Первый (заочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2016 г.

9 КЛАСС

1. Вычислите $\sqrt[3]{50-19\sqrt{7}}$

(15 баллов)

2. Пусть M - множество точек плоскости с координатами $(x;y)$ таких, что числа $3x$, $2y$ и $9-y$ являются длинами сторон некоторого треугольника. Постройте фигуру M и найдите её площадь.

(15 баллов)

3. Три велосипедиста должны проехать из пункта А в пункт В и обратно. Расстояние АВ равно 120 км. Сначала стартует первый велосипедист, через час – второй, ещё через час – третий. Некоторую точку С, находящуюся между пунктами А и В, все три велосипедиста проехали одновременно (до этого ни один из них в В не побывал). Третий велосипедист, доехав до В и сразу повернув назад, встречает второго в 108 км от А, а первого – в 100 км от А. Найдите скорости велосипедистов.

(15 балов)

4. АВС – равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной а. Один их углов треугольника равен 120°. О – центр окружности, касающейся основания треугольника и продолжений его боковых сторон, F – центр окружности, касающейся боковой стороны АВ и продолжений основания АС и боковой стороны ВС, а Р - центр окружности, касающейся боковой стороны ВС и продолжений основания АС и боковой стороны АВ. Найдите площадь треугольника OFP.

(15 баллов)

5. При каких значениях параметра а площадь фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} y \geq |x| \\ y \leq \dfrac{a+4}{2} - |x-a| \end{cases}$$

а) равна $\frac{5}{2}$? б) При каких значениях параметра а площадь фигуры будет наибольшей?

(20 баллов)

6. Даны два натуральных числа K и L. Число K имеет L делителей, а число L имеет $\dfrac{K}{2}$ делителей. Определите количество делителей числа $K+2L$.

(20 баллов)

Решение задач заочного тура 9 класс.

№1. Вычислите $\sqrt[3]{50-19\sqrt{7}}$.

Решение: Будем искать представление $50-19\sqrt{7}$ в виде полного куба, т.е. $50-19\sqrt{7}=\left(a-b\sqrt{7}\right)^3$. После возведения в куб правой части данного выражения имеем $50-19\sqrt{7}=a^3-3\sqrt{7}a^2b+21ab^2-7\sqrt{7}b^3$ или

$50-19\sqrt{7}=\left(a^3+21ab^2\right)-\sqrt{7}\cdot\left(3a^2b+7b^3\right)$.

Отсюда получаем систему двух уравнений относительно неизвестных переменных a и b вида $\begin{cases} a^3+21ab^2=50 \\ 3a^2b+7b^3=19 \end{cases}$ или $\dfrac{a^3+21ab^2}{3a^2b+7b^3}=\dfrac{50}{19}$.

Если числитель и знаменатель дроби разделить на b^3 и обозначить $\dfrac{a}{b}=t$, то $\dfrac{t^3+21t}{3t^2+7}=\dfrac{50}{19}$ или $19t^3-150t^2+399t-350=0$. Одним из корней кубического уравнения является $t=2$. Поскольку $\begin{cases} t=\dfrac{a}{b} \\ t=2 \end{cases}$, то $a=2b$. В этой связи первое уравнение системы принимает вид $8b^3+42b^3=50$. Отсюда следует, что $b=1$. Так как $a=2b$, то $a=2$ и $50-19\sqrt{7}=\left(2-\sqrt{7}\right)^3$. Следовательно $\sqrt[3]{50-19\sqrt{7}}=2-\sqrt{7}$.

Ответ: $2-\sqrt{7}$

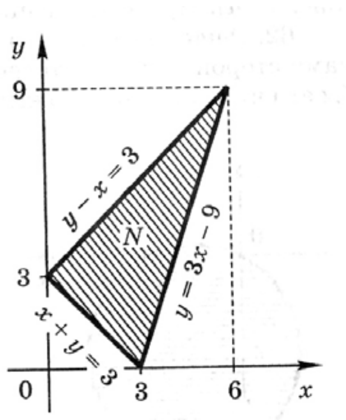
Критерии проверки:

15 баллов	Задача решена полностью правильно
10 баллов	Сделана замена переменной, найден корень уравнения, вычислительная ошибка на последнем этапе решения задачи
5 баллов	Верно использована формула куб разности и составлена система уравнений для коэффициентов a и b.
0 баллов	Задача не решена или решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий.

№2. Пусть M - множество точек плоскости с координатами $(x;y)$ таких, что числа $3x$, $2y$ и $9-y$ являются длинами сторон некоторого треугольника. Постройте фигуру M и найдите её площадь.

