Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

111563

Шифр ______________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математике
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Корягина Анна Михайловна

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, ГБОУ лицей № 1580

Регистрационный номер ШМ 5164

Вариант задания № 19

+1 мат Паб
+1 мат Паб

Дата проведения “11” 03 2018 г.

С работой ознакомлена.
16.03.2018 Коря

Подпись участника Корг

65 (шестьдесят пять)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

111563

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
6	9	–	20	10	20					65

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

№ 4.

$$\frac{2}{3} g\left(\frac{g(x)}{2}\right) + \sqrt{2 - \frac{2}{g(x)}} \geq 13 g(g^3(x)) \qquad g(x) = \frac{6}{x^2-4x+7}.$$

$\frac{g(x)}{2} = t$; $1g(x) \to 1t$; $t = \frac{6}{(x^2-4x+7)\cdot 2} = \frac{3}{x^2-4x+7}$; $g(x) = 2t$.

$\frac{2}{3} g(t) + \sqrt{2-\frac{1}{t}} \geq 13 g((2t)^3)$; $\frac{4}{3}t(t) + \sqrt{2-\frac{1}{t}} \geq 26t\ (8t^3)$

$g(x) = \frac{6}{x^2-4x+7}$. ОДЗ: $x^2-4x+7 \neq 0$. $\frac{D}{4} = 4 - 7 < 0$, $a > 0 \Rightarrow x^2-4x+7 > 0$ при $\forall x$. $\Rightarrow g(x) > 0$ при $\forall x$.

~~$g(x) = 6(x^2-4x+7)^{-1}$~~

~~$g'(x) = -6(x^2-4x+7)^{-2}\cdot(2x-4)$~~

$= \frac{6(-2x+4)}{x^2-4x+7} = 0$. $\neq 0$ при $\forall x$. $-2x+4 = 0$. $x = 2$.

g': $+$ 2 $-$ x; g: т. max.

$g(x) \leq 2$ $\qquad g(2) = \frac{6}{4-8+7} = \frac{6}{3} = 2$

$\Rightarrow t \leq 1$.

$\Rightarrow \frac{g(x)}{2} \leq 1$. $\quad g\left(\frac{g(x)}{2}\right)$ – ? $\quad \frac{g(x)}{2}$: 0, 1, 2, т. max. $\quad g(1) = \frac{6}{1-4+7} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

$g\left(\frac{g(x)}{2}\right) \leq \frac{3}{2}$

$\frac{2}{3} g\left(g\frac{(x)}{2}\right) \leq 1$.

$$\begin{cases} g(x) > 0. \\ g(x) \le 2 \end{cases}$$

прог. N4.

$\Leftrightarrow \frac{1}{g(x)} \ge \frac{1}{2}$

$\frac{2}{g(x)} \ge 1. \quad |\cdot(-1)$

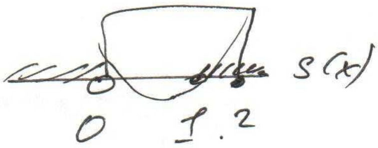
$-\frac{2}{g(x)} \le -1. \quad |+2.$

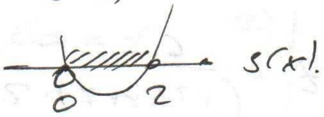
$2 - \frac{2}{g(x)} \le 1.$

$$\begin{cases} 2 - \frac{2}{g(x)} \ge 0 \\ 2 - \frac{2}{g(x)} \le 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

- $\frac{g(x)-1}{g(x)} \ge 0$
- $1 - \frac{2}{g(x)} \le 0.$

$\frac{g(x)-2}{g(x)} \le 0.$





$$\begin{cases} g(x) \ge 1. \\ g(x) \le 2. \end{cases} \ !$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 1. \\ g(x) \le 2. \end{cases}$$

+ пред усл.

$g(x) \le 2. \quad g(x) \ge 1.$

$\frac{g(x)}{2} \le 1. \quad \frac{g(x)}{2} \ge \frac{1}{2}.$

$g(\frac{gx}{2}) \le \frac{3}{2}.$

$\frac{2}{3} g(\frac{gx}{2}) \ge 1.$

$\frac{g(x)}{2}$: $\frac{1}{2}$, 1.

