Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 111403

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Плотников Алексей Сергеевич

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Балашиха МАОУ „Лицей"

11 Б

Регистрационный номер ШМ 4354

Вариант задания 17

Дата проведения “11” марта 2018 г.

Подпись участника

45 (сорок пять)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
3	12	–	20	10	–					45

111403

Шифр ______________

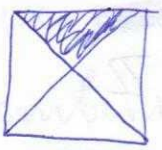
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

403

Вариант № 17

№1

1) пронумеруем квадраты, как 1, 2, 3, 4, 5
каждый выглядит



чтобы стопка оказалась непрозрачной, необходимо 4 из 5 квадратов положить так, чтобы закрашенные ~~т~~ треугольники не совпадали, а последний квадрат может быть повернут любой стороной и находиться ~~в ме~~ на любом месте стопки

2) допустим нефиксированный квадрат 1, тогда 2, 3, 4 и 5 зафиксированы нужной ориентацией сторон. ~~Остается передвигать~~ Двигаем квадрат 1. Он может быть на любом из 5 мест в высоту и на каждом месте имеет 4 ориентации, т.е $4 \cdot 5 = 20$ случаев. Также 4 остальных могут меняться между собой по уровню – $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способа. Все $24 \cdot 20 = 480$

3) теперь нефиксированный квадрат 2. Он уже имеет 3 ориентации из-за повторений с п.(2), т.е здесь $3 \cdot 5 \cdot 24 = 360$ случаев

4) аналогично возможная ориентация нефиксированного квадрата будет уменьшаться каждый раз на один. Это ещё $2 \cdot 5 \cdot 24 = 240$ и $1 \cdot 5 \cdot 24 = 120$ и $0 \cdot 5 \cdot 24 = 0$

5) $480+360+240+120=1200$

Ответ: $1200 \cdot 6$ способов $= 7200$

3

№2

$\sin^4(2025x)+\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)=1 \iff$

$\sin^4(2025x)+\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)-(\sin^2(2025x)+\cos^2(2025x))^2=0 \iff$

$\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)-2\sin^2(2025x)\cos^2(2025x)-\cos^4(2025x)=0 \iff$

$\cos^2(2025x)(\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2016}(2025x)-2\sin^2(2025x)-\cos^2(2025x))=0 \iff$

$$\left[\begin{array}{l}\cos(2025x)=0 \quad (1)\\ \cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2016}(2025x)=2\sin^2(2025x)+\cos^2(2025x) \quad (2)\end{array}\right.$$

(1) $\iff 2025x=\frac{\pi}{2}+\pi n$

$x=\frac{\pi}{4050}+\frac{\pi n}{2025}$, $n\in\mathbb{Z}$

(2) $\iff \cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2016}(2025x)=1+\sin^2(2025x)$,

т.к. $-1\le\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2016}(2025x)\le 1$

$1\le 1+\sin^2(2025x)\le 2$, то ур-е равносильно:

$$\begin{cases}\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2016}(2025x)=1\\ \sin^2(2025x)=0\end{cases} \iff \begin{cases}\cos^{2019}(2016x)=1\\ \cos^{2016}(2025x)=1\\ \sin(2025x)=0\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}\cos(2016x)=1\\ \cos(2025x)=\pm1\\ \sin(2025x)=0\end{cases} \iff \begin{cases}2016x=2\pi k\\ 2025x=\pi l\\ 2025x=\pi m\end{cases} \iff \begin{cases}2016x=2\pi k\\ 2025x=\pi l\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}x=\frac{\pi k}{1008}\\ x=\frac{\pi l}{2025}\end{cases};\ k,l,m\in\mathbb{Z}$$

$\frac{\pi k}{1008}=\frac{\pi l}{2025}$; $1008l=2025k$; $k=\frac{1008l}{2025}$

$1008=\cancel{2^2\cdot 25}\ 2^4\cdot7\cdot3^2$

$2025=3^4\cdot5^2$

$k=\frac{2^4\cdot7\cdot3^2}{3^4\cdot5^2}l=\frac{2^4\cdot7}{3^2\cdot5^2}\cdot l$, т.к. k и l целые, то l должно быть таким, чтобы $(3^2\cdot5^2)$ сократилось, т.е. $l=3^2\cdot5^2\cdot m=$

