Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету

«Математика», осень 2016 г.

Вариант № 15

1. Партию обуви, купленную за 180 тыс. рублей, в первую неделю продавали по цене, большей закупочной на 25%, затем наценка была снижена до 16% от закупочной цены; а вся партия обуви была продана на 20% дороже, чем куплена. На какую сумму продали обуви в первую неделю? (8 баллов)

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^6-21}}{x^3}-\frac{x^3}{\sqrt{x^6-21}}<\frac{21}{10}$. (8 баллов)

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии 113, 109, 105,…? (8 баллов)

4. Решите уравнение $\frac{\sin 2x-\cos 2x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\sin x+1}{\sqrt{\sqrt{3}\cos x-\sin x}}=0$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{19-|x-3|}{\sqrt{|x-3|-1}-2}\le 1$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=\sqrt{36-g^2(x)}$, где $g(x)=-8-2\cos 8x-4\cos 4x$ (10 баллов)

7. Площадь прямоугольного треугольника равна 1, а его гипотенуза равна $\sqrt{5}$. Найдите косинус острого угла между медианами данного треугольника, проведенными к его катетам. (12 баллов)

8. На прямой $x-y=5$ найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y=x^2/8$. Напишите уравнения этих касательных. (12 баллов)

9. Определите все значения a, при которых уравнение $x+|x|=4\sqrt{a(x-3)+2}$ имеет два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a.

(12 баллов)

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите длины сторон основания параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 20 и 8, а угол между ними $60°$. (12 баллов)

Решение варианта №15

1. Партию обуви, купленную за 180 тыс. рублей, в первую неделю продавали по цене, большей закупочной на 25%, затем наценка была снижена до 16% от закупочной цены; а вся партия обуви была продана на 20% дороже, чем куплена. На какую сумму продали обуви в первую неделю?

Решение:

x тыс. рублей – закупочная стоимость обуви, проданной в первую неделю, y – остатка.

$$\begin{cases} x+y=180, \\ 25x+16y=20(x+y); \end{cases} \quad \begin{cases} 5x=4y, \\ x+5/4\,x=180; \end{cases} \quad \begin{cases} x=80, \\ y=100. \end{cases}$$

Получено от продажи в первую неделю $80\cdot 1,25=100$ тыс. рублей.

Ответ: 100 тыс. рублей

2. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^6-21}}{x^3}-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^6-21}}<\dfrac{21}{10}$.

Решение:

ОДЗ: $|x|>\sqrt[6]{21}$. $\dfrac{\sqrt{x^6-21}}{x^3}-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^6-21}}<\dfrac{21}{10} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{x^3\sqrt{x^6-21}}<\dfrac{1}{10}$.

1) При $x>\sqrt[6]{21}$ неравенство верно.

2) При $x<-\sqrt[6]{21}$ приходим к неравенству $-x^3\sqrt{x^6-21}>10$, или $\left(-x^3\sqrt{x^6-21}\right)^2>100$,

$x^{12}-21x^6-100>0$, $(x^6+4)(x^6-25)>0$, $(x^3+5)(x^3-5)>0$. Поскольку $x<-\sqrt[6]{21}$, то $x<-\sqrt[3]{5}$.

Ответ: $x\in(-\infty;-\sqrt[3]{5})\cup(\sqrt[6]{21};+\infty)$.

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии 113, 109, 105,…?

Решение:

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наибольшее значение, если $a_n>0$, а $a_{n+1}\le 0$. Так как $a_n=a_1+d(n-1)$, то из неравенства $113-4(n-1)>0$ найдем $n=[117/4]=29$.

Тогда $\max S_n=S_{29}=0{,}5\cdot(113+113-4\cdot 28)\cdot 29=1653$.

Ответ: 1653.

4. Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x-\cos 2x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\sin x+1}{\sqrt{\sqrt{3}\cos x-\sin x}}=0$. (8 баллов)

Решение:

$$\frac{\sin 2x-\cos 2x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\sin x+1}{\sqrt{\sqrt{3}\cos x-\sin x}}=0 \Leftrightarrow \frac{\sin 2x+2\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\sin x}{\sqrt{\sqrt{3}\cos x-\sin x}}=0.$$

При условии $\sqrt{3}\cos x-\sin x>0$ находим корни уравнения $\sin 2x+2\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\sin x=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\sin x=0 \Leftrightarrow$ $2\sin x(\cos x+\sin x)+\sqrt{3}(\cos x+\sin x)=0 \Leftrightarrow (2\sin x+\sqrt{3})(\cos x+\sin x)=0 \Leftrightarrow$

