Первый (отборочный) этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2016 г.

Вариант № 1

1. Из пункта *A* в пункт *B* вышел один пешеход, и с некоторым опозданием – второй. Когда первый прошёл половину пути, второй прошел 15 *км*, а когда второй прошёл половину пути, первый прошел 24 *км*. В пункт *B* пешеходы пришли одновременно. Чему равно расстояние между пунктами *A* и *B*? (8 баллов)

2. Решите неравенство $\sqrt{\frac{x-12}{x+4}}-\sqrt{\frac{x+4}{x-12}}<\frac{16}{15}$. (8 баллов)

3. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если второй член увеличить на 8, то данная прогрессия обратится в арифметическую, но если затем третий член полученной прогрессии будет увеличен на 64, то она опять обратится в геометрическую. Найдите эти числа.

(8 баллов)

4. Решите уравнение $\frac{\cos x}{\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{1-\cos 2x-2\sin^3 x}{6\sin x-2}}=0$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\sqrt{x+2-|x+1|}\le x+5-|2x+3|$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=g\left(\sqrt{25-g^2(x)}\right)$, где $g(x)=||x|-2|-1$ (10 баллов)

7. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AB в точке M, причем $AM=18$. Найдите стороны трапеции, если её периметр равен 112, а площадь равна 672.

(12 баллов)

8. Какую наибольшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x=-3$ и $x=1$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y=x^2+16$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-3\le x_0\le 1$?

(12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых уравнение

$$(x-a)^2-a-1=|x|/x$$

имеет хотя бы одно решение, и решите его при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами $AB=24$ и $BC=30$, а боковое ребро пирамиды $TA=16$ перпендикулярно плоскости основания. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через центр симметрии основания O, вершину пирамиды и точку M, лежащую на стороне BC? На какие части делит точка M ребро BC в этом случае?

(12 баллов)

Решение варианта №1

1. Из пункта *A* в пункт *B* вышел один пешеход, и с некоторым опозданием – второй. Когда первый прошёл половину пути, второй прошел 15 *км*, а когда второй прошёл половину пути, первый прошел 24 *км*. В пункт *B* пешеходы пришли одновременно. Чему равно расстояние между пунктами *A* и *B*?

Решение:

Пусть s – расстояние между пунктами *A* и *B*, v_1, v_2 – скорости пешеходов. Тогда $\frac{s}{2v_1} = \frac{s-15}{v_2}$ и $\frac{s-24}{v_1} = \frac{s}{2v_2}$. Отсюда $\frac{s}{2(s-24)} = \frac{(s-15)\cdot 2}{s}$; $s^2 = 4s^2 - 4\cdot 39s + 60\cdot 24$; $s^2 - 52s + 480 = 0$; $s_{1,2} = 26 \pm 14$. $s_1 = 40$, $s_2 = 12$ не удовлетворяет условиям задачи $s > 15,\ s > 24$.

Ответ: 40 км.

2. Решите неравенство $\sqrt{\frac{x-12}{x+4}} - \sqrt{\frac{x+4}{x-12}} < \frac{16}{15}$.

Решение:

$\sqrt{\frac{x+4}{x-12}} = y > 0$; $\frac{1}{y} - y < \frac{16}{15}$; $15y^2 + 16y - 15 > 0$; $y_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+225}}{15} = \frac{-8 \pm 17}{15}$,

$y_1 = \frac{3}{5}, y_2 = -\frac{5}{3}$. След. $y > \frac{3}{5}$, $\frac{x+4}{x-12} > \frac{9}{25} \Leftrightarrow \frac{x+13}{x-12} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -13, \\ x > 12. \end{array}\right.$

3. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если второй член увеличить на 8, то данная прогрессия обратится в арифметическую, но если затем третий член полученной прогрессии будет увеличен на 64, то она опять обратится в геометрическую. Найдите эти числа.

Решение: Пусть a, b, c - искомые числа. Тогда

$$\begin{cases} ac = b^2, \\ a + c = 2(b+8), \\ a(c+64) = (b+8)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac = b^2, \\ a + c = 2(b+8), \\ ac + 64a = b^2 + 16b + 64, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac = b^2, \\ a + c = 2(b+8), \\ ac + 64a = b^2 + 16b + 64, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ac = b^2, \\ c = 2(b+8) - c, \\ 64a = 16b + 64, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac = b^2, \\ c = \frac{7}{4}b + 15, \\ a = \frac{1}{4}b + 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7b+60)(b+4) = 16b^2, \\ c = \frac{7}{4}b + 15, \\ a = \frac{1}{4}b + 1. \end{cases}$$

