Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+
+

Шифр 111511
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Новак Александр Вадимович

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Москва, школа № 1524

Регистрационный номер ШМ 4812

Вариант задания 20

Дата проведения "11" марта 2018г.

С работой ознакомлен

Подпись участника

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

47 (сорок семь)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
3	9		10	10	15					47
		0								

Шифр 111511

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

11

Вариант № 20

№2.

$(1-\cos^2 2019x)^2+\cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2018}2019x=1$. ОДЗ: $x\in R$

$1-2\cos^2 2019x+\cos^4 2019x+\cos^{2018}(2022x)\cdot\cos^{2018}2019x=1$

$\cos^2 2019x\,(\cos^{2019}(2022x)\cos^{2016}2019x+\cos^2 2019x-2)=0.$

Т.к. $0\le|\cos\alpha|\le 1$, то $\cancel{\cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2016}2019x+\cos^2 2019x\le 2}$

чтобы $\cos^{2019}(2022x)\cos^{2016}2019x+\cos^{2}2019x-2=0$

необходимо выполнение системы:

$$\begin{cases}\cos^{2019}2022x\cdot\cos^{2016}2019x=1\\ \cos^2 2019x=1\Rightarrow\cos 2019x=\pm1\end{cases}$$

При $\cos 2019x=1$: $\cos^{2016}2019x=1\Rightarrow\cos^{2019}2022x=1$

$\left(x=\frac{2\pi n}{2019}, n\in Z\right)$ $\quad\cos 2022x=1$

$x=\frac{2\pi k}{2022}, k\in Z$

Найдём x, при которых это выполняется:

$n=\frac{k\cdot 2019}{2022}$ можно сократить

(учётом того, что k и $n\in Z$, k должно быть равно $2022f$?!, где $f\in Z\Rightarrow x=2\pi f$, $f\in Z$

При $\cos 2019x=-1\Rightarrow\cos^{2016}2019x=1\Rightarrow\cos^{2019}2022x=-1$

$\left(x=\frac{2\pi n+\pi}{2019}, n\in Z\right)$ $\quad\Downarrow$ $x=\frac{2\pi m}{2022}, m\in Z$

Проведём аналогичную процедуру:

$$\frac{2\pi n+\pi}{2019}=\frac{2\pi m}{2022}$$

$n=\frac{2019m}{2022}-\frac{\cancel{\pi}^1}{2}$, с учётом того, что m и $n\in Z$,

m должно быть равно $\cancel{1011k}$ $1011+2022h$, где $h\in Z\Rightarrow x=\pi+2\pi h$, где $h\in Z$

Другим решением является:

$\cos^2 2019x = 0$

$x = \dfrac{\frac{\pi}{2} + \pi r}{2019}$, где $r \in \mathbb{Z}$

$x = \dfrac{\pi + 2\pi r}{4038}$, где $r \in \mathbb{Z}$

~~Если выполняется хотя бы одно из вышеуказанных решений,~~

каждое из вышеуказанных решений является решением уравнения

Ответ: $\dfrac{\pi + 2\pi r}{4038}$, где $r \in \mathbb{Z}$

$2\pi f$, где $f \in \mathbb{Z}$

$\pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$

№4.

$$\frac{7}{9}\, g\left(\frac{g(x)}{3}\right) + 2\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}} \geq 13\, g(g^2(x)), \text{ где } g(x) = \frac{9}{x^2 - 6x + 12}$$

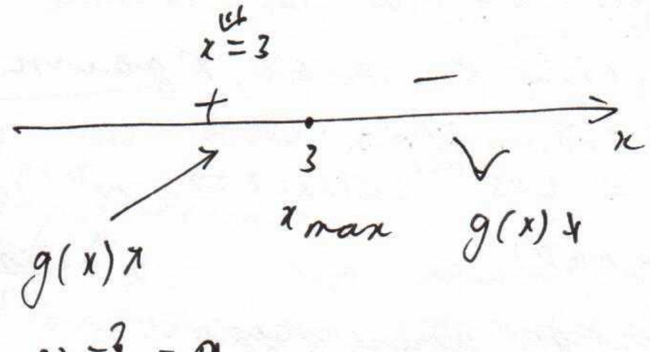
$D(g(x))$: $x^2 - 6x + 12 \neq 0$

$D = 36 - 48 < 0 \Rightarrow x \in R$

Найдём критические точки:

