Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету

«Математика», осень 2016 г.

Вариант № 9

1. Две автомашины перевозили удобрения, делая одинаковое число рейсов. Оказалось, что на первую машину можно грузить на 4 тонны меньше, а на вторую на 3 тонны меньше, чем планировалось, поэтому каждой машине пришлось сделать по 10 лишних рейсов. При этом, как и планировалось, первая машина перевезла на 60 тонн больше, чем вторая. Сколько удобрений грузили в каждую машину и сколько рейсов было выполнено? (8 баллов)

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^6-5}}{x^3}-\frac{x^3}{\sqrt{x^6-5}}<\frac{5}{6}$. (8 баллов)

3. Какое наименьшее значение может принять сумма первых n членов арифметичес- кой прогрессии (a_n), если $a_{30}=3,\ a_{32}=11$? (8 баллов)

4. Решите уравнение $\frac{4\sin x\cos^2 x-2\sin x+2\sin^2 x-1}{\sqrt{\sin x-\cos x}}=0$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{|x|+21-7\sqrt{|x|+9}}{x^2-8|x|}>0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=\sqrt{1-g^2(x)}$, где $g(x)=\frac{\cos 6x+2\sin^2 3x}{2-2\cos 3x}$ (10 баллов)

7. В трапеции $ABCD$ основания AD=9, BC=2, углы A и D при основании равны $\operatorname{arctg} 4$ и $\operatorname{arctg}(2/3)$, соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CBE, где E – точка пересечения диагоналей трапеции. (12 баллов)

8. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси x, а координаты двух других вершин удовлетворяют уравнению $\sqrt{y}=5-x^2$?

(12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$2y-2=a(x-2),\quad \frac{4y}{|x|+x}=\sqrt{y}$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABCD$ служит прямоугольник $ABCD$. Высота пирамиды, равная h, совпадает с боковым ребром TA, а боковое ребро TC наклонено к плоскости основания под углом 30°. Плоскость, проходящая через ребро TC и параллельная диагонали основания BD,

образует с плоскостью основания угол $60°$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания BD?

(12 баллов)

Решение варианта №9

1. Две автомашины перевозили удобрения, делая одинаковое число рейсов. Оказалось, что на первую машину можно грузить на 4 тонны меньше, а на вторую на 3 тонны меньше, чем планировалось, поэтому каждой машине пришлось сделать по 10 лишних рейсов. При этом, как и планировалось, первая машина перевезла на 60 тонн больше, чем вторая. Сколько удобрений грузили в каждую машину и сколько рейсов было выполнено?

Решение:

Пусть x, y – грузоподъемность, t – число рейсов по плану.

$$\begin{cases} xt = (x-4)(t+10), \\ yt = (y-3)(t+10), \\ \quad xt - yt = 60, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 4t = 40, \\ 10y - 3t = 30, \\ (x-y)t = 60. \end{cases} \Rightarrow 10(x-y) - t = 10 \Rightarrow t^2 + 10t - 600 = 0.$$

Отсюда $t_1 = 20,\ t_2 = -30$ – посторонний корень; $x = 12,\ y = 9$. На первую машину грузили 8 т, на вторую 6 т, выполнено по 30 рейсов.

Ответ: 8 т, 6 т, 30 рейсов.

2. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^6-5}}{x^3} - \dfrac{x^3}{\sqrt{x^6-5}} < \dfrac{5}{6}$.

Решение: ОДЗ: $|x| > \sqrt[6]{5}$. $\dfrac{\sqrt{x^6-5}}{x^3} - \dfrac{x^3}{\sqrt{x^6-5}} < \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{x^3\sqrt{x^6-5}} < \dfrac{1}{6}$.

1) При $x > \sqrt[6]{5}$ неравенство верно.

2) При $x < -\sqrt[6]{5}$ приходим к неравенству $-x^3\sqrt{x^6-5} > 6$, или $\left(-x^3\sqrt{x^6-5}\right)^2 > 36$,

$x^{12} - 5x^6 - 36 > 0,\ (x^6+4)(x^6-9) > 0,\ (x^3+3)(x^3-3) > 0$. Поскольку $x < -\sqrt[6]{5}$, то $x < -\sqrt[3]{3}$.

Ответ: $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{3}) \cup (\sqrt[6]{5}; +\infty)$.

3. Какое наименьшее значение может принять сумма первых n членов арифметичес- кой прогрессии (a_n), если $a_{30} = 3,\ a_{32} = 11$?