$g(\frac{1}{2}) = \frac{6}{\frac{1}{4} - 2 + 7} = \frac{6 \cdot 4}{1 - 8 + 28} = \frac{6 \cdot 4}{21} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{8}{7}.$

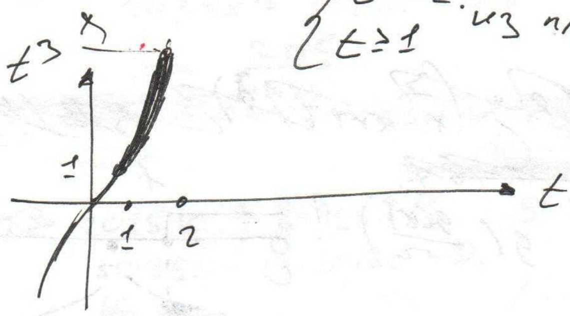
- $g(\frac{g(x)}{2}) \ge \frac{8}{7}.$

$\frac{2}{3} g(\frac{gx}{2}) \ge \frac{16}{21}.$

$\cancel{g^3(x) = \frac{6^3}{(x^2-4x+7)^3}}$

$13 g(g^3(x)) - ?$

$g(x) = t; \quad \begin{cases} t \le 2 \\ t \ge 1 \end{cases}$ из пред.



$t^3 \in [1; 8].$

$g(t^3) - ?$

t^3: 1, 2, 8; max, min.

$g(1) = \frac{6}{1-4+7} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$g(8) = \frac{6}{64-32+7} = \frac{6}{32+7} = \frac{6}{39}$

наим

$13 g(t^3) \le 26.$

$13 g(t^3) \ge \frac{6}{39} \cdot 13 = 2.$

$$\Rightarrow.\ \underbrace{\underbrace{\frac{2}{3}g\left(\frac{s(x)}{2}\right)}_{\leq 1} + \underbrace{\sqrt{2-\frac{2}{s(x)}}}_{\leq 1}}_{\leq 2 \text{ при } \forall x \in ОДЗ} \geq \underbrace{13 g\left(g^2(x)\right)}_{\geq 2 \text{ при } \forall x \in ОДЗ}$$ прод. №4.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}g\left(\frac{s(x)}{2}\right) + \sqrt{2-\frac{2}{s(x)}} = 13 g\left(s^2(x)\right) \\ ОДЗ. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 2 \\ ОДЗ. \end{cases}$$

$$\frac{6}{x^2-4x+7} = 2; \quad 3 = x^2-4x+7.$$

$$x^2-4x+4=0.$$

$$(x-2)^2=0.$$

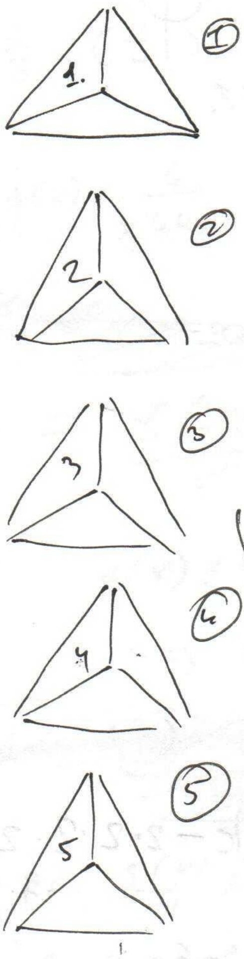
$$x=2.$$

Ответ: $x=2$.

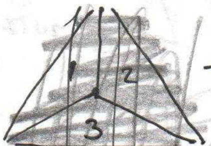
20

№1.

1, 2... — цвета



(последовательно укладываем)



— укладывается однозначно.

=> все стекла закрыты.

3·3 — повороты еще двух стёкол.

~~9 вар. для 1 тройки из 5.~~

6

1) выберем три стекла из 5 с учётом порядк.