$$g'(x) = -\frac{(2x-6)\cdot 9}{(x^2 - 6x + 12)^2} = 0$$

$x = 3$



$g(3) = 3 = g_{max}$

Очевидно, что $g(x) > 0$, т.к. $x^2 - 6x + 12 > 0$, а

также $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$

Тогда, $E(g(x)) \in (0;3] \Rightarrow E\left(\frac{g(x)}{3}\right) \in (0;1]$

?

$\Downarrow$ т.к. $g(x)$ на этом пр-ке ↗

$g\left(\frac{g(x)}{3}\right) \in (g(0); g(1)]$

$g\left(\frac{g(x)}{3}\right) \in \left(\frac{3}{4}; \frac{9}{7}\right]$

А $E\left(\frac{3}{g(x)}\right) \in [1; +\infty)$

$\Downarrow$

$E\left(\sqrt{2 - \frac{3}{g(x)}}\right) \in$ ~~...~~ $[0; 1]$

?

$\Downarrow$

~~...~~

?

А $E(g(g^2(x))) \in \left(\frac{9}{39}; 3\right]$ (т.к. $x_{max} = 3$, а $g^2(x) \in (0;9]$

и $g(x)$ симметрична отн-но $x = 3$: $g(x_0+3) = g(3-x_0)$:

$\frac{9}{x_0^2+3} = \frac{9}{(-x_0)^2+3}$, а

значит ~~...~~ минимальное значение на этом пр-ке — $g(9) = \frac{9}{39}$ (т.к. $g(x) \downarrow$ при $x \in [3; +\infty)$).

~~...~~

$\Downarrow$

$E(13\, g(g^2(x))) \in (3; 39]$

Возьмём максимально возможное значение (из области значений) слева (т.е. $\frac{9}{7} \cdot \frac{7}{9} + 2 \cdot 1 = 3$) и минимально возможное справа (т.е. $3 + \Delta t$, где $\Delta t \to 0$ (т.к. три не включено в $E(13g(g^2(x)))$)

??

Получаем:

$3 \geq 3 + \Delta t$, где $\Delta t \to 0$ и $\Delta t \neq 0$

А это неверно, а значит неравенство не выполняется никогда ~~...~~ (т.к. рассмотрен „критический" случай) ~~...~~

Ответ: $x \in \varnothing$

№5.

$$2a - ab\,ctg x + 2\sqrt{2\left(x + b\,ctg x + |x+b\,ctg x|\right)} = 6 + ax$$

1) При $x + b\,ctg x < 0$ модуль раскроется с пр-ми знаками:

$$2a - ab\,ctg x + 2\sqrt{2\cdot 0} = 6 + ax$$

$$2a - 6 = a(b\,ctg x + x)$$

$$x + b\,ctg x = \frac{2a-6}{a}$$

Если $b \neq 0$, ~~то~~ и $\frac{2a-6}{a} < 0$, это уравнение с заданным условием будет иметь ∞ много решений, т.к. $ctg\,x$ - функция периодическая и $ctg\,x \in (-\infty; +\infty)$, а значит и $(x + b\,ctg x) \in (-\infty; +\infty)$ при $x \in (0; \pi)$ и $x \in (\pi; 2\pi)$ и т.д., а значит и значение $\frac{2a-6}{a}$ примет больше 1 раза

Если же $b = 0$: $x = \frac{2a-6}{a}$

2) При $x + b\,ctg x \geq 0$ модуль раскроется с ~~противоположными~~ теме же знаками:

$$2a - ab\,ctg x + 4\sqrt{x + b\,ctg x} = 6 + ax$$

$$6 + a(x + b\,ctg x) - 4\sqrt{x + b\,ctg x} - 2a = 0$$

ОДЗ ~~включ~~: $x + b\,ctg x \geq 0$ уже включено в случай

~~Случай $b\neq 0$ нам~~ Замена: $\sqrt{x + b\,ctg x} = t$

При $b \neq 0$? и ?!! $\frac{2a-6}{a} \geq 0$ (чтобы п.1 не имел корней):

$$at^2 - 4t - 2a + 6 = 0$$

При $a \neq 0$: $D = 16 + 8a^2 - 24a$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{D}}{2a}$$

(Если $D > 0$) ⇒ ан-но тому, что было написано раньше получаем ∞ много решений.