Решение:

Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии, $\begin{cases} a + 29d = 3, \\ a + 31d = 11 \end{cases} \Leftrightarrow d = 4,\ a = -113$.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наименьшее значение, если $a_n < 0$, а $a_{n+1} \ge 0$. Так как $a_n = a + d(n-1)$, то из неравенства $-113 + 4(n-1) < 0$ найдем $n = [117/4] = 29$. Тогда $\min S_n = S_{29} = 0,5 \cdot (-113 - 113 + 4 \cdot 28) \cdot 29 = -1653$.

Ответ: –1653.

4. Решите уравнение $\dfrac{4\sin x\cos^2 x-2\sin x+2\sin^2 x-1}{\sqrt{\sin x-\cos x}}=0$. (8 баллов)

Решение:

$$\frac{4\sin x\cos^2 x-2\sin x+2\sin^2 x-1}{\sqrt{\sin x-\cos x}}=0 \Leftrightarrow \frac{4\sin x\cos^2 x-2\sin x-\cos 2x}{\sqrt{\sin x-\cos x}}=0.$$

При условии $\sin x-\cos x>0$ находим корни уравнения

$$4\sin x\cos^2 x-2\sin x-\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2\sin x(2\cos^2 x-1)-\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x-\cos 2x=0 \Leftrightarrow$$

$$(2\sin x-1)\cos 2x=0 \Leftrightarrow \quad 2\sin x-1=0, \quad \cos 2x=0 \Leftrightarrow$$

$x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$ $n\in Z$. С учетом условия $\sin x-\cos x>0$ окончательно имеем $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

5. Решите неравенство $\dfrac{|x|+21-7\sqrt{|x|+9}}{x^2-8|x|}>0$

Решение:

ОДЗ: $x\neq 0, \quad x\neq \pm 8.$

Разложим числитель на множители:

$$|x|+21-7\sqrt{|x|+9}=|x|+9-7\sqrt{|x|+9}+12=\left(\sqrt{|x|+9}\right)^2-7\sqrt{|x|+9}+12=\left(\sqrt{|x|+9}-3\right)\left(\sqrt{|x|+9}-4\right)$$

Имеем:

$$\frac{\left(\sqrt{|x|+9}-3\right)\left(\sqrt{|x|+9}-4\right)}{|x|(|x|-8)}>0 \Leftrightarrow \frac{(|x|+9-9)(|x|+9-16)}{|x|(|x|-8)}>0 \Leftrightarrow \frac{|x|(|x|-7)}{|x|(|x|-8)}>0.$$

Решая методом интервалов, получаем $|x|\in(0;\,7)\cup(8;\,+\infty)$.

Имеем $x\in(-\infty;\,-8)\cup(-7;\,0)\cup(0;\,7)\cup(8;\,+\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;\,-8)\cup(-7;\,0)\cup(0;\,7)\cup(8;\,+\infty)$

6. Найдите множество значений функции $f(x)=\sqrt{1-g^2(x)}$, где $g(x)=\dfrac{\cos 6x+2\sin^2 3x}{2-2\cos 3x}$.

Решение: $g(x)=\dfrac{\cos 6x+2\sin^2 3x}{2-2\cos 3x}=\dfrac{1}{2-2\cos 3x}$.

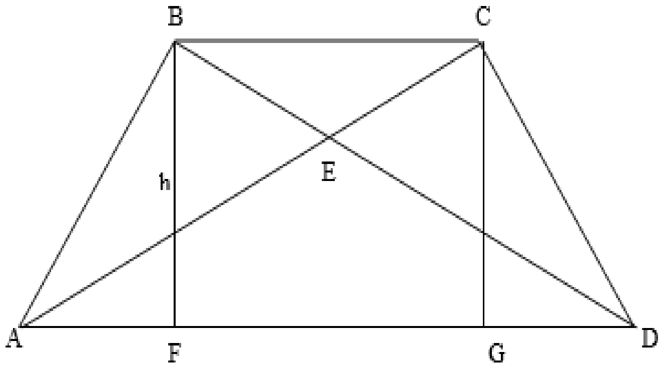
Функция $t=\cos 3x$ принимает значения $t\in[-1;\,1]$. Рассмотрим функцию $y=\dfrac{1}{2-2t}$, определенную на полуинтервале $[-1;\,1)$. Графиком этой функции является гипербола с асимптотами $t=1$ и $y=0$. Функция $y=\frac{1}{2-2t}$ на промежутке $[-1;1)$ неограниченно возрастает. Таким образом, минимальное значение y равно $\frac{1}{4}$, оно достигается в точке $t=-1$, и функция принимает все значения из промежутка $\left[\frac{1}{4};\infty\right)$.