$=225m$

Для (2) получаем: $x=\frac{\pi k}{1008}$, $k=\frac{112\cdot225m}{225}=112m$, $m\in\mathbb{Z}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4050}+\frac{\pi n}{2025} \\ \begin{cases} x=\frac{\pi k}{1008} \\ k=112m \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4050}+\frac{\pi n}{2023} \\ x=\frac{\pi m}{9} \end{array}\right.$; $m, n \in \mathbb{Z}$ V 12

№ 4

$$\frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)+2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}} \geq 50g(g^2(x))$$

$$g(x)=\frac{3}{x^2-4x+5}$$

$$g(x)=\frac{3}{(x-2)^2+1}, \quad x\in\mathbb{R}$$

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ g_{наиб}=g(2)=3 \\ \bullet\ \text{при } x\to\pm\infty \quad g(x)\to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0<g(x)\leq 3$

1) $0<\frac{g(x)}{3}\leq 1 \Leftrightarrow$

$\frac{3}{5}<g\left(\frac{g(x)}{3}\right)\leq\frac{3}{2}$ (т.к $g(0)=\frac{3}{5}$; $g(1)=\frac{3}{2}$) $\Leftrightarrow$

$\frac{2}{5}<\frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)\leq 1$

2) $\frac{1}{g(x)}\geq\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$2-\frac{3}{g(x)}\leq -1+2=1 \Leftrightarrow$

$0\leq\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}\leq 1 \Leftrightarrow$

$0\leq 2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}\leq 2$

3) $0<g^2(x)\leq 9 \Leftrightarrow$

$\frac{3}{50}\leq g(g^2(x))\leq 3 \Leftrightarrow$

(наибольшее достигается, наименьшее при $g^2(x)=9$)

$3\leq 50g(g^2(x))\leq 150$

4) получается в исходном неравенстве левая часть не больше 3, а правая – не меньше 3, тогда оно равносильно

$$\begin{cases} \frac{2}{3}g(g(x)/3)=1 \\ 2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}=2 \\ 50g(g^2(x))=3 \end{cases}$$

из первого ур-я $x=2$, проверим:

$g(2)=3 \Rightarrow 2-\frac{3}{g(x)}=1 \Rightarrow 2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}=2$ – верно

$g^2(2)=9 \Rightarrow g(g^2(2))=\frac{3}{50} \Rightarrow 50g(g^2(2))=3$ – верно

Ответ: $x=2$ V

20

N 5

$6a - 2ab\,tgx + \sqrt{2(x+|x+b\,tgx|+b\,tgx} = 4 + 2ax$ (*)

при каких a и b ед. решение?

1) $x + b\,tgx \le 0$ (1)

$(*) \Leftrightarrow 6a - 2ab\,tgx + \sqrt{2(x - x + b\,tgx - b\,tgx)} = 4 + 2ax \Leftrightarrow$

$6a - 2ab\,tgx = 4 + 2ax \Leftrightarrow$

$3a - ab\,tgx = 2 + ax$ ($a=0$; $0=2$, т.е. корней нет)

левая часть - видоизменённый график тангенса, правая часть - прямая вида $y=kx+b$

Это ур-е будет иметь ед. решение, если ~~про~~ правая часть обратится в точку, ~~это либо~~ т.е. $x=0$

$3a - ab\,tg0 = 2$

$3a = 2$

$a = \frac{2}{3}$ - подставим в исходное:

$2 - \frac{2}{3}b\,tgx = 2 + \frac{2}{3}x$

$x = -b\,tgx$, чтобы корень был единственным, очевидно что b должно быть равно нулю.

$\begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ проверим условие (1)

$0 + 0 \cdot tg0 = 0 \le 0$ - верно

2) $x + b\,tgx > 0$ (2)