Решение:

Для того, чтобы числа $3x$, $2y$ и $9-y$ являлись длинами сторон некоторого треугольника, необходимо и достаточно, чтобы эти числа были положительными и сумма любых двух из них была больше третьего числа. Получаем неравенства $3x>0$, $2y>0$, $9-y>0$, $3x+2y>9-y$, $2y+9-y>3x$, $3x+9-y>2y$. Равносильная система имеет вид $\begin{cases} x \succ 0 \\ 0 \prec y \prec 9 \\ x+y \succ 3 \\ y \succ 3x-9 \\ y \prec x+3 \end{cases}$. Заштриховываем соответствующую область. Её площадь равна 18 кв.ед.



Ответ: 18 кв.ед.

Критерии проверки:

15 баллов	Задача решена полностью правильно
10 баллов	Верное графическое решение системы. Правильно изображена область в декартовой системе координат. Арифметическая ошибка при вычислении площади изображенной фигуры.
5 баллов	Верно использовано неравенство треугольника для составления системы неравенств.
0 баллов	Задача не решена или решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий.

№3. Три велосипедиста должны проехать из пункта А в пункт В и обратно. Расстояние АВ равно 120 км. Сначала стартует первый велосипедист, через час – второй, ещё через час – третий. Некоторую точку С, находящуюся между пунктами А и В, все три велосипедиста проехали одновременно (до этого ни один из них в В не побывал). Третий велосипедист, доехав до В и сразу повернув назад, встречает второго в 108 км от А, а первого – в 100 км от А. Найдите скорости велосипедистов.

Решение: пусть x, y и z (км/ч) – скорости первого, второго и третьего велосипедистов соответственно. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{AC}{x} - \frac{AC}{y} = 1 \\ \frac{AC}{y} - \frac{AC}{z} = 1 \\ \frac{108}{y} - \frac{132}{z} = 1 \\ \frac{100}{x} - \frac{140}{z} = 2 \end{cases}$$

Сделаем замену: $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{1}{y}$; $c = \frac{1}{z}$. Приравняем левые части первых двух уравнений. Получаем $AC \cdot a - AC \cdot b = AC \cdot b - AC \cdot c$, сокращаем АС и система примет вид:

$\begin{cases} 2b = a + c \\ 108b - 132c = 1 \\ 50a - 70c = 1 \end{cases}$ (последнее уравнение сократили на 2); $b = \frac{132c+1}{108}$; $a = \frac{70c+1}{50}$.

Подставляем в первое уравнение, получаем:

$2 \cdot \frac{132c+1}{108} = \frac{70c+1}{50} + c$;

25·(132c+1)=27·(120c+1);

$60c = 2$; $c = \frac{1}{30}$

Следовательно, $z = 30$ км/ч.

$b = \frac{132 \cdot \frac{1}{30} + 1}{108} = \frac{1}{20}$. Следовательно, $y = 20$ км/ч.

$a = 2b - c = \frac{2}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{15}$. Следовательно, $x = 15$ км/ч.

Ответ: 15 км/ч; 20 км/ч; 30 км/ч.

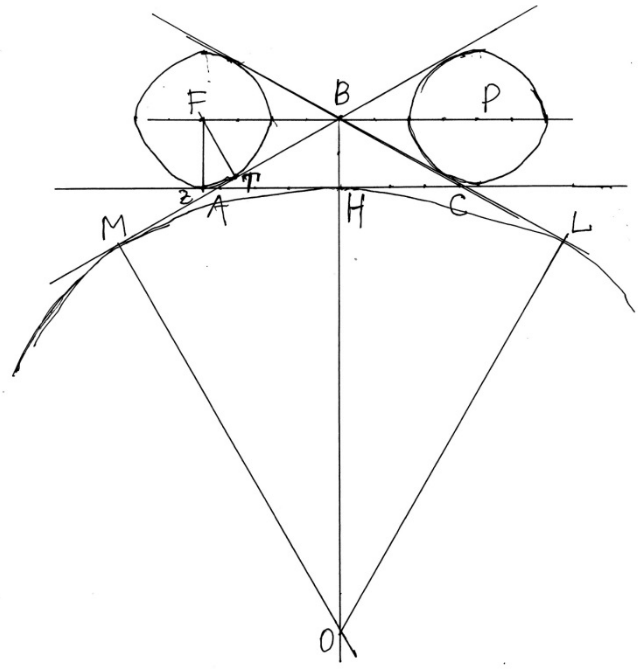
Примечание: АС=60 км.

