Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1

Шифр 218215
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету Математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Трошев Денис Евгеньевич

Город, № школы (образовательного учреждения) СШ №165, г. Алматы, 11 класс

Регистрационный номер ШМ-6178

Вариант задания 23

Дата проведения “18” марта 2018 г.

Подпись участника

52 (пятьдесят два)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	12	12	20	5	—					52

218215

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 23

№2 $$\frac{(x+5-4\sqrt{x+2})\log_3(x-3)}{(4^x-48\cdot 2^x+512)\cdot\log_2(11-x)} \geq 0$$

Разложим на множители, выразим логарифмы в аналогичном линейном виде неравенств:

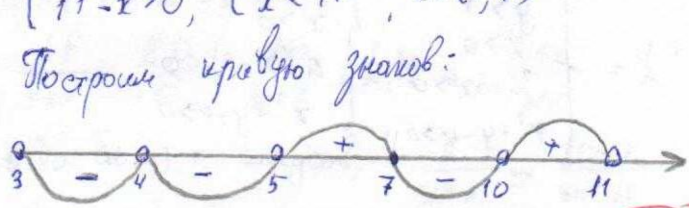
$$-\frac{(\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x+2}-1)\cdot(x-4)}{(2^x-16)(2^x-32)\cdot(x-10)} \geq 0 \quad , \quad \frac{(\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x+2}-1)(x-1)}{(2^x-2^4)(2^x-2^5)(x-10)} \leq 0$$

$x=7$, $x=-1$, $x=1$; $x\neq 4$, $x\neq 5$, $x\neq 10$

Определим ОДЗ:

$$\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x-3>0 \\ 11-x>0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x\geq -2 \\ x>3 \\ x<11 \end{cases}, \quad x\in(3;11)$$

Построим кривую знаков:



Значит, $x\in(3;4)\cup(4;5)\cup[7;10)$

Ответ: $x\in(3;4)\cup(4;5)\cup[7;10)$

12

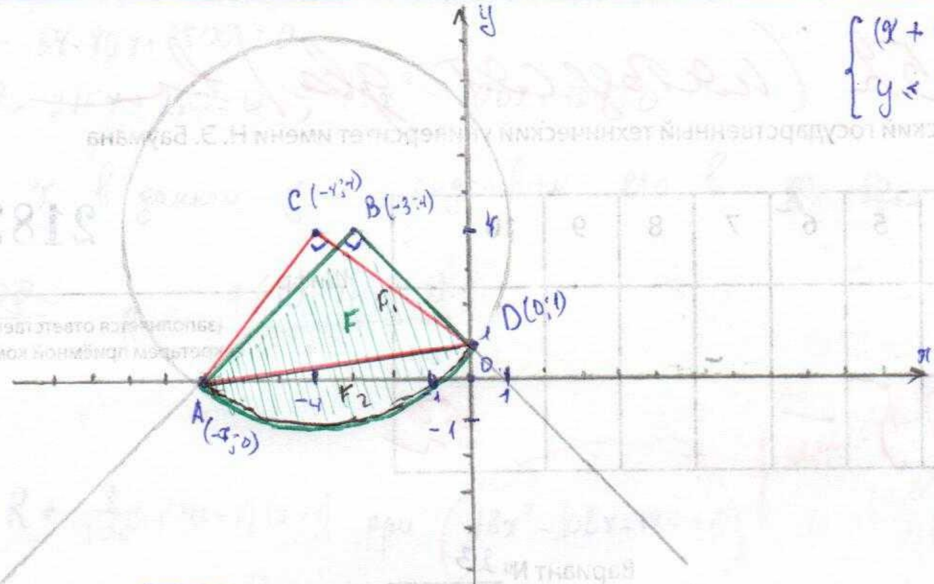
№4 Определим вид этих фигур:

$$\begin{cases} x^2+y^2+8(x-y)+7\leq 0 \\ y\leq 4-|x+3| \end{cases} ; \begin{cases} x^2+8x+y^2-8y+7\leq 0 \\ y\leq 4-|x+3| \end{cases} ; \begin{cases} (x+4)^2+(y-4)^2\leq 32-7 \\ y\leq 4-|x+3| \end{cases} ; \begin{cases} (x+4)^2+(y-4)^2\leq 5 \\ y\leq 4-|x+3| \end{cases}$$

Заметим, что ф.1 — окружность $\omega(C(-4;4);R=5)$, а неравенство обозначает его вн. область. Вторая фигура — два луча из общей точки $B(-3;4)$, а неравенство выражает внутреннюю область угла, образованного ими.

Выполним построение на графике Oxy:

$$\begin{cases}(x+4)^2+(y-4)^2\le 5^2\\ y\le 4-|x+3|\end{cases}$$



1) В $\triangle ABD$ $AB=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$
$BD=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$
$AD=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$.

