+9

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

111020

Шифр ____________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Кулева Мария Алексеевна

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Иваново, МБОУ „Лицей № 33"

Регистрационный номер ШМ4436

Вариант задания 18

Дата проведения "11" марта 2018 г.

Подпись участника ____________

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

сорок пять

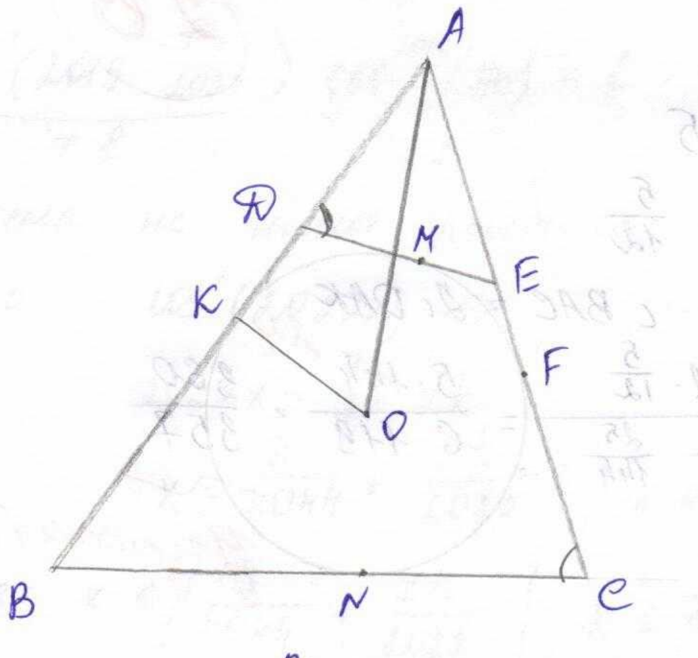
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	9	16	20	0	0					45

Шифр 111020
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

111020

Вариант № 18

№ 3.



Дано:
$\triangle ABC$
$S(ADE) = 24$.
$AK = 12$
$BDEC$ – опис; впис.
$BC = 18$
Найти: $tg\angle BAC$.

Решение.

1. по св-ву вписанного 4угольника:
$\angle C + \angle BDE = 180°$
но $\angle BDE + \angle ADE = 180°$ | $\angle C = \angle ADE$.

2. $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ по двум углам.
$\frac{BC}{DE} = k$
$S(ACB) = k^2 \cdot S(ADE)$
$P(ACB) = k \cdot P(ADE)$

3. по св-ву отрезков касательных: $BK = BN$, $KD = DM$, $ME = EF$,
$FC = NC$, $AK = AF$

4. $P(ADE) = AD + AE + DM + ME = AD + AE + KD + EF = AK + AF = 2AK =$
$= 2\cdot 12 = 24$

$P(ABC) = AD + KD + BK + BN + NC + FC + EF + AE =$

$= AD + KD + 2BN + 2NC + AF = 2BC + 2AK = 2\cdot(18+12) = 60$

$k = \dfrac{P(ABC)}{P(ADE)} = \dfrac{60}{24} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$

$S(ABC) = k^2 \cdot S(ADE) = \dfrac{25}{4}\cdot 24 = 150$

5. $S(ABC) = \dfrac{P(ABC)}{2}\cdot OK$

26

$(OK = R)$

$OK = \dfrac{2S(ABC)}{P(ABC)} = \dfrac{2\cdot 150}{60} = 5$

6. в $\triangle AOK$: $\operatorname{tg}\angle OAK = \dfrac{OK}{AK} = \dfrac{5}{12}$

7. AO - биссектриса $\angle BAC$, т.е. $\angle BAC = 2\angle OAK$

$\operatorname{tg}\angle BAC = \dfrac{2\operatorname{tg}\angle OAK}{1-\operatorname{tg}^2\angle OAK} = \dfrac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \dfrac{5\cdot \overset{24}{144}}{\cancel{6}\cdot 119} = \dfrac{360}{357}$

Ответ: $\cancel{\dfrac{360}{357}}$. $\dfrac{120}{119}$.

упрости

№2.

$\sin^4(2022x) + \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2018}(2022x) = 1$

$\cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2018}(2022x) = (1-\sin^2(2022x))(1+\sin^2(2022x))$

$\cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2018}(2022x) = \cos^2(2022x)\cdot(1+\sin^2(2022x))$

$$\left[\begin{array}{l}\cos^2(2022x) = 0\\ \underbrace{\cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x)}_{\leq 1} = \underbrace{1+\sin^2(2022x)}_{\geq 1}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos^2(2022x)=0 \\ \begin{cases} \cos^{2017}(2019x)\cdot\cos^{2016}(2022x)=1 & (1) \\ \cancel{\cos}\ 1+\sin^2(2022x)=1 & (2) \end{cases} \end{array}\right.$$

$\cancel{2022x=\frac{\pi}{2}+\pi n}$

для решения системы достаточно чтобы решения второго уравнения удовлетворяли первому

$\sin^2(2022x)=0$ и $\cos(2019x)=1$.

$2022x=\pi n$

$x=\frac{\pi n}{2022}$, $n\in Z$.

подставим $x=\frac{\pi n}{2022}$ в (1):

$\underbrace{\cos^{2017}\left(2019\cdot\frac{\pi n}{2022}\right)}_{\neq 1}\cdot\underbrace{\cos^{2016}(\pi n)}_{=1}=1$ – неверно

можно перечь.