$2\sin x+\sqrt{3}=0,\quad \sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \operatorname{tg} x=-1 \Leftrightarrow$

$x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n\ n\in Z$. С учетом условия $\sqrt{3}\cos x-\sin x>0$ окончательно имеем $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

5. Решите неравенство $\frac{19-|x-3|}{\sqrt{|x-3|-1}-2}\le 1$. (10 баллов)

Решение:

Замена: $\sqrt{|x-3|-1}=t\ge 0,\ x=t^2+1.$

$$\frac{19-t^2-1}{t-2}\le 1 \Leftrightarrow \frac{18-t^2-t+2}{t-2}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(t-4)(t+5)}{t-2}\ge 0 \overset{t\ge 0}{\Leftrightarrow} t\in[0;2)\cup[4;\infty).$$

$|x-3|-1\in[0;4)\cup[16;\infty)\Leftrightarrow |x-3|\in[1;5)\cup[17;\infty)$

$x-3\in(-\infty;-17]\cup(-5;-1]\cup[1;5)\cup[17;\infty) \Leftrightarrow x\in(-\infty;-14]\cup(-2;2]\cup[4;8)\cup[20;\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;-14]\cup(-2;2]\cup[4;8)\cup[20;\infty)$

6. Найдите множество значений функции $f(x)=\sqrt{36-g^2(x)}$, где $g(x)=-8-2\cos 8x-4\cos 4x$.

Решение:

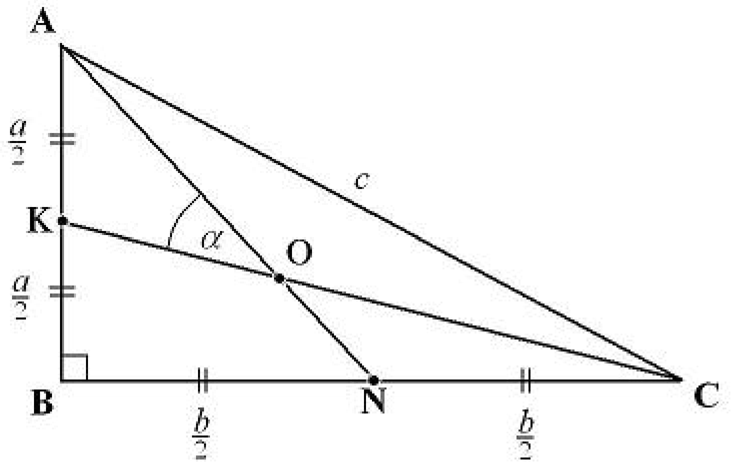
$g(x)=-8-2\cos 8x-4\cos 4x=-8-4\cos^2 4x+2-4\cos 4x=$
$-4\cos^2 4x-4\cos 4x-6=-(2\cos 4x+1)^2-5.$

Функция $t=2\cos 4x$ принимает значения $t\in[-2;2]$. Рассмотрим функцию $y=-5-(t+1)^2$, определенную на отрезке $[-2;2]$. Графиком этой функции является парабола с вершиной в точке $(-1;-5)$, ветви которой направлены вниз. Таким образом, максимальное значение y равно -5, оно достигается в точке $t=-1$, минимальное значение функция принимает в точке $t=2$, оно равно -14, и функция принимает все значения из промежутка $[-14;-5]$.

Функция $f(x)=\sqrt{36-g^2(x)}$ определена для тех x, для которых $g(x)$ принимает значения из промежутка $[-6;-5]$. Множество значений функции $f(x)$ есть множество $E_f=\left[0;\sqrt{11}\right]$.

Ответ: $E_f=\left[0;\sqrt{11}\right]$.

7. Площадь прямоугольного треугольника равна 1, а его гипотенуза равна $\sqrt{5}$. Найдите косинус острого угла между медианами данного треугольника, проведенными к его катетам.