Приходим к квадратному уравнению: $9b^2-88b-240=0,\ \dfrac{D}{4}=64^2$,

$b_1=-\dfrac{20}{9},\quad b_2=12.$

Искомые числа: $a_1=\dfrac{4}{9},\quad b_1=-\dfrac{20}{9},\quad c_1=\dfrac{100}{9}$, или $a_2=4,\quad b_2=12,\quad c_2=36.$

Ответ: $a_1=\dfrac{4}{9},\quad b_1=-\dfrac{20}{9},\quad c_1=\dfrac{100}{9}$, или $a_2=4,\quad b_2=12,\quad c_2=36.$

4. Решите уравнение $\dfrac{\cos x}{\sqrt{3}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x-2\sin^3 x}{6\sin x-2}}=0$.

Решение:

$\dfrac{\cos x}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x-2\sin^3 x}{6\sin x-2}}$. При условии $\cos x\ge 0$ возводим в квадрат обе части

уравнения: $\dfrac{\cos^2 x}{3}=\dfrac{1-\cos 2x-2\sin^3 x}{6\sin x-2}\ \Leftrightarrow\ \dfrac{\cos^2 x}{3}=\dfrac{2\sin^2 x-2\sin^3 x}{6\sin x-2}\ \Leftrightarrow\ \dfrac{1-\sin^2 x}{3}=\dfrac{\sin^2 x(1-\sin x)}{3\sin x-1}$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{3}=\dfrac{\sin^2 x(1-\sin x)}{3\sin x-1}\ \Leftrightarrow$

1) $\sin x=1\quad x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ или 2) $\dfrac{1+\sin x}{3}=\dfrac{\sin^2 x}{3\sin x-1}\ \Leftrightarrow$

$\sin x\ne\dfrac{1}{3},\quad (1+\sin x)(3\sin x-1)=3\sin^2 x\Leftrightarrow\ \sin x=\dfrac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. С учетом

условия $\cos x\ge 0$ окончательно имеем $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$.

5. Решите неравенство $\sqrt{x+2-|x+1|}\le x+5-|2x+3|$.

Решение:

$$\begin{cases} x+5-|2x+3|\ge 0,\\ x+2-|x+1|\ge 0,\\ x+2-|x+1|\le\left(x+5-|2x+3|\right)^2, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} |2x+3|\le x+5,\\ |x+1|\le x+2,\\ x+2-|x+1|\le\left(x+5-|2x+3|\right)^2, \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x-5\le 2x+3\le x+5,\\ -x-2\le x+1\le x+2,\\ x+2-|x+1|\le\left(x+5-|2x+3|\right)^2, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -x-8\le 2x\le x+2,\\ x\ge -1{,}5,\\ x+2-|x+1|\le\left(x+5-|2x+3|\right)^2, \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \le 2, \\ -8 \le 3x, \\ x \ge -1{,}5, \\ x+2-|x+1| \le \left(x+5-|2x+3|\right)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1{,}5 \le x \le 2 \\ x+2-|x+1| \le (-x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

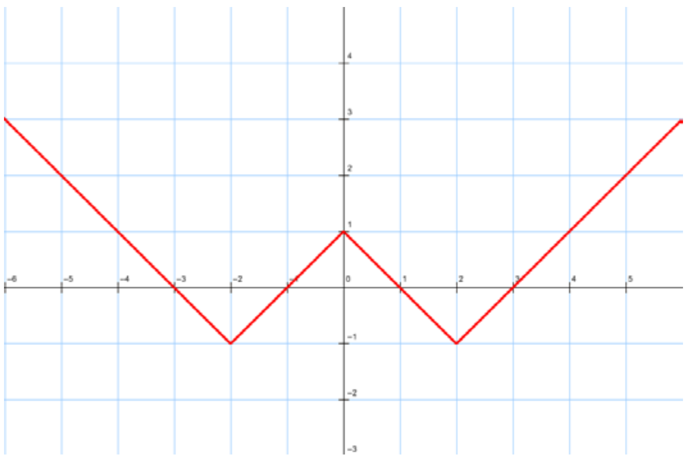
$$\begin{cases} -1{,}5 \le x \le 2 \\ |x+1| \ge -x^2+5x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1{,}5 \le x \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x+1 \ge -x^2+5x-2, \\ x+1 \le x^2-5x+2, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1{,}5 \le x \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3 \ge 0, \\ x^2-6x+1 \ge 0, \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1{,}5 \le x \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} (x-1)(x-3) \ge 0, \\ (x-3+2\sqrt{2})(x-3-2\sqrt{2}) \ge 0, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \; x \in [-1{,}5; 1].$$