Критерии проверки:

15 баллов	Обоснованно получены правильные ответы на все вопросы задачи
10 баллов	Обоснованно получена хотя бы одна из скоростей
5 баллов	Верно составлена система уравнений для решения задачи
0 баллов	Задача не решена или решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№4. ABC – равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной a. Один их углов треугольника равен 120°. O – центр окружности, касающейся основания треугольника и продолжений его боковых сторон, F – центр окружности, касающейся боковой стороны AB и продолжений основания AC и боковой стороны BC, а P - центр окружности, касающейся боковой стороны BC и продолжений основания AC и боковой стороны AB. Найдите площадь треугольника OFP

Решение: BO – биссектриса угла MBL (т.к. окружность с центром O- вписана в этот угол, $BO \cap AC = H$, следовательно, BH – биссектриса треугольника ABC, следовательно, BH – высота треугольника ABC, значит OH⊥ AC, а значит H – точка касания окружности с прямой AC.



$\angle ABH = \angle CBH = 60°$, ∠BAH=∠BCH=30° $\Rightarrow$ $BH = a\sin 30° = \frac{a}{2}$; $AH = HC = a\cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$MA = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (как две касательные, проведённые из одной точки), $BM = AB + MA = a + \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\frac{2+\sqrt{3}}{2}$; $\angle OMB = 90°$ (как угол между касательной и радиусом, проведённым в точку касания) $\Rightarrow$ $BO = \frac{BM}{\cos 60°} = 2BM = a(2+\sqrt{3})$.

$\angle NBA = 180° - \angle ABC = 180° - 120° = 60°$. BF – биссектриса угла NBA, т.к. F – центр вписанной окружности в угол NBA $\Rightarrow \angle ABF = \angle NBF = 30° = \angle BAH$, следовательно, $FB \parallel AC$.

Аналогично, $BP \parallel AC \Rightarrow$ точки F, B и P лежат на одной прямой. FT=FZ=BH=$\frac{a}{2}$ (как два радиуса одной окружности и как два перпендикуляра к двум параллельным прямым) $\Rightarrow$

$FB = \frac{FT}{\sin\angle FBT} = \frac{a}{2} : \frac{1}{2} = a$. Аналогично, $BP = a$. $S_{OFP} = \frac{1}{2} \cdot FP \cdot BO = FB \cdot BO = a^2 \cdot (2+\sqrt{3})$.

Ответ: $a^2(2+\sqrt{3})$.

Критерии проверки

15 баллов	Обоснованно получен правильный ответ задачи
10 баллов	При верном решении допущена небольшая арифметическая ошибка в ответе (найдены сторона основания FP и высота BO треугольника, одна из них возможно с арифметической ошибкой
5 баллов	Верно найдена сторона основания FP или высота BO
0 баллов	Задача не решена или решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий.

№5

При каких значениях параметра а площадь фигуры, заданной системой неравенств

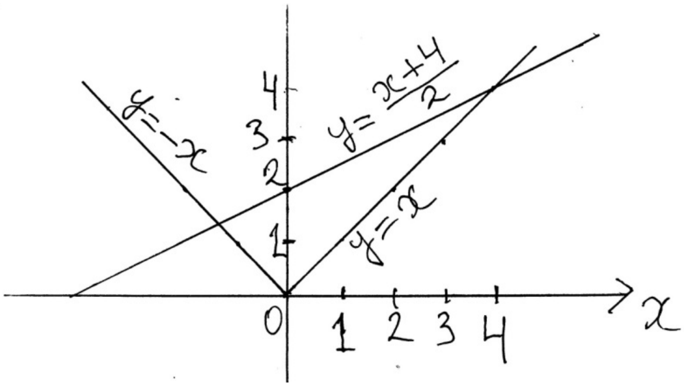
$$\begin{cases} y \geq |x| \\ y \leq \frac{a+4}{2} - |x-a| \end{cases}$$

а) равна $\frac{5}{2}$? б) при каких значениях параметра а площадь фигуры будет наибольшей?

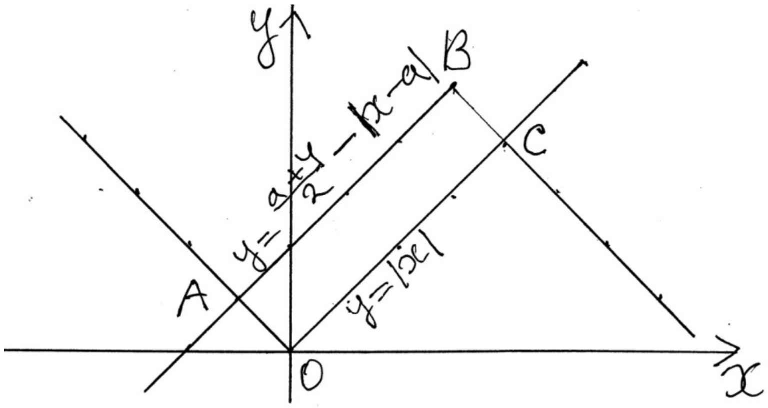
Решение:

Решение: точка «излома» графика функции $y \leq \frac{a+4}{2} - |x-a|$ двигается по прямой $\begin{cases} x = a \\ y = \frac{a+4}{2} \end{cases}$, т.е. $y = \frac{x+4}{2}$.