Если $D < 0$, то решений вообще нет, что нас также не удовлетворяет

При $a = 0$ также будет ∞ много корней или их вообще не будет

При $b = 0$: ан-но $D = 16 + 8a^2 - 24a$ при $a \neq 0$.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

111511

Шифр

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 20

№5 (продолжение)

~~если~~ Чтобы был 1 корень $b=0$ и:

а) $\begin{cases} D=0;\ a\neq 0 \\ \frac{2a-6}{a} \geq 0 \end{cases}$ — чтобы в п.1 не было корней ?

$\begin{cases} 16+8a^2-24a=0 \Rightarrow 2+a^2-3a=0 \\ \frac{2a-6}{a} \geq 0 \end{cases}$

$D=9-8=1$

~~$a_{1,2}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2}$~~

$a_{1,2}=\frac{3\pm1}{2}=1;2$

Проверим, подходят ли они нам:

$a=1$: $\frac{2-6}{1}<0 \Rightarrow$ не подходит. ??

$a=2$: $-\frac{2}{2}<0 \Rightarrow$ не подходит (будет 2 решения)

б) При $a=0$: $-4t+6=0$

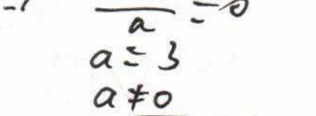
Обр. замена: $4\sqrt{x}=6 \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\frac{9}{4}$

При этом п.1 решений не имеет ($x=-\frac{6}{0}$ — не имеет смысла)

в) $\begin{cases} D<0 \\ \frac{2a-6}{a}<0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2a-6}{a}=0$

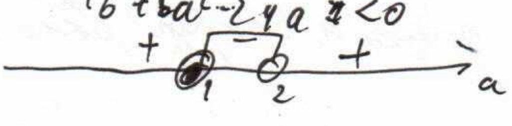
$a=3$

$a\neq0$



$a\in(0;3)$

$16+8a^2-24a<0$



$a\in(1;2)$

$\Rightarrow a\in(1;2)$

При этом: $x = \frac{2a-6}{a}$

2) $\begin{cases} D > 0 \Rightarrow a \in (-\infty; \\ \frac{2a-6}{a} \geq 0 \quad a \neq 0 \\ \frac{4+\sqrt{D}}{2a} \geq 0 \\ \frac{4-\sqrt{D}}{2a} < 0 \end{cases}$?

А если $a<0$?

$\Rightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup [3; +\infty) \\ \frac{4+2\sqrt{2}\sqrt{a^2-3a+2}}{2a} \geq 0 \\ \frac{4-2\sqrt{2}\sqrt{a^2-3a+2}}{2a} < 0 \end{cases}$

$\frac{4+2\sqrt{2}\sqrt{a^2-3a+2}}{2a} = 0$ ОДЗ: $a^2-3a+2 \geq 0$

$\Updownarrow$

$a \in (-\infty; 1] \cup [2,$

$\begin{cases} a \neq 0 \\ \sqrt{a^2-3a+2} = -\sqrt{2} \Rightarrow a \in \emptyset \end{cases}$

$-$ 0 $+$ a

с учётом ОДЗ

$a \in (0; +\infty) \Rightarrow a \in (0; 1] \cup [2; +$

$\frac{4-2\sqrt{2}\sqrt{a^2-3a+2}}{2a} = 0.$

$\begin{cases} a \neq 0 \\ a^2-3a+2 = 2 \Rightarrow a = 0; 3 \end{cases}$

$+$ 0 $+$ 1 2 3 a

$\begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup [3; +\infty) \\ a \in (3; +\infty) \\ a \in (0; 1] \cup [2; +\infty) \end{cases} \Rightarrow a \in (3; +\infty)$

$\Downarrow$

$+$ $\cancel{x} = \frac{4+2\sqrt{2}\sqrt{a^2-3a+2}}{2a}$

Ответ: $a = 0$ и $b=0$: $x = \frac{9}{4}$

При $a \in (1; 2)$ и $b=0$ $x = \frac{2a-6}{a}$

При $a \in (3; +\infty)$ и $b=0$ $x = \left(\frac{4+2\sqrt{2}\sqrt{a^2-3a+2}}{2a}\right)^2$

$\sqrt{3}$.