система не имеет решений.

тогда, $\cos^2(2022x)=0$

$2022x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

$x=\frac{\pi}{4044}+\frac{\pi k}{2022}$, $k\in Z$.

Ответ: $x\in\left\{\frac{\pi}{4044}+\frac{\pi k}{2022}\right\}$, $k\in Z$.

9

нижнее фикс! 4!

№1.

Всего способов расположения стёкл будет: $5!\cdot 4^5$ $\cancel{122880}$

Способов, чтобы стопка была полностью непрозрачна:

$5!\cdot 4\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5!\cdot 4!\cdot 4$ –

Тогда оставшихся вариантов: $5!\cdot 4^5-5!\cdot 4!\cdot 4=5!\cdot 4^2(4^3-3!)=$

$=120\cdot 16\cdot(64-6)=120\cdot 16\cdot 58=110360$

Ответ: 110 360

№4.

$$\frac{3}{4}g\left(\frac{g(x)}{2}\right)+\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}\geqslant 19g(g^3(x)) \quad , \text{где } g(x)=\frac{4}{x^2-4x+6}$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{\left(\frac{g(x)}{2}\right)^2-4\left(\frac{g(x)}{2}\right)+6}+\sqrt{2-\frac{2}{g(x)}}\geqslant 19\cdot\frac{4}{(g(x))^6-4(g(x))^3+6}$$

пусть $g(x)=t$

$$\frac{12}{t^2-8t+24}+\sqrt{\frac{2t-2}{t}}\geqslant\frac{76}{t^6-4t^3+6} \quad (1)$$

$$\frac{2t-2}{t}\geqslant 0$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t\geqslant 1\\ t<0\end{array}\right.\\ t\leqslant 2 \ (*)\end{cases}$$

$\underline{1\leqslant t\leqslant 2}$

(*) $g(x)=\frac{4}{x^2-4x+6}$

$x_в=\frac{4}{2}=2$

$g(x_в)=\frac{4}{4-8+6}=2$

$g(x)\leqslant 2$, т.е. $t\leqslant 2$

1) $f(t)=\frac{12}{t^2-8t+24}$, $1\leqslant t\leqslant 2$; $E(f)$ - ?

$$f'(t)=-\frac{(2t-8)\cdot 12}{(t^2-8t+24)^2}$$

$f'(t)=0 \quad t=4\notin[1;2]$, т.е. $f(t)$ - монотонна (возрастает) на $[1;2]$.

$f(1)=\frac{12}{1-8+24}=\frac{12}{17}$

$f(2)=\frac{12}{4-16+24}=1$

$E(f)=\left[\frac{12}{17};1\right]$ на $t\in[1;2]$.

2) $y(t)=\sqrt{\frac{2t-2}{t}}$, $1\leqslant t\leqslant 2$

$$y'(t)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{2t-2}{t}}}\cdot 2\cdot\left(\frac{t-1}{t}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\frac{2t-2}{t}}}\cdot\frac{t-(t-1)}{t^2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2t-2}{t}}\cdot t^2}$$

$y(t)$ - монотонна (возрастает) на $[1;2]$

$y(1)=0$

$y(2)=1$

$E(y)=[0;1]$ на $t\in[1;2]$.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

111020

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 18

3) $\varphi(t) = \dfrac{76}{t^6-4t^3+6}$

$\varphi'(t) = 76 \cdot \left(-\dfrac{6t^5-12t^2}{(t^6-4t^3+6)^2}\right)$

$6t^5-12t^2=0$

$\left[\begin{array}{l} t=0 \quad \notin [1;2] \\ t=\sqrt[3]{2} \in [1;2] \end{array}\right.$

$\varphi(1) = \dfrac{76}{1-4+6} = \dfrac{76}{3} = 25\frac{1}{3}$

$\varphi(2) = \dfrac{76}{64-32+6} = \dfrac{76}{38} = 2$

$\varphi(\sqrt[3]{2}) = \dfrac{76}{4-8+6} = \dfrac{76}{2} = 38$

$E(\varphi) = [2;38]$ на $1 \le t \le 2$.

(1): $\underbrace{\dfrac{12}{t^2-8t+24}}_{\frac{12}{17}\le\ldots\le 1} + \underbrace{\sqrt{\dfrac{2t-2}{t}}}_{0\le\ldots\le 1} \geqslant \underbrace{\dfrac{76}{t^6-4t^3+6}}_{2\le\ldots\le 38}$

$\begin{cases} \dfrac{12}{t^2-8t+24} + \sqrt{\dfrac{2t-2}{t}} = 2 \\ \dfrac{76}{t^6-4t^3+6} = 2 \end{cases}$ — в ~~пра~~ левой части сумма двух возрастающих функций, т.е. уравнение имеет не более 1 корня

$t=2$

проверка для второго ур-ния:

$\dfrac{76}{64-32+6} = \dfrac{76}{38} = 2$ — верно.

решение системы: $t=2$.

$$g(x) = 2$$

$$\frac{4}{x^2-4x+6} = 2$$

$$\frac{4-2x^2+8x-12}{x^2-4x+6} = 0$$

$$2x^2-8x+8=0$$

$$x^2-4x+4=0$$

$$x=2$$

Ответ: $x=2$.

20