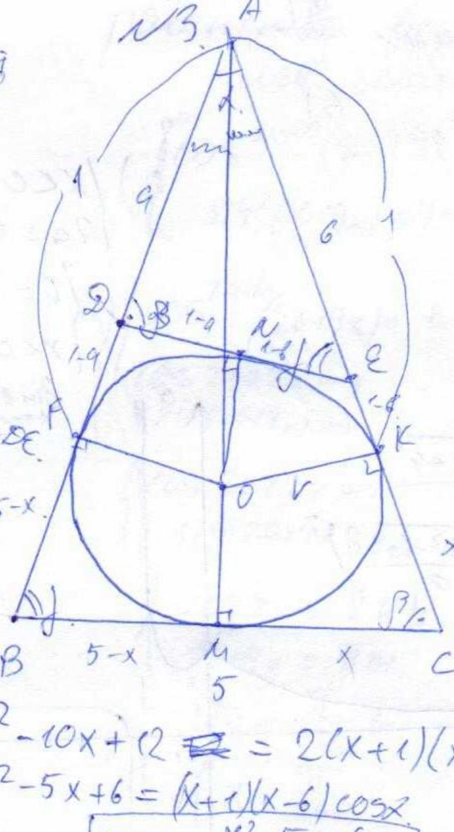
$S_{ADE} = \frac{1}{18}$

$AK = 1$

$BC = 5$

$tg\angle BAC$ – ?

1) $AD = a$
$AE = b$



$\omega(O; OK)$ – впис. в $\triangle ABC$.

$AF = AK = 1$

$KC = x = MC \Rightarrow BM = BF = 5-x$

$AC = x+1$

$AB = 6-x$

$BC = 5$.

$BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2AB \cdot AC\cos\alpha$

$5^2 = (x+1)^2 + (6-x)^2 + 2(x+1)(6-x)\cos$

$25 = x^2+2x+1+x^2-12x+36+2(x+1)(6-x)c$

2) $\angle ADE = \angle C = \beta$
$\angle AED = \angle B = \gamma$. $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$.

$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$

$DE = 2-a-b$

$\underline{P_{ADE} = 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{P_{ABC} = 12}$, т.к.

$P_{ADE} = a+b+(1-a)+(1-b)$

$P_{ABC} = 1+x+(6-x)+5$.

из подобия $\Rightarrow DE = \frac{5}{6}$

$\angle FAO = \angle KAO = \frac{\alpha}{2}$.

$2x^2 - 10x + 12 = 2(x+1)(x-6)\cos\alpha$.

$x^2-5x+6 = (x+1)(x-6)\cos\alpha$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x^2-5x+6}{x^2-5x-6}}$$

$$tg^2 x = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = 1 - \left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-5x-6}\right)^2 =$$

$$= \frac{(x^2-5x-6)^2-(x^2-5x+6)^2}{(x^2-5x-6)^2} = \frac{(x^2-5x-6-x^2+5x-6)(x^2-5x-6+x^2-5x+6)}{(x^2-5x-6)^2}$$

$$= \frac{-12(2x^2-10x)}{(x^2-5x-6)^2} \Rightarrow tg\alpha = \sqrt{\frac{-12(2x^2-10x)}{(x^2-5x-6)^2}} = \frac{2\sqrt{-3(2x^2-10x)}}{x^2-5x-6}$$

3) r – вневпис. рад. к $\triangle ADE$. $r = \frac{S}{p-DE} = \frac{\frac{1}{18}}{1-\frac{5}{6}} = \frac{1}{18\cdot\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$. +

$p = \frac{1}{2}P_{ADE} = 1$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{OK}{AK} = r; \; tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2r}{1-r^2} = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{2\cdot 9}{3\cdot 8} = \frac{3}{4}.$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{3}{4}}$$

16

Ответ: $tg\alpha = \frac{3}{4}$.