$6a - 2ab\,tgx + \sqrt{4(x+b\,tgx)} = 4 + 2ax \Leftrightarrow$

(*) $\Leftrightarrow 6a - 2ab\,tgx + 2\sqrt{x+b\,tgx} = 4 + 2ax \Leftrightarrow$

$ab\,tgx + ax - \sqrt{x+b\,tgx} + 2 - 3a = 0 \Leftrightarrow$

$a(b\,tgx + x) - \sqrt{x + b\,tgx} + 2 - 3a = 0$

Введём замену: $t = \sqrt{b\,tgx + x}$, $t > 0$

$at^2 - t + 2 - 3a = 0$ ~~$\Leftrightarrow$~~

~~$t^2 - \frac{1}{a}t + \frac{2}{a} - 3 = 0$~~

a) $a = 0$

$-t + 2 = 0$; $t = 2$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

111403

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 17

$\sqrt{b\,tgx+x}=2$

$b\,tgx+x=4$

$b\,tgx=-x+4$, аналогично ~~[illegible]~~ из свойств графиков

$b=0$, чтобы был единственный корень

$0=-x+4$

$x=4$

проверим ус-вие (2): $4+0>0$ - верно

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ x=4 \end{cases}$$

б) $a\neq 0$

$t^2-\frac{1}{a}t+\frac{2}{a}-3=0$

Единственное t большее нуля если:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D=0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1\cdot x_2\geq 0 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} D>0 \\ x_1x_2<0 \end{cases} (2) \\ \begin{cases} x_1x_2=0 \\ D>0 \\ x_1+x_2>0 \end{cases} (3) \end{array}\right.$$

~~$\frac{1}{a^2}-\frac{8}{a}+12=0$~~ система (1):

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2}-\frac{8}{a}+12=0 \\ \frac{1}{a}>0 \\ \frac{2}{a}-3\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 12a^2-8a+1=0 \\ a>0 \\ 0<a\leq\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=\frac{2}{12}=\frac{1}{6} \\ a=\frac{6}{12}=\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ 0<a\leq\frac{2}{3} \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} a=\frac{1}{6} \\ a=\frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{3} \\ t=1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{\cancel{\$}x+tgx\cdot b} \\ \sqrt{x+b\,tgx}= \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x+b\,tgx=\frac{1}{9} \\ x+b\,tgx=1 \end{array}\right.$$, анал-но предыдущему $b=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9};\ a=\frac{1}{6};\ b=0 \\ x=1;\ a=\frac{1}{2};\ b=0 \end{array}\right.$$

система (2):

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2}-\frac{8}{a}+12>0 \quad | \cdot a^2>0 \\ \frac{2}{a}-3<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 12a^2-8a+1>0 \\ \left[\begin{array}{l} a>\frac{2}{3} \\ a<0 \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a>\frac{1}{2} \\ a<\frac{1}{6} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a>\frac{2}{3} \\ a<0 \end{array}\right. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} a>\frac{2}{3} \\ a<0 \end{array}\right.$$

при этих a берём больший корень $t=\dfrac{\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{6}{a}+12}}{2}$

$$t=\frac{1+\sqrt{12a^2-8a+1}}{2a}$$

$$\sqrt{x+b\,tgx}=\frac{1+\sqrt{12a^2-8a+1}}{2a}$$

$$x+b\,tgx=\frac{(1+\sqrt{12a^2-8a+1})^2}{4a^2}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ x=\frac{(1+\sqrt{12a^2-8a+1})^2}{4a^2} \\ \left[\begin{array}{l} a>\frac{2}{3} \\ a<0 \end{array}\right. \end{cases}$$

система (3):

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2}-\frac{8}{a}+12>0 \\ \frac{2}{a}-3=0 \\ \frac{1}{a}>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a>\cancel{\frac{2}{3}}\ \frac{1}{2} \\ a<\frac{1}{6} \end{array}\right. \\ a=\frac{2}{3} \\ a>0 \end{cases} \qquad a=\frac{2}{3}$$

$$t^2-\frac{3}{2}t+3-3=0$$

$$t\left(t-\frac{3}{2}\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\frac{3}{2} \end{array}\right., t>0 \qquad t=\frac{3}{2}$$

$$t=\frac{3}{2}$$

$$x+b\,tgx=\frac{9}{4}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ x=\frac{9}{4} \\ a=\frac{2}{3} \end{cases}$$ ~~, но при этих же а и в х=0, значит, не подходи~~

Ответ: $\begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=0 \\ x=\frac{1}{9} \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \\ x=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=0 \\ x=\frac{9}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a>\frac{2}{3} \\ a<0 \end{array}\right. \\ b=0 \\ x=\frac{(1+\sqrt{12a^2-8a+1})^2}{4a^2} \end{cases}$?

Линейный случай?

О.Д.З?

$a < 0$?

$a \in \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$?

10