Т.к. $AB^2+BD^2=AD^2$, то $\triangle ABD$ – прямоуг. и $\angle ABD=90°$

2) В $\triangle ACD$ $AC=CD=5$ (см у-е). Т.к $AC^2+CD^2=AD^2$, то $\triangle ACD$ – прямоуг, и $\angle ACD=90°$
$AD=5\sqrt{2}$

3) $S_F=\underset{F_1}{S_{ABD}}+\underset{F_2}{(S_{сект}-S_{ACD})}=\dfrac{AB\cdot BD}{2}+\dfrac{\pi R^2\cdot 90°}{360°}-\dfrac{R^2}{2}=12+\dfrac{25}{4}\pi-\dfrac{25}{2}=\dfrac{25\pi-2}{4}$ кв.ед

Ответ: $S_F=6{,}25\pi-0{,}5$ кв.ед

20

№5 $\begin{cases}\log_{|x-2|}(3a-ax)=2\log_{|x-2|}(y-x)\\ \sqrt{x^2+y-4}=x\end{cases}$

Найдем ОДЗ: $\begin{cases}|x-2|\ne 1\\ |x-2|\ne 0\\ y>x\\ x>0\\ 3a-ax>0\\ x^2+y-4>0\end{cases}$ $\begin{cases}x\ne\{1;2;3\}\\ y>x\\ x>0\\ a(x-3)<0\\ x^2+y-4>0\end{cases}$

1) Заметим, что в (2) $y-4$ и $\sqrt{x^2+y-4}=x$

2) Известно, что $\sqrt{x^2}=|x|$, т.е $y-4=0$
$y=4$ (также можно возвести в квадрат: $\begin{cases}x^2+y-4=x^2\\ y=4\\ x>0\end{cases}$

3) Значит по ОДЗ, $\begin{cases}x<4\\ x>0\end{cases}$, $x\in(0;4)$, $x\ne\{0;1;2;3\}$

4) $\log_{|x-2|}(3a-ax)=2\log_{|x-2|}(y-x)$
$\log_{|x-2|}(3a-ax)=\log_{|x-2|}(y-x)^2$, $(3a-ax)=(y-x)^2$
$x^2-2xy+y^2=3a-ax$

Т.к $y=4$, то $x^2-8x+16-3a+ax=0$
$x^2+x(a-8)+(16-3a)=0$

$D=(a-8)^2-4(16-3a)=a^2-16a+64-64+12a=a^2-4a=a(a-4)$

Если система имеет 2 разл. решения, то, $x_1\ne x_2$, а $D>0$. Тогда $a(a-4)>0$
$a\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$

В таком случае $x=\dfrac{-(a-8)\pm\sqrt{a(a-4)}}{2}=\dfrac{(8-a)\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$

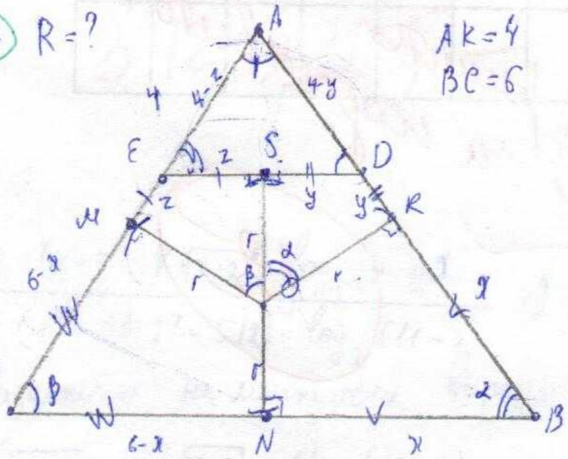
Также из ОДЗ, $a(x-3)<0$, т.е. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<0 \\ x>3 \end{cases} \\ \begin{cases} a>0 \\ x<3 \end{cases} \end{array}\right.$ — определение зависимости x от знака a

Ответ: $a \in (-\infty;0) \cup (4;+\infty)$

$$x_{1,2} = \frac{(8-a) \pm \sqrt{a^2-4a}}{2}, \text{ при } x \neq \{1;2;3\},\ x \in (0;4)$$

исследование? 5

№3 $R=?$



$AK=4$
$BC=6$
$S_{AED}=\frac{8}{3}$

Решение:

1) Т.к. около $CBDE$ можно описать и в него можно вписать окружность, то
$\angle C + \angle D = \angle B + \angle E = 180^\circ$

2) Т.к. $\angle CED = 180^\circ - \angle AED$
$\angle EDA = 180^\circ - \angle EDB$, то $\begin{cases} \angle B = \angle AED \\ \angle C = \angle EDA \end{cases}$

3) Отсюда $\triangle AED \sim \triangle ABC$ по 2 углам

4) По т. об отрезках касательных, проведенных из общей точки, $CN = MC$, $BN = BK$
$AK = AM = 4$

Также, $ME + DK = ED$

5) Пусть $BK = x$, тогда $AB = x+4$; $BN = x$, $CN = 6-x$, $AC = 10-x$

Значит $P_{ABC} = 10+4+6-x+x = 20$ ед. +

6) Т.к. $\triangle AED \sim \triangle ABC$, то

$\frac{AE}{x+4} = \frac{ED}{6} = \frac{AD}{10-x} = k$, (1) а $\frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{8}{3S_{ABC}}$