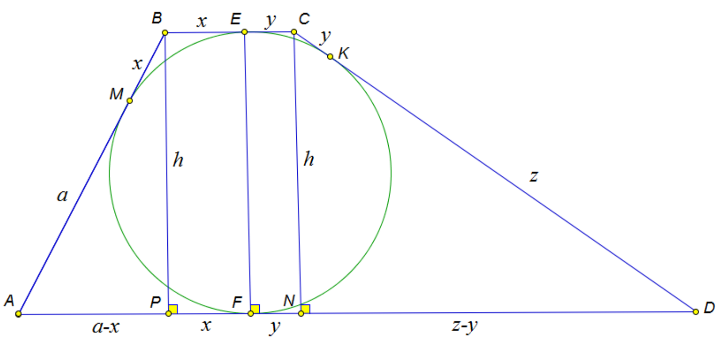
Ответ: $x \in [-1{,}5; 1]$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = g(\sqrt{25-g^2(x)})$, где $g(x) = ||x|-2|-1$.

Решение: Функция $g(x) = ||x|-2|-1$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $[-1; +\infty)$. График функции $g(x)$ изображен на рисунке. Функция $\phi(t) = \sqrt{25-t^2}$ определена для $t \in [-5; 5]$. При $t = g(x)$ функция $\phi(t) = \sqrt{25-t^2}$ принимает свои значения при $t \in [-1; 5]$, причем множество значений этой функции есть отрезок $[0; 5]$. Для нахождения множества значений функции $f(x)$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $[0; 5]$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[-1; 2]$. Ответ: $E_f = [-1; 2]$.



7. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AB в точке M, причем $AM = 18$. Найдите стороны трапеции, если её периметр равен 112, а площадь равна 672.



Решение: M, E, K, F - точки касания окружности со сторонами AB, BC, CD, AD соответственно. Тогда

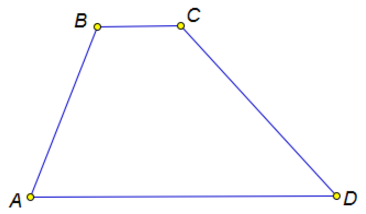
$$AM = AF = a = 18,\ BM = BE = x,\ CE = CK = y,\ DK = DF = z.$$

$$P_{ABCD} = 2(18 + x + y + z) = 112,\ x + y + z = 38.$$

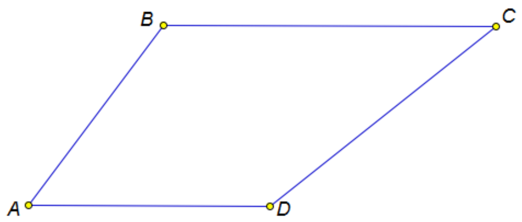
$$S_{ABCD} = (18 + x + y + z) r_{вп.} =$$
$$(18 + x + y + z)\, h/2 = 672.$$

Тогда $28h = 672$, $h = 24$. Пусть $BP \perp AD, CN \perp AD$. В треугольнике ABP по теореме Пифагора имеем: $h^2 + (a-x)^2 = (a+x)^2$, $h^2 = 4ax$, $x = 8$, $y + z = 30$. В треугольнике CDN по теореме Пифагора имеем: $h^2 + (z-y)^2 = (z+y)^2$, $h^2 = 4yz$, $yz = 144.$ Находим $y, z,$ решая уравнение $t^2 - 30t + 144 = 0$, $t_1 = 24, t_2 = 6$. Имеем два варианта решения: 1) $y = 6, z = 24$, 2) $y = 24, z = 6.$ Окончательно получаем 1) $AB = 26$, $BC = 14$, $CD = 30$, $AD = 42$, 2) $AB = 26$, $BC = 32$, $CD = 30$, $AD = 24$.

Ответ: 1) $AB = 26$, $BC = 14$, $CD = 30$, $AD = 42$, 2) $AB = 26$, $BC = 32$, $CD = 30$, $AD = 24$.