Дано: $\triangle ABC$

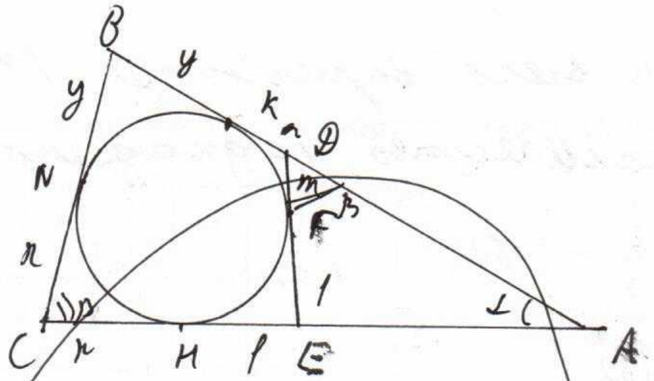
$S_{ADF} = \frac{1}{18}$

$AK = 1$

$BDEC$ вписан и описан вокруг окр-ей

$BC = 5$

$tg \angle BAC - ?$



1) По св-ву касательных, проведённых из 1 т.:

$KD = DF = m$

$EF = EH = l$

$HC = CN = x$

$NB = BK = y$

$AK = AH = 1$

2) Т.к. BDEC может быть вписан в окр, то (пусть $\angle EDA = \beta$, а $\angle EAD = \alpha$) $\angle BCE = 180^\circ - (180^\circ - \angle EDA) = \beta$

$\Downarrow$

$\Delta DAE \sim \Delta CAB \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-m}{1+x} = \frac{1-l}{6-x} & (\text{т.к. } x+y=5) \\ \frac{x+1}{5} = \frac{1-m}{1+x} \\ \frac{1}{2}\sin\alpha\,(1-m)(1-l) = \frac{1}{18} = S_{\Delta DAE} \end{cases}$

~~Т.к. окр KNH вписана в ΔABC, то её центр лежит на т. пересечения биссектрис~~

№1.

Для того, чтобы стопка оказалась непрозрачной, необходимо, чтобы 3 стекла перекрывали друг друга полностью, а оставшиеся два лежали как угодно. Вероятность этого при случайном разложении стёкол: $P_{этого} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 1^2 \cdot 9 = \frac{1}{3}$

Почему?!

Тогда вероятность искомых случаев:

$P = \frac{2}{3}$

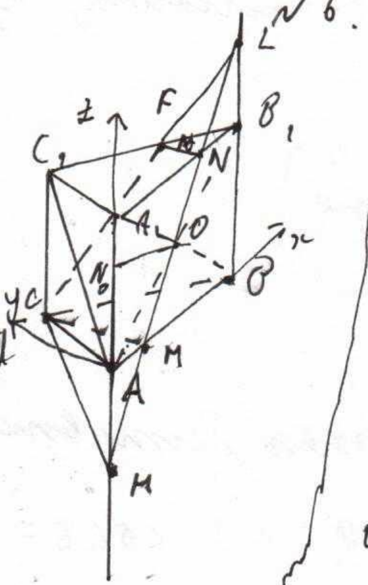
При этом всего вариантов разложения: 3^5 ??

Тогда количество подходящих:

$n = 3^5 \cdot \frac{2}{3} = 162$

Ответ: 162

№6.



Дано:
правильная призма $ABCA_1B_1C_1$

$\alpha \parallel AC_1$

$C \in \alpha$

$O \in \alpha$

$S_\alpha = \frac{7\sqrt{3}}{4}$

$AB = \sqrt{14/3}$

$V_1 ; V_2 - ?$

Построение сечения.

AA_1B_1B — прямоугольник (т.к. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма)

⇓

ц. симметрии (т. O) лежит на т. пересечения диагоналей.