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 3\cdot4\cdot5 = 60$$

— их можно менять местами, у нас.

[3] [2] [1] — часть стекла.

3! — учли, что их можно крутить.

$60 \cdot 3! = 60\cdot2\cdot3 = 360$

2) две ост. стекла могут располог. как угодно.

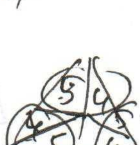
низ	4	5
верх	5	4

2 способа

у. (цвет поверх цвета) 3 вар.

\+

3 вар. +



3 вар.

$\boxed{9 \text{ вар.}}$

3). для посл-и предпосл. стёкл. $2\cdot9=18$.

4) всего $360\cdot18 =$

$$\begin{array}{r} 360 \\ \times\ 18 \\ \hline 2880 \\ 360\ \ \\ \hline 6480 \end{array}$$

Ответ: 6480.

№2.

$\sin^4(2016x) + \cos^{2017}(2025x)\cdot\cos^{2018}(2016x) = 1.$

$-(1-\sin^4(2016x)) + \ldots = 0$

$-(1-\sin^2(2016x))(1+\sin^2(2016x)) + \ldots = 0.$

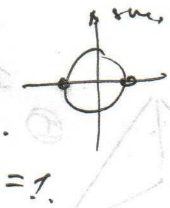
$\cos^2 2016x\,(-1-\sin^2(2016x)) + \cos^{2017}(2025x)\cos^{2018}(2016x) = 0$

$\cos^2(2016x)\left(-1-\sin^2(2016x) + \cos^{2017}(2025x)\cos^{2016}(2016x)\right) = 0.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos(2016x)=0\\ \cos^{2017}(2025x)\cos^{2016}(2016x) = \sin^2(2016x)+1.\end{array}\right.$

≤ 1. при $\forall x$ $\qquad \ge 1$. при $\forall x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos(2016x)=0.\\ \text{левое} = \text{правое} = 1.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos(2016x)=0 \quad (1)\\ \begin{cases}\sin(2016x)=0\\ \cos^{2016}(2016x)=1.\\ \cos^{2017}(2025x)=1.\end{cases}\end{array}\right.$



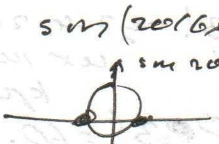
(1) $\cos(2016x)=0$

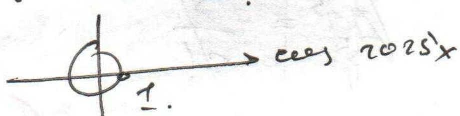
$2016x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\in\mathbb{Z}$

~~$2016x = 2\pi n, n\in\mathbb{Z}$~~ ~~$x = \frac{\pi n}{1008}$~~

$x = \frac{\pi}{2\cdot 2016} + \frac{\pi n}{2016}$ +.

(2) $\sin(2016x)=0$ $\qquad \cos(2025x)=1.$





$2016x = \pi k, k\in\mathbb{Z}$ $\qquad 2025x = 2\pi l.\ l\in\mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{2016}k$ $\qquad x = \frac{2\pi l}{2025}$

$\frac{\pi}{2016}k = \frac{2\pi l}{2025}$

$2025k = 2\cdot 2016\cdot l$ $\qquad 5\cdot5\cdot9\cdot9k - 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot7\cdot9l = 0$

$2025k - 2\cdot 2016 l = 0.$

$k =$

$25\cdot 9k - 2^6\cdot 7\cdot l = 0.$

$l_0 = 25\cdot 9$

$l = 25\cdot 9 + 2^6\cdot 7t, t\in\mathbb{Z}$

$= 225 + 448t, t\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2\cdot 2016} + \frac{\pi n}{2016}, n\in\mathbb{Z}\\ x = \frac{2\pi}{2025}(225+448t), t\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