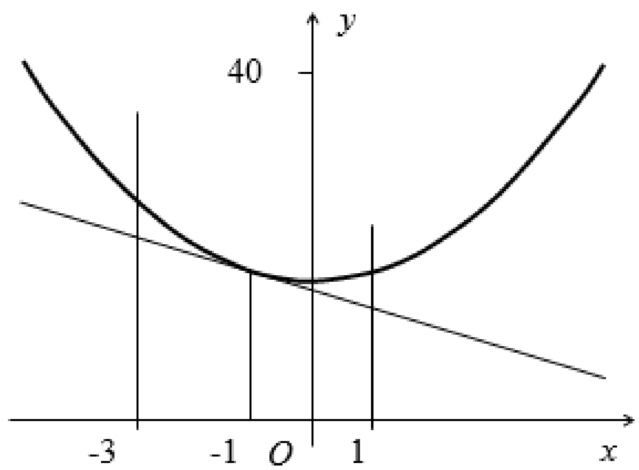


1



2)

8. Какую наибольшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x = -3$ и $x = 1$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y = x^2 + 16$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-3 \le x_0 \le 1$?



Решение:

$y = x^2 + 16, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 1.$

Уравнение касательной:

$y = x_0^2 + 16 + 2x_0\left(x - x_0\right)$, или

$y = -x_0^2 + 16 + 2x_0 x$.

$y_1 = y(x_1) = -x_0^2 + 16 + 2x_0(-3)$;

$y_2 = y(x_2) = -x_0^2 + 16 + 2x_0 \cdot 1$. Так как

$\min y_1 = y_1(x_2) = -1 + 16 - 6 = 9 > 0$; $\min y_2 = y_2(x_1) = -9 + 16 - 6 = 1 > 0$, полученная фигура – трапеция, площадь которой равна

$S(x_0) = 0,5(y_1 + y_2)\ \ (x_2 - x_1) = \left(-x_0^2 + 16 - 2x_0\right)4$.

$S'(x_0) = 4(-2x_0 - 2) = 0, \quad x_0 = -1$. $\max S(x_0) = S(-1) = 4(-1 + 16 + 2) = 68$.

Ответ: 68.

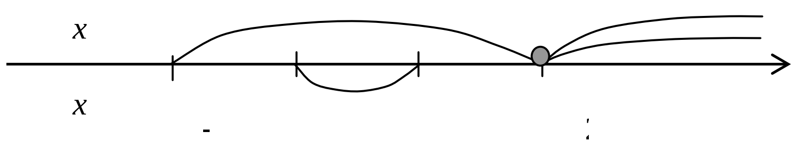
9. Укажите все значения a, при которых уравнение $(x-a)^2 = \dfrac{x}{|x|} + a + 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите его при каждом a.

Решение:

I. При $x > 0$ $\quad x^2 - 2ax + a^2 - a - 2 = 0$ (*). Уравнение (*) имеет два различных положительных корня $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a+2}$, если: $\begin{cases} D/4 = a + 2 > 0, \\ a > 0, \\ a^2 - a - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -2, \\ a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} a < -1, \\ a > 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a > 2$. Уравнение (*) имеет один положительный корень $x_{1,2} = a + \sqrt{a+2}$, если: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D = 0, \\ a > 0, \end{cases} \\ a^2 - a - 2 < 0, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -1, \\ a = 2 \end{array}\right. \\ a > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 < a \le 2$.

II. При $x < 0$ $\quad x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ (**). Это уравнение не может иметь двух отрицательных корней, так как система неравенств $\begin{cases} D/4 = a > 0, \\ a < 0, \\ a^2 - a > 0. \end{cases}$ решений не имеет.

Уравнение (**) имеет один отрицательный корень $x = a - \sqrt{a}$, если



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} D/4 = a = 0, \\ \quad a < 0, \end{cases} \\ a^2 - a < 0, \quad \Leftrightarrow 0 < a < 1 \\ \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 1 \end{array}\right. \\ a < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: при $a \in (-1;0] \cup [1;2]$ $x = a + \sqrt{a+2}$; при $(0;1)$ $x_1 = a + \sqrt{a+2},\ x_2 = a - \sqrt{a}$;