Решение:

Пусть катеты треугольника равны a и b. Тогда $\begin{cases} \dfrac{ab}{2}=1, \\ a^2+b^2=5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{b}, \\ \dfrac{4}{b^2}+b^2=5 \end{cases}.$

Решая уравнение $b^4-5b^2+4=0$, получаем: $b^2=4$ или $b^2=1$. Тогда $b=2$ и $a=1$ или $b=1$ и $a=2$. По теореме Пифагора найдем медианы AN и CK:

$$AN^2=1+1=2 \Rightarrow AN=\sqrt{2}, \quad CK^2=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4} \Rightarrow CK=\frac{\sqrt{17}}{2}.$$

В треугольнике AOK имеем: $AK=\dfrac{1}{2}$, $KO=\dfrac{\sqrt{17}}{6}$, $AO=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. По теореме косинусов

$$\cos\alpha = \frac{AO^2 + KO^2 - AK^2}{2AO \cdot KO} = \frac{\frac{8}{9} + \frac{17}{36} - \frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{6} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{10}{2\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{34}}{34}$**.**

8. На прямой $x - y = 5$ найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y = x^2/8$. Напишите уравнения этих касательных**.**

Решение:

Пусть $y = ax^2$, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ – точки касания, $C(x_0; y_0)$ – точка пересечения касательных.

Уравнения касательных:

$y = ax_1^2 + 2a(x - x_1)$, или $y = 2ax_1x - ax_1^2$;

$y = ax_2^2 + 2a(x - x_2)$, или $y = 2ax_2x - ax_2^2$.

Из системы уравнений $\begin{cases} y_0 = 2ax_1x_0 - ax_1^2, \\ y_0 = 2ax_2x_0 - ax_2^2 \end{cases}$ находим $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = a\,x_1x_2$.

По условию перпендикулярности касательных $2ax_1 \cdot 2ax_2 = -1$, отсюда получаем $y_0 = -\frac{1}{4a}$. Из уравнения заданной прямой находим x_0.

Для отыскания x_1 и x_2 используем квадратное уравнение $x^2 - 2x_0x - \frac{1}{4a^2} = 0$. Отсюда $x_{1,2} = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{4a^2}}$.

Ответ: $a = \frac{1}{8}$, $y_0 = -2$, $x_0 = 5 + y_0 = 3$. $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+16} = 3 \pm 5$; $x_1 = 8, x_2 = -2$.

9. Определите все значения a, при которых уравнение $x + |x| = 4\sqrt{a(x-3)+2}$ имеет два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений.

Решение:

I. При $x \ge 0$, $x^2 - 4ax + 12a - 8 = 0$ (*).

1. Уравнение (*) имеет два различных неотрицательных корня

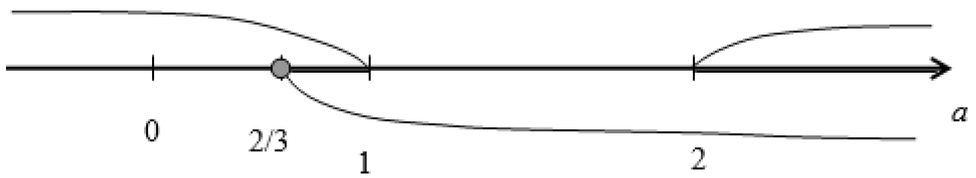
$$x_{1,2} = 2a \pm 2\sqrt{a^2 - 3a + 2}\text{, если: } \begin{cases} D/4 = 4(a^2 - 3a + 2) > 0, \\ a > 0, \\ 12a - 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < 1, \\ a > 2, \end{array}\right. \\ a > 0, \\ a \geq 2/3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2/3 \leq a < 1, \\ a > 2. \end{array}\right.$$

2. Уравнение (*) имеет один неотрицательный корень $x = 2a + 2\sqrt{a^2 - 3a + 2}$,

$$\text{если: } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} D = 0, \\ a \geq 0, \end{cases} \\ 12a - 8 < 0, \\ \begin{cases} a = 2/3, \\ a < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = 2, \\ a < 2/3. \end{array}\right.$$