9

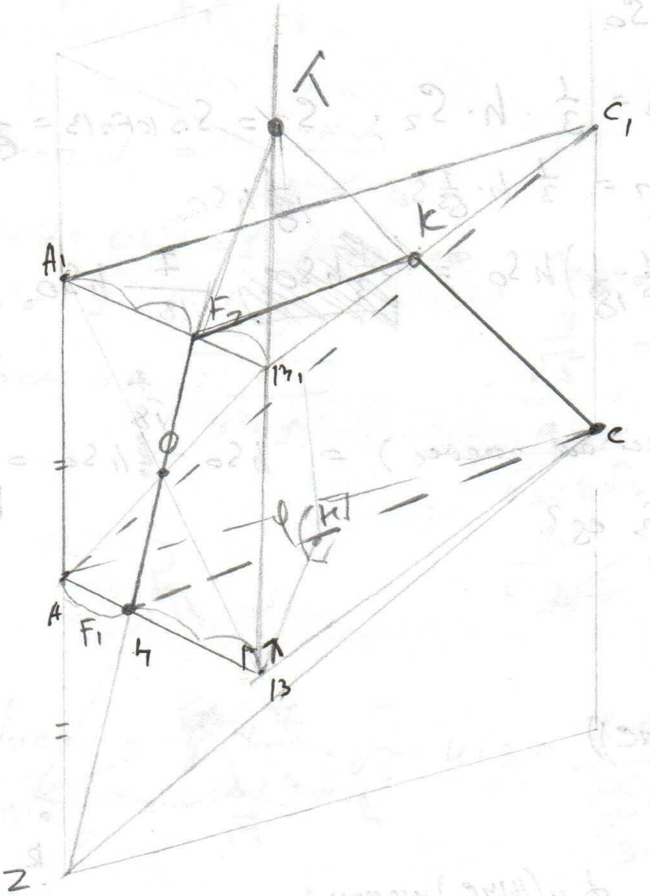
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 111563
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

№ 6.



прав. призма

$\alpha = (\parallel AC_1,\ C;\ O)$

O – ц. симметрии (AA_1B_1B).

$S_{сеч\ \alpha} = \frac{9}{\sqrt{5}}$

Решение:

1) (A_1C_1C): $ZC \parallel AC_1$;

$(ZC) \subset \alpha$ по опр.

A – сер A_1Z;

2) (A_1AB): $(ZO) \cap (AB) - F_1$

$(ZO) \cap (A_1B_1) - F_2$.

$\triangle ZAF_1 \sim \triangle ZA_1F_2$

~~по одн. углу~~. по двум углам.

$\frac{ZA}{ZA_1} = \frac{1}{2} = \frac{AF_1}{A_1F_2}$.

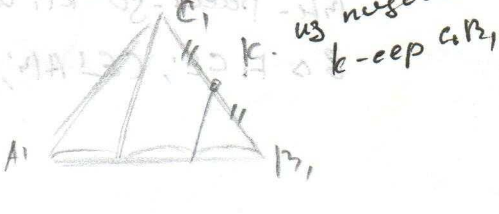
т.к. O – ц. симм. (A_1AB_1B), то $\frac{A_1F_2}{F_2B_1} = \frac{F_1B}{AF_1}$

3). (ACB): (F_1C)

4) по св. пар. плоскостей.

$\left\{\begin{array}{l} (A_1B_1C_1) \parallel (ABC) \text{ – т.к. призма.} \\ (F_1C) \subset (ABC) \\ (F_2K) \subset (A_1B_1C_1) \end{array}\right.$ $F_1C \parallel F_2K$

K – сер C_1B_1 из подобия



5) (B_1BC): (KC)

$\alpha = (F_1F_2KC)$ – искомая

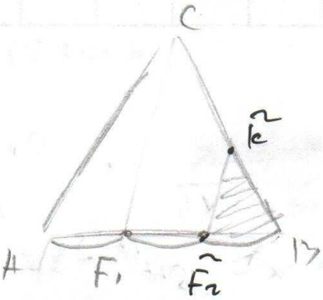
по призн. $\left\{\begin{array}{l} ZC \subset \alpha. \\ ZC \parallel AC_1 \end{array}\right. \Rightarrow \alpha \parallel AC_1$

прод. №6.