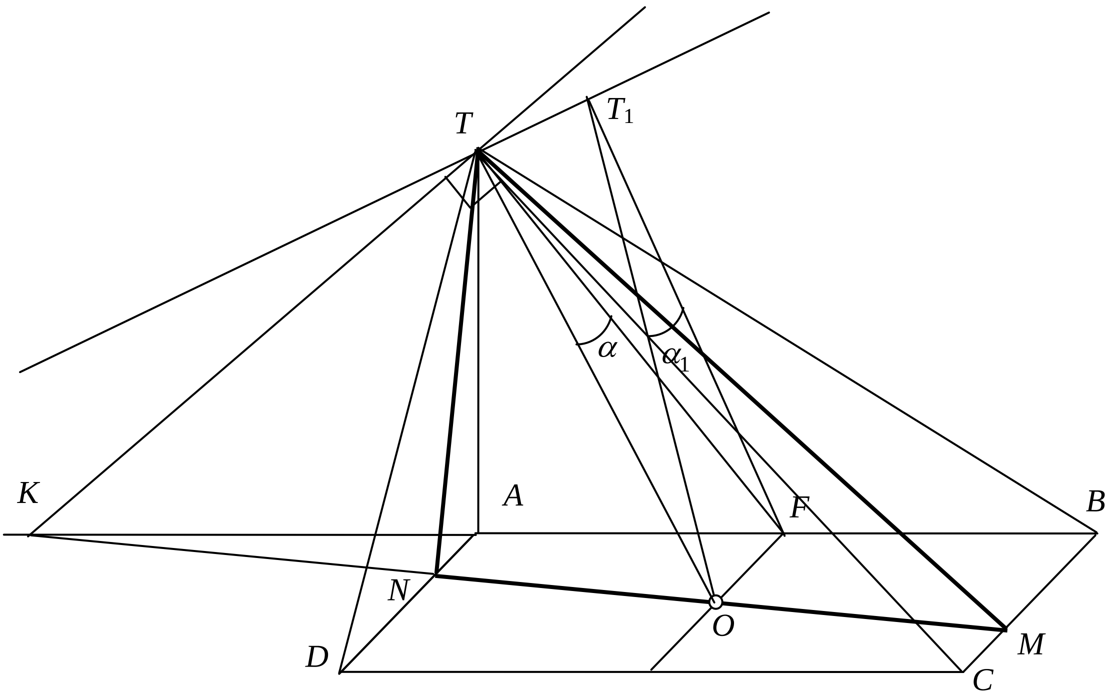
при $a \in (2;+\infty)$ $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a+2}$.

10. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами $AB = 24$ и $BC = 30$, а боковое ребро пирамиды $TA = 16$ перпендикулярно плоскости основания. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через центр симметрии основания O, вершину пирамиды и точку M, лежащую на стороне BC? На какие части делит точка M ребро BC в этом случае?

Решение:

При любом положении точки M на стороне BC грань TAB является ортогональной проекцией сечения TMN. Площадь сечения будет наименьшей, если наименьшим будет угол между секущей плоскостью и гранью TAB. Так как секущая плоскость проходит через центр симметрии основания O и вершину пирамиды T, то отрезок OT является наклонной к плоскости грани TAB, и наименьшим возможным углом будет $\angle OTF$, где $OF \perp TAB,\ F \in AB$. Линия пересечения секущей плоскости и плоскости грани TAB $TK \perp TF$ и пересекает прямую AB в точке K. Если условие $TK \perp TF$ не выполнено, то $FT_1 < FT,\ \mathrm{tg}\alpha_1 > \mathrm{tg}\alpha,\ \cos\alpha_1 < \cos\alpha$ и $\dfrac{S_{\Delta ATB}}{\cos\alpha_1} > \dfrac{S_{\Delta ATB}}{\cos\alpha}$.

Прямая, проведенная через точки K и O, пересекает ребро AD в точке N и ребро BC в точке M, ΔNTM – искомое сечение.



Если обозначить $AB = a,\ BC = b,\ TA = c$, то $TF = \sqrt{(a/2)^2 + c^2}$;

$TO = \sqrt{TF^2 + OF^2} = \sqrt{(a/2)^2 + c^2 + (b/2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2}\Big/2$, $\cos\angle OTF = \dfrac{TF}{TO} = \dfrac{\sqrt{a^2+4c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+4c^2}}$.

$$S_{\Delta NTM} = \frac{S_{\Delta ATB}}{\cos\alpha} = \frac{ac\sqrt{a^2+b^2+4c^2}}{2\sqrt{a^2+4c^2}} = \frac{ac\sqrt{(a/2)^2+(b/2)^2+c^2}}{2\sqrt{(a/2)^2+c^2}}.$$

В ΔKTF $\angle KTF = 90°$, $AK = AT^2\big/AF = 2c^2\big/a$. $BK = AK + AB = \dfrac{2c^2}{a} + a$.

Точка M делит отрезок BC в отношении $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{BM}{AN} = \dfrac{BK}{AK} = \dfrac{a^2+2c^2}{2c^2} = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{c^2}$.

AB	BC	TA	TF	TO	$\cos\alpha$	S_{NTM}	$BM{:}MC$	BM	MC
24	30	16	20	25	4/5	240	17:8	102/5	48/5