7) По сл. из т. синусов, $\frac{6}{\sin A} = \frac{10-x}{\sin B} = \frac{x+4}{\sin C} = 2R$

8) Из (1) составим систему: $\begin{cases} \frac{AE}{x+4} = \frac{ED}{6} \\ \frac{ED}{6} = \frac{AD}{10-x} \end{cases}$, Пусть $DK = y$, $ME = z$. Тогда

$\begin{cases} \frac{4-z}{x+4} = \frac{y+z}{6} \\ \frac{y+z}{6} = \frac{4-y}{10-x} \end{cases}$, $\begin{cases} 24-6z = xy+xz+4y+4z \\ 10y-xz = xy+10z = 24-6y \end{cases}$

Т.к. ~~около~~ $CBDE$ можно вп. окружность, то $(6-x+z)(x+y) = (y+z)\cdot 6$

$6x+6y-x^2-xy+xz+yz = 6y+6z$

$x^2+xy-xz-yz+6z-6x=0$

9) $S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \frac{6(10-x)(x+4)}{4R} = \sqrt{4\cdot 10\cdot x\cdot(6-x)}$ (2)

10) $k = \frac{P_1}{P_2} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{4-z+4-y+z+y}{10-x+4+x+6} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ +

11) Значит, $\frac{8}{3S_{ABC}} = \frac{4}{25}$, $S_{ABC} = \frac{25\cdot \cancel{8}^2}{3\cdot\cancel{4}} = \frac{50}{3}$ +

12) Из (2) получаем $\frac{2500}{9} = 40x(6-x) \mid \cdot 9$

$360x^2 - 54\cdot 40x + 2500 = 0$

$36x^2 - 216x + 250 = 0$, $18x^2 - 108x + 125 = 0$

Получив x в данном у-и, подставим его в $\frac{50}{3} = \frac{3(10-x)(x+4)}{2R}$

$R = \frac{9(10-x)(x+4)}{100}$

Ответ: $R = \frac{9}{100}(10-x)(x+4)$ при $18x^2 - 108x + 125 = 0$

решить и подставить!

12

№1 Если число имеет 30 разл. делителей (включая 1 и само число), то необходимо найти число члены разложения которого дают 28 делителей.

Пусть $x = a\cdot b$, тогда $D = \{1; a; b; ab\}$ – 4 делителя

$x = a\cdot b\cdot c$, тогда $D = \{1, a, b, c, ab, ac, bc, abc\}$ – 8 делителей

$x = a\cdot b\cdot c\cdot d$, тогда $D = \{1, a, b, c, d, ab, ac, ad, bc, bd, cd, abc, abd, bcd, acd, abcd\}$ – 16 делителей

$x = a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e$, тогда $D = \{1, a, b, c, d, e, ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de, abc, abd, abe, bcd, bce, cde,$ $ade, adc, abcd, bcde, abde, abce, acde, bde, ace, abcde)$ – 32 делителя

Таким образом заметим, что если множители числа различны и простые, $N_D = 2^i$, i – число множи...

При $D = 32$ наступает перебор, но если заменять один из множителей на идентичный ... будет $D < 32$. Поэтому рассмотрим $D = 64$, т.е. $x = a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot f$.

Т.к. $D \neq 64$ $(D > 30)$, то заменим самый большой множитель на наименьший. Определим вид делителей:

$D = \{1, a, b, c, d, e, f, ab, ac, ad, ae, af, bc, bd, bf, cd, ce, cf, de, df, ef, abc, def, bcd, aef, cde,$ $abf, ace, bdf, abd, cef, abe, cdf, bce, adf, bcf, ade, acd, bef, \cancel{abe}, \cancel{cef}, abe...$ $cdef, bdef, bcef, bcdf, bcde, adef, acef, acde, abef, abdf, abde, abcf, abce, abcd, abc...$ $bcdef, acdef, abdef, abcef, abcdf, abcdef\}$ – 64 делителя.

Заменив f на a, получим $32 + 4 = 34$ одинаковых делителей. Если заменить b на a, получим ещё 17 пар одинаковых делителей. Таким образом, число $x = a^3\cdot b\cdot c\cdot d$ имеет $64 - 34 = 30$ де...

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 218215

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 23

№1 (продолжение)

Итак, $x = a^3 \cdot b \cdot d \cdot e$ – искомое число, причем $a \neq b \neq d \neq e$, а a, b, d, e – простые числа, отличные от 1. Поэтому при $x = min$, $a, b, d, e = min$, т.е являются первыми 4 членами ряда простых чисел: 2, 3, 7, 5

Значит, $x = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 = 24 \cdot 35 = 840$

Ответ: $x = 840$

3

$(3+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 4 \cdot 2^3 = 32$

дешевле!