6) $S_{\triangle AMC} = S_0$.
$C_1C = h$.

7) Достроим фигуру $F_1MCF_2B_1K$ до пирамиды.
$(F_1F_2)\cap(B_1B)\cap(KC) - T$. $V_{F_1MCF_2B_1K} = V_{иск\,1}$.

$\triangle F_1BT \sim \triangle F_2B_1T$ по 2-ум углам.
$\Rightarrow B_1T = BB_1 = h$.

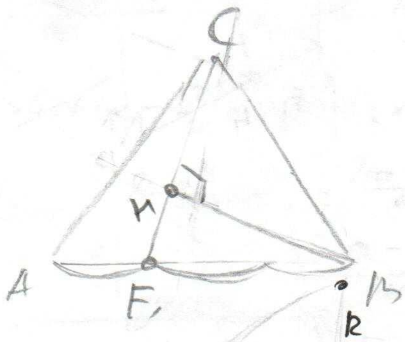


Пусть объём этой пир $= V_1$
$V_1 = \frac{1}{3}\, 2h\cdot S_1$; $S_1 = S_{\triangle F_1BC}$.
$S_1 = \frac{2}{3}\cdot S_0$
$V_1 = \frac{1}{3}\cdot 2h\cdot \frac{2}{3}S_0 = \frac{4}{9}hS_0$.
Пусть $V_2 = V_{F_2KB_1T}$; $V_2 = \frac{1}{3}\cdot h\cdot S_2$; $S_2 = S_{\triangle KF_2B} = \frac{1}{6}S_0$
$V_2 = \frac{1}{3}\cdot h\cdot\frac{1}{6}S_0 = \frac{1}{18}hS_0$.
Тогда $V_{иск\,1} = V_1 - V_2 = \left(\frac{4}{9}-\frac{1}{18}\right)hS_0 = \frac{7}{18}hS_0$.

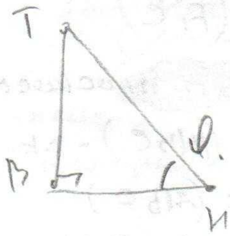
8) $V_{призмы} = V_0 = h\cdot S_0$
$\Rightarrow V_{иск\,2}$ (объём оставшейся части) $= hS_0 - \frac{7}{18}hS_0 = \boxed{\frac{11}{18}hS_0}$.

9) $S_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\cdot 4\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ ед².

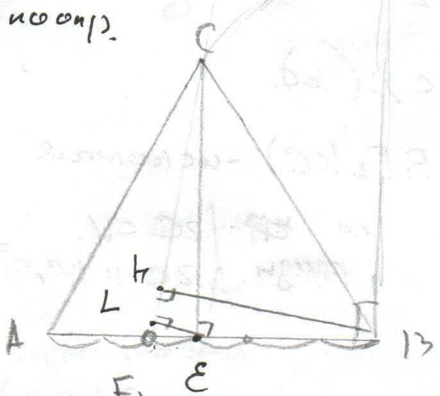
10) h-?
$TB\perp(AMC)$
$BH\perp F_1C$ ($F_1C = \alpha\cap(AMC)$)
по т о $3^x\perp$. $TH\perp F_1C$.



$\varphi = \angle THB$ — угол между α и (AMC) по опр.



$tg\,\varphi = \frac{TB}{BH} = \frac{2h}{BH}$.



11) $BR\perp AB$.
BH — расст-до RF_1 из $\angle B = 90°$.
В $\triangle F_1CE$, $CE\perp AB$, $LE = \frac{CE\cdot F_1E}{\sqrt{CE^2+F_1E^2}}$;
$CE = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.
$F_1E = \frac{a}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

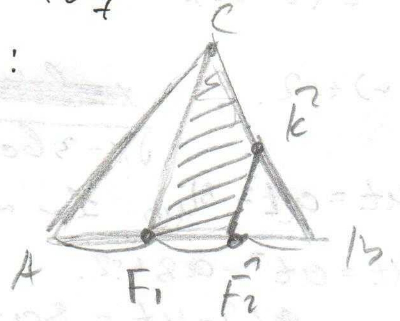
прод. №6.