Функция $f(x)=\sqrt{1-g^2(x)}$ определена для тех x, для которых $g(x)$ принимает значения из промежутка $[1/4;1]$. Множество значений функции $f(x)$ есть множество $E_f=\left[0;\sqrt{15}/4\right]$.

Ответ: $E_f=\left[0;\sqrt{15}/4\right]$.

7. В трапеции *ABCD* основания *AD*=9, BC=2, углы A и *D* при основании равны $\operatorname{arctg}4$ и $\operatorname{arctg}(2/3)$, соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *CBE*, где *E* – точка пересечения диагоналей трапеции.

Решение:



$BF\perp AD; CG\perp AD; BF=CG=h,\ FG=BC.$

Пусть $AF=x\Rightarrow$

$x\cdot tgA=((AD-BC)-x)tgD,$

$4x=\frac{2}{3}(AD-BC-x),$

$14x=2(AD-BC),\ \ x=\frac{AD-BC}{7}.$

$x=1,\ AG=x+BC=3,\ FD=AD-x=8.$

$h=4x=4$, $AC=\sqrt{AG^2+h^2}=5,$

$BD=\sqrt{FD^2+h^2}=4\sqrt{5}.$

$$\Delta BCE\approx\Delta AED;\quad \frac{BE}{ED}=\frac{CE}{AE}=\frac{BC}{AD}=\frac{2}{9}\quad\Rightarrow S_{CBE}=\frac{1}{2}BC\cdot\frac{2}{11}h=\frac{8}{11};\quad BE=\frac{2}{11}BD=\frac{8\sqrt{5}}{11};$$

$$EC=\frac{2}{11}AC=\frac{10}{11};\quad R_{on}=\frac{BC\cdot BE\cdot EC}{4S_{CBE}}=\frac{5\sqrt{5}}{11}.$$

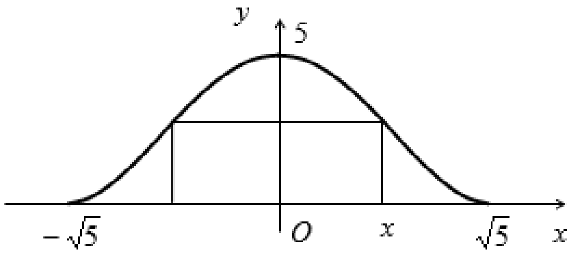
Ответ: $\frac{5\sqrt{5}}{11}$.

8. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси *x*, а координаты двух других вершин удовлетворяют уравнению $\sqrt{y}=5-x^2$?

$\sqrt{y}=5-x^2;\ y=\left(5-x^2\right)^2,\ |x|\le\sqrt{5}$.

$S(x)=2xy=2\left(x^5-10x^3+25x\right)$

$0 \le x \le \sqrt{5}$.



$S'(x) = 2\left(5x^4 - 30x^2 + 25\right) = 0$,

$10\left(x^4 - 6x^2 + 5\right) = 0;\ x^2 = 3 \pm 2$.

При $\left(x^2\right)_1 = 5,\ S\left(\sqrt{5}\right) = 0$.

При $\left(x^2\right)_2 = 1,\ x_2 = 1,\ S(1) = 32$ – наибольшее значение площади прямоугольника

Ответ: 32

9. Найдите все значения *a*, при которых система уравнений $2y - 2 = a(x-2),\quad \dfrac{4y}{|x| + x} = \sqrt{y}$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение:

ОДЗ: $x > 0,\ y \ge 0$.

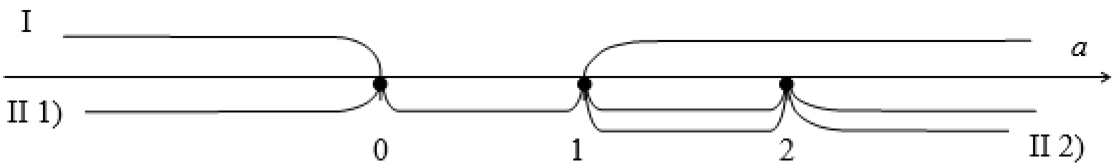
В ОДЗ второе уравнение системы принимает вид: $2y = x\sqrt{y}$.

I. $y = 0,\ x = 2 - \dfrac{2}{a} = \dfrac{2(a-1)}{a} > 0$, отсюда $\left[\begin{array}{l} a < 0, \\ a > 1. \end{array}\right.$

II. $y > 0,\ y = x^2/4,\ x > 0;\ (x-2)(x+2) = 2a(x-2)$.

1) $x = 2,\ y = 1,\ a \in R$.