1) Д.п. $CH \parallel AC_1$; $CH \cap AA_1 = H$

$HO \cap AB = M$

$HO \cap A_1B_1 = N$

2) т.к. $FN \subset \alpha$
$CM \subset (ABC)$
$CM \subset \alpha$
$FN \subset (A_1B_1C_1)$
$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$
т.к. призма
$\alpha \cap (ABC) = CM$
$\alpha \cap (A_1B_1C_1) = FN$
$\Rightarrow FN \parallel CM$

3) CF

4) CMNF — искомое сечение.

Введём с. координат через т. A как показано на рисунке.

$AHCC_1$ — пар-м $\Rightarrow$ (т.к. $C_1A \parallel CH$; $AH \parallel CC_1$)

$AH = CC_1 = z$

$AO = OB_1 = A_1O = OB$ (по св-ву т. пересечения диагоналей в прямоугольнике

⇓

$z_O = \frac{1}{2} z_{A_1} = \frac{1}{2} z$

⇓

$\frac{OM}{OH} = \frac{z_O - z_M}{z_O - z_H} = \frac{1}{3}$

Ан-но: $\frac{x_O - x_M}{x_O - x_H} = \frac{1}{3} \Rightarrow x_M = \frac{2}{3} x_O = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{14}{3}}$

$y_H = y_M = 0$

(из $\triangle N_0OH \sim \triangle AMH$, т.к. $\angle N_0HO$ — общ. угол; $\angle MAH = \angle ON_0A$, т.к. $N_0O \parallel AM$ по усл. построения)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 111511

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 20

№6 (продолжение)

Ан-но ~~$\frac{x-x_N}{x_0-x_H}$~~ $\Rightarrow$ $\frac{x_N-x_0}{x_N-x_H} = \frac{z_N-z_0}{z_N-z_H} = \frac{1}{4}$ ~~$\frac{1}{2}$~~

$x_N - x_0 = \frac{1}{4}x_N$

$\frac{3}{4}x_N = x_0$

$x_N = \frac{4}{3}x_0 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{14}{3}} \cdot \frac{1}{2}$?

~~Вычисл~~

Т.к. $FN \parallel CM$, то высота, опущенная из т. N на CM будет равна высоте ~~этой~~ трапеции FNMC

$C\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{3}}; \frac{\sqrt{14}}{2}; 0\right)$??

$M\left(\sqrt{\frac{14}{3}} \cdot \frac{2}{3}; 0; 0\right)$?? $\frac{1}{2}$

$N\left(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{14}{3}}; 0; \frac{7}{2}\right)$

CM: ~~$\frac{\sqrt{14}}{2}y$~~ $ax+by+d=0$ (т.к. $\Delta z=0$) ?

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{3}}a + \frac{\sqrt{14}}{2}b + d = 0 \\ \sqrt{\frac{14}{3}} \cdot \frac{2}{3}a + d = 0 \Rightarrow d = -\sqrt{\frac{14}{3}} \cdot \frac{2}{3}a \end{cases}$$

$b = \frac{2-3}{6\sqrt{3}}a \cdot 2$

$b = \frac{\sqrt{3}}{9}a$

$\Downarrow$

CM: $\sqrt{3}ax + \frac{\sqrt{3}}{9}ay - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{14}{3}}a = 0$. y?

$S_{2y}(N; CM) = \frac{\left|a \cdot \frac{4}{3}\sqrt{\frac{14}{3}} - a \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{14}{3}}\right|}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{27}a^2}} = \frac{2\sqrt{14}}{~~\sqrt{27}~~\sqrt{28}} = 2\,\mathrm{k}$

~~(т.к. лежат в пл-ти)~~

$CM = \sqrt{\frac{14}{4} + \frac{14}{3\cdot 36}} = \sqrt{\frac{14}{4}\left(1\cdot\frac{1}{3\cdot 9}\cdot 28\right)} = \sqrt{\frac{7\cdot 14}{3\cdot 9}}$