$$LE = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}}{\cancel{2}\sqrt{3+\frac{1}{9}}} = \frac{2\sqrt{3}\cdot 3}{3\sqrt{3\cdot 9+1}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{28}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

$$\frac{BH}{LE} = \frac{BF_1}{EF_1} = \frac{4}{1};\quad BH = 4\,LE = 4\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$tg\,\varphi = \frac{2h}{4\sqrt{\frac{3}{7}}} = \frac{h}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$$

12) $S_{пр}\,\alpha$:



$S_{пр\,\alpha} = S_{\,CKF_2F_1}$

$S_{пр\,\alpha} = \cancel{S_{\triangle}}$

$$S_1 - S_2 = \frac{2}{3}S_0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S_0 =$$
$$= S_0\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right) = S_0\,\frac{3}{6} =$$
$$= \frac{1}{2}S_0 = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ ед^2.$$

13) $S_{сеч\,\alpha} = \dfrac{S_{пр\,\alpha}}{\cos\alpha}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad /:\cos^2\alpha \neq 0$

$tg^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}.$

$\cos\alpha = +\sqrt{\dfrac{1}{tg^2+1}}.$

$S_{сеч\,\alpha} = S_{пр\,\alpha}\sqrt{tg^2\alpha+1}$

$$\frac{9}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{h^2\cdot 7}{4\cdot 3}+1}$$

$$\frac{9}{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7h^2+12}{12}} \quad /^{\wedge}2.$$

$$\frac{81}{5\cdot\cancel{4}\cdot 3} = \frac{7h^2+12}{\cancel{12}};\quad (7h^2+12)\,5 = 81$$

$35h^2 + 12\cdot 5 - 81 = 0.$

$h^2 = \dfrac{81-60}{35}.$

$h^2 = \dfrac{21}{35} = \dfrac{3}{5}$

$h = +\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

$$\Rightarrow V_{иск\,1} = \frac{7}{18}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot 4\sqrt{3} = \frac{7\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3}}{\cancel{18}_{3}\cdot\sqrt{5}} = \frac{14}{3\sqrt{5}}\ ед^3 = \frac{14\sqrt{5}}{15}\ ед^3$$

$$V_{иск\,2} = \frac{11}{18}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot 4\sqrt{3} = \frac{11\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3}}{\cancel{18}_{3}\cdot\sqrt{5}} = \frac{22}{3\sqrt{5}} = \frac{22\sqrt{5}}{15}\ ед^3.$$

Ответ: $V_{иск\,1} = \dfrac{14\sqrt{5}}{15}\ ед^3$

$V_{иск\,2} = \dfrac{22\sqrt{5}}{15}\ ед^3.$

20

№5.

$8a + 3ab\,ctg\,x + 2\sqrt{2(x + |x - 3b\,ctg\,x| - 3b\,ctg\,x)} = 12 + ax.$

a, b -? $\exists!$ реш-?

$\begin{cases} x \geq 3b\,ctg\,x \\ 8a + 3ab\,ctg\,x + 2\sqrt{2(x + x - 3b\,ctg\,x - 3b\,ctg\,x)} = 12 + ax \end{cases}$

$8a + 3ab\,ctg\,x + 2\sqrt{2(2x - 2\cdot 3b\,ctg\,x)} = 12 + ax.$

$8a + 3ab\,ctg\,x + 4\sqrt{x - 3b\,ctg\,x} = 12 + ax$

$4\sqrt{x - 3b\,ctg\,x} = a(x - 8 - 3b\,ctg\,x) + 12.$; $\sqrt{x - 3b\,ctg\,x} = t.$

$\cancel{4\sqrt{t} = a(t-8)+12.}$

$\cancel{\begin{cases} 16t^2 = a^2(t-8)^2 + 144 + 2\cdot 12\cdot a(t-8) \\ t \geq 0 \end{cases}}$