2) $x + 2 = 2a,\ x = 2(a-1) > 0,\ a > 1$. Найденное решение $x = 2(a-1),\ y = (a-1)^2$ совпадает с предыдущим, если $2 = 2a - 2,\ a = 2$. Итак, при $a \in (1;2) \cup (2;+\infty)\ x = 2a - 2,\ y = (a-1)^2$.



Ответ:

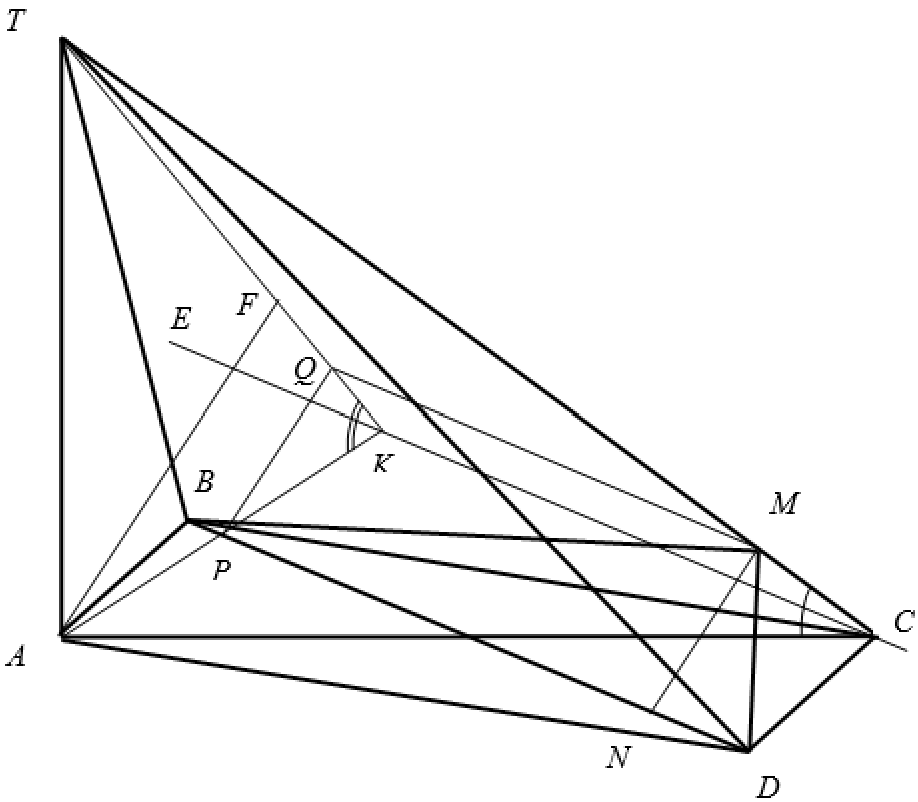
$a \in (-\infty;0) \cup \{2\},\ x_1 = 2 - 2/a,\ y_1 = 0;\ x_2 = 2,\ y_2 = 1$;

$a \in [0;1],\ x = 2,\ y = 1$;

$a \in (1;2) \cup (2;+\infty),\ x_1 = 2 - 2/a,\ y_1 = 0;\ x_2 = 2,\ y_2 = 1;\ x_3 = 2a - 2,\ y_3 = (a-1)^2$.

10. Основанием пирамиды *TABCD* служит прямоугольник *ABCD*. Высота пирамиды, равная h, совпадает с боковым ребром *TA*, а боковое ребро *TC* наклонено к плоскости основания под углом 30°. Плоскость, проходящая через ребро *TC* и параллельная диагонали основания *BD*, образует с плоскостью основания угол 60°. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания *BD*?

Решение:



Обозначим $\alpha = \angle TCA$, тогда $AC = BD = TA\,\mathrm{ctg}\angle TCA = h\,\mathrm{ctg}\alpha$. Проведем $EC \| BD,\ \ AK \perp EC,\ K \in EC$, обозначим $\beta = \angle TKA$. Пусть $P = AK \cap BD$, тогда $AP = PK$. Проведем $AF \perp TK$, $PQ \perp TK$, $QM \| (EC),\ M \in TC$ и $MN \perp BD$; тогда MN – высота сечения BMD, имеющая наименьшую длину, причем $MN = PQ$. Найдем площадь сечения: $PQ = 0,5AF = 0,5AT\cos\beta = 0,5h\cos\beta$, $S_{\Delta BMD} = 0,5BD \cdot MN = 0,25h^2\,\mathrm{ctg}\alpha\cos\beta$.

Ответ: $\alpha = 30°, \beta = 60°,\ S = h^2\sqrt{3}/8$.