II. При $x < 0$, $\quad x = \dfrac{3a - 2}{a} < 0 \Rightarrow 0 < a < 2/3$.

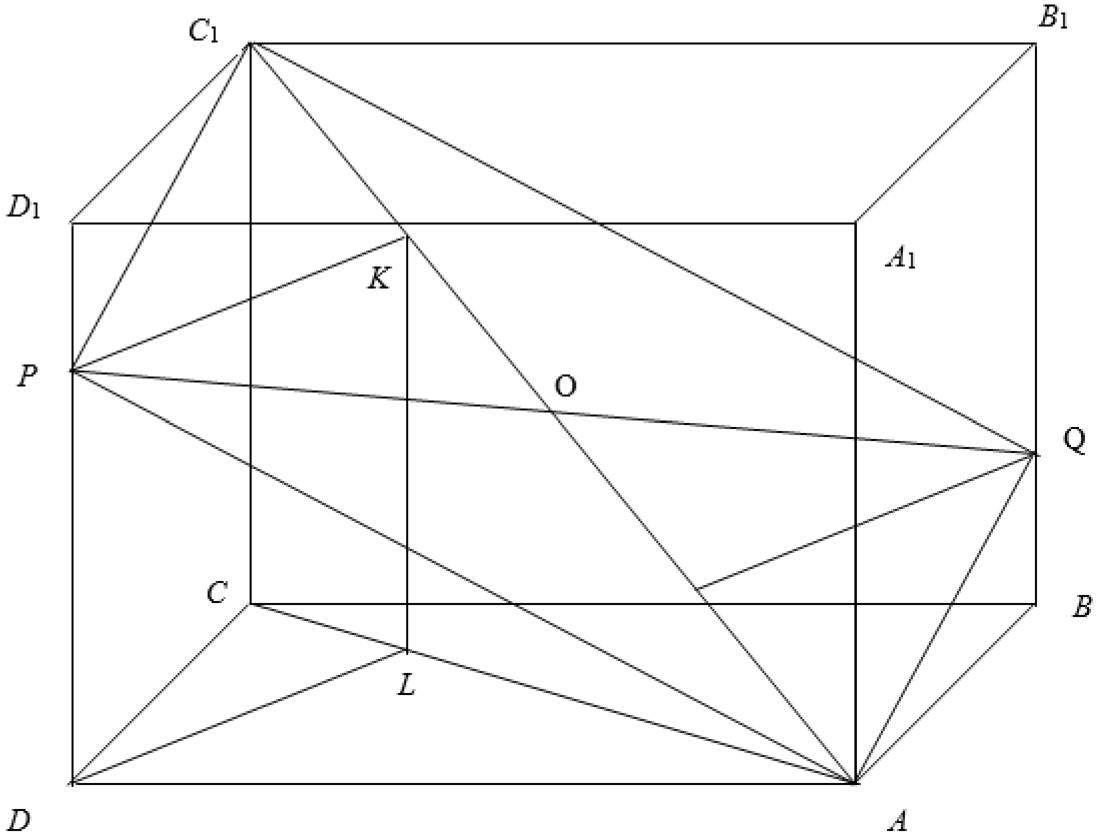
Сравнивая с I, 2, замечаем, что при $0 < a < 2/3$ также будет два различных корня.



Ответ: при $a \in [2/3;1) \cup (2;+\infty)$, $x_{1,2} = 2a \pm 2\sqrt{a^2 - 3a + 2}$; при $0 < a < 2/3$, $\quad x_1 = \dfrac{3a - 2}{a};$,

$x_2 = 2a + 2\sqrt{a^2 - 3a + 2}$.

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите длины сторон основания параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 20 и 8, а угол между ними $60°$.



Решение:

Проведем $DL \perp AC,\ LK \| CC_1\ (K \in AC_1),\ PK \| DL$. Откладывая на боковом ребре BB_1 отрезок $BQ=PD_1$, получаем параллелограмм $PAQC_1$, который будет сечением наименьшей площади; при этом AC_1–его большая, а PQ –меньшая диагонали, заданные в условии.

$AC_1 = 20,\ PQ = 8,\ \varphi = 60°,\ \cos\varphi = 1/2,\ \sin\varphi = \sqrt{3}/2.$

$DL = PK = \dfrac{1}{2} \cdot PQ \cdot \sin\varphi = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}. \quad OK = \dfrac{1}{2} \cdot PQ \cdot \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot \dfrac{1}{2} = 2.$

$\dfrac{CL}{AL} = \dfrac{C_1K}{AK} = \dfrac{C_1O - OK}{C_1O + OK} = \dfrac{10-2}{10+2} = \dfrac{2}{3}.$ Пусть $CL = 2x,$ тогда $AL = 3x$.

$DL^2 = CL \cdot AL,$ т.е. $12 = 6x^2, \quad x = \sqrt{2}, \quad CL = \sqrt{2},\ AL = 3\sqrt{2}$.

Тогда $CD = \sqrt{DL^2 + CL^2} = \sqrt{12+8} = 2\sqrt{5}$, $AD = \sqrt{DL^2 + AL^2} = \sqrt{12+18} = \sqrt{30}$.

Ответ: $2\sqrt{5}; \sqrt{30}$.