$4t = a(t^2 - 8) + 12.$ $1x - 1t.$

$4t = at^2 - a8 + 12.$

$at^2 - 4t - 8a + 12 = 0.$

$\frac{D}{4} = 4 + 8a^2 - 12a = 4(2a^2 - 3a + 1)$

$\begin{cases} x < 3b\,ctg\,x. \\ 8a + 3ab\,ctg\,x + 2\sqrt{2(x - x + 3b\,ctg\,x - 3b\,ctg\,x)} = 12 + ax. \end{cases}$

$8a + 3ab\,ctg\,x = 12 + ax. \;|: a \neq 0$

$x = \frac{8a + 3ab\,ctg\,x - 12}{a} < 3b\,ctg\,x.$

~~x опр. однозначно.~~ при $a = 0$: $0 = 12$ $\varnothing$

~~=> найдём a и b при которых ∃ 2 реш., исключим их; более двух решений давать не может; ...~~

$8 + \cancel{3b\,ctg\,x} - \frac{12}{a} < \cancel{3b\,ctg\,x}$

$8 - \frac{12}{a} < 0;$ $\frac{8a - 12}{a} < 0$

$\frac{a - \frac{3}{2}}{a} < 0.$

$0 \quad \frac{3}{2} \quad a$

$a \in (0; \frac{3}{2})$

Пусто.

x_0 - реш.

$-x_0$ - тоже реш.

$8a + 3ab\,ctg\,x_0 = 12 + ax_0$

$8a + 3ab\,ctg\,x_0 = 12 - ax_0.$ $\Rightarrow x_0 = -x_0$

$\Rightarrow$ $8a + 3ab\,ctg\,x = 12 + ax$ всегда опр. однозначно. $\Rightarrow x_0 = 0.$

реш. $\exists$ при $a \in (0; \frac{3}{2})$

см. продолжение.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 111563

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 19

продолжение № 5.

$$\sqrt{x-3\,\mathrm{arcctg}\,x}=t.$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 0 \\ x-3\,\mathrm{arcctg}\,x=t^2\geq 0 \end{cases}$ (1)

$\Leftrightarrow t\geq 0$

$at^2-4t-8a+12=0.$

$\frac{D}{4}=4(2a^2-3a+1)=4\cdot 2(a-1)(a-\frac{1}{2})=4(a-1)(2a-1).$

$2a^2-3a+1=0.$

$D=9-8=1.$

$a_{1,2}=\left[\begin{array}{l}\frac{3+1}{4}=1 \\ \frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$

(2)

$\begin{cases} a\in(0;\frac{3}{2}) \\ x<3\,\mathrm{arcctg}\,x \\ 8at+3a\,\mathrm{arcctg}\,x=12+ax \end{cases}$ — всегда $\exists!$ реш при $a\in(0;\frac{3}{2})$

1) $\begin{cases} (1) - \exists!\ \text{реш.} \\ (2)\ \varnothing. \end{cases}$

(1) $\exists!$ реш. $\left[\begin{array}{l}\frac{D}{4}=0. \\ t=\frac{2}{a}\end{array}\right.$ $4(a-1)(2a-1)=0.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1.\\ t=2.\end{cases} \\ \begin{cases}a=\frac{1}{2}.\\ t=4\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\ t=2.\\ x-3\,\mathrm{arcctg}\,x=4\end{cases} \quad \varnothing \text{ из-за } (2) \\ \begin{cases}a=\frac{1}{2}.\\ t=4\\ x-3\,\mathrm{arcctg}\,x=16\end{cases} \quad \varnothing \text{ из-за } (2)\end{array}\right.$

(2) $a\in(-\infty;0]\cup[\frac{3}{2};+\infty).$

$\Leftrightarrow \varnothing.$

2) $\begin{cases} (1) - \text{нет корней.} \\ (2) - \text{есть корень} \end{cases}$ $\begin{cases} D<0. \\ a\in(0;\frac{3}{2}) \end{cases}$

$\frac{1}{2}$ 1 a

0 $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ a

10

$a \in (\frac{1}{2}; 1)$ входит в ответ!