При этом $S = \sqrt{S_{xy}^2 + z^2} = \sqrt{20z^2}$

~~Т.к. $FN \parallel CM$, то:~~

~~$FN: \; ax + \frac{\sqrt{3}}{9}ay + d_1 = 0$~~

~~Т.к. $N \in FN$, то:~~

~~$\frac{4}{3}\frac{\sqrt{14}}{3}a = -d_1 \Rightarrow d_1 = -\frac{4\sqrt{14}}{9}$~~

$MN \cap BB_1 = L$

$LC \cap C_1B_1 = F$

$\Downarrow$

$\Delta LFB_1 \sim \Delta LCB$ ($\angle CLB$ — общий, $FB_1 \parallel CB \Rightarrow \angle CBL = \angle LB_1F$ как соответствующие)

HAM?

Ещё $\Delta LB_1N \sim \Delta MAH$ (т.к. $B_1B \parallel A_1A$, то $\angle B_1LN = \angle AHM$ (как накрест лежащие), а т.к. $A_1B_1 \parallel AB$, то $\angle BMN = \angle A_1NA$, при этом $\angle BMN = \angle AMH$ и $\angle LNB_1 = \angle A_1NO \Rightarrow \angle LNB_1 = \angle AMH$) при этом

?? ??? ΔHAM

$NB_1 = AM = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{14}{3}} \Rightarrow \Delta LB_1N = \Delta MAH \Rightarrow LB_1 = AH = z$

Тогда $\frac{z_L - z_F}{z_L - z_C} = \frac{1}{2} = \frac{x_L - x_F}{x_L - x_C} = \frac{y_L - y_F}{y_L - y_C}$

$C\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{3}}; \frac{\sqrt{14}}{2}; 0\right)$; $L\left(\frac{\sqrt{14}}{3}; 0; 2z\right)$

$\Downarrow$

$x_F = \frac{1}{2}(x_C + x_L) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{14}{3}}$

$y_F = \frac{1}{2}y_C = \frac{\sqrt{14}}{4}$

$$\Rightarrow \quad FN = \sqrt{\cancel{14}\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^2 \frac{14}{3} + \frac{14\cdot 1}{16}} = \sqrt{14\cdot\left(\frac{49}{144}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{16}\right)}$$

При этом $S_2 = \frac{FN + CM}{2} \cdot g = \sqrt{2+z^2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{3}}\left(\sqrt{\frac{49}{144}+\frac{3}{\cancel{48}}} + \sqrt{\frac{7}{9}}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{4}$

$$\sqrt{2+z^2}\left(\sqrt{\frac{49}{144}+\frac{3}{\cancel{16}}}+\sqrt{\frac{7}{9}}\right) = \frac{3\cancel{\cdot}\sqrt{14}}{28} \quad ??!$$

При этом $V_1 = \frac{1}{2}\, z\cdot\left(S_{FNB_1} + S_{CMB}\right)$??

$$V_2 = z\cdot S_{ACB} - V_1$$

$$S_{ACB} = \frac{14}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{CMB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{14}{3}}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{\frac{14}{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{9}$$

$$S_{FNB_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot FB_1\cdot NB_1 =$$

$$NB_1 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{14}{3}}$$

$$FB_1 = \sqrt{\frac{14}{3}\left(\frac{1}{16}+\frac{3}{\cancel{12}\,16}\right)} = \sqrt{\frac{14}{3}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{3}\left(\sqrt{\frac{14}{3}}\right)^2\cdot\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{9\cdot 2} = \frac{7\sqrt{3}}{18}$$

$$V_1 = z\,\frac{35\sqrt{3}}{36}$$

$$V_2 = z\cdot\cancel{\frac{91}{36}\sqrt{3}} = \frac{27\sqrt{3}}{36} = \cancel{\frac{9\sqrt{3}}{12}}\ \frac{3}{4}\sqrt{3}\ z$$

Ответ: $\frac{35\sqrt{3}}{36}\cdot\sqrt{\frac{9\cdot 14}{28^2\left(\sqrt{\frac{49}{144}+\frac{3}{16}}+\sqrt{\frac{7}{9}}\right)^2}-2}$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{9\cdot 14}{28^2\left(\sqrt{\frac{49}{144}+\frac{3}{16}}+\sqrt{\frac{7}{9}}\right)^2}-2}$$