Построим графики функций $y = \frac{x+4}{2}$ и $y = |x|$. Найдём их точки пересечения, для чего решим уравнение $|x| = \frac{x+4}{2}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{x+4}{2} \\ x = -\frac{x+4}{2} \end{array} \right. \\ \frac{x+4}{2} \geq 0 \end{cases}$ откуда $x = 4$ или $x = -\frac{4}{3}$. Следовательно, система имеет решения при $a \in [-\frac{4}{3}; 4]$ (см. рис. 1).



Построим графики граничных функций $y = |x|$ и $y = \frac{a+4}{2} - |x - a|$ (см. рисунок).



Определим координаты вершин ограничивающего прямоугольника. O(0; 0), $B(a; \frac{a+4}{2})$. Найдём координаты точки A: для этого решим систему:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = \frac{a+4}{2} + x - a \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ -x = \frac{a+4}{2} + x - a \end{cases}, \text{ откуда} \begin{cases} x = \frac{4-a}{4} \\ y = \frac{a-4}{4} \end{cases} \quad A(\frac{4-a}{4}; \frac{a-4}{4}).$$

Найдём координаты точки C: для этого решим систему:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{a+4}{2} - (x - a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \frac{a+4}{2} - x + a \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{3a+4}{4},$$

т.е. $C(\frac{3a+4}{4}; \frac{3a+4}{4})$.

Искомая фигура – прямоугольник OABC.

$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_c)^2} = \sqrt{(a - \frac{3a+4}{4})^2 + (\frac{a+4}{2} - \frac{3a+4}{4})^2} = \sqrt{(\frac{a-4}{4})^2 + (\frac{4-a}{4})^2} = \frac{4-a}{4} \cdot \sqrt{2}$.

$OC = \sqrt{x_C{}^2 + y_C{}^2} = \frac{3a+4}{4} \cdot \sqrt{2}$.

$$S_{OABC} = BC \cdot OC = \frac{4-a}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3a+4}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{(4-a) \cdot (3a+4)}{8}$$

а) $\frac{(4-a)\cdot(3a+4)}{8} = \frac{5}{2}$; откуда $3a^2 - 8a + 4 = 0$; $a = \frac{2}{3}$ или $a = 2$.

б) S принимает наибольшее значение при $a = a_{\text{вершины}}$, т.е. при -$a = \frac{4+(-\frac{4}{3})}{2} = \frac{4}{3}$.

Ответ: а) $\{\frac{2}{3}; 2\}$; б) $\frac{4}{3}$.

Критерии проверки:

20 баллов	Обоснованно получены правильные ответы на оба вопроса задачи
15 баллов	Обоснованно получен правильный ответ только на один из вопросов задачи
10 баллов	В целом верное решение задачи (хотя бы одного из пунктов), но ответ отличается от верного из-за небольшой арифметической ошибки
5 баллов	Верно построены общие виды графиков уравнений и задача сведена к определению площади прямоугольника (второй рисунок)
0 баллов	Задача не решена или решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№6. Даны два натуральных числа K и L. Число K имеет L делителей, а число L имеет $\frac{K}{2}$ делителей. Определите количество делителей числа $K+2L$.

Решение: Возьмём произвольное натуральное число M. Ясно, что M - его самый большой делитель. Все остальные делители, очевидно, не превосходят $\frac{M}{2}$, поэтому общее количество делителей числа M не превышает $\frac{M}{2}+1$.

Отсюда следует неравенство $L \le \frac{K}{2}+1$ и $\frac{K}{2} \le \frac{L}{2}+1$, поэтому $\frac{K}{2} \le \frac{\frac{K}{2}+1}{2}+1 = \frac{K}{4}+\frac{3}{2}$, откуда $K \le 6$. Кроме того, из условия следует, что $\frac{K}{2}$ - целое число, поэтому K - четное число. Натуральных четных чисел, не превышающих 6, всего три: 2, 4, 6. Проверим каждое отдельно.

1. Пусть K=2. Это число имеет 2 делителя, поэтому L=2. Но у числа L тоже 2 делителя, а вовсе не $\frac{K}{2}=1$. Не подходит.

2. Пусть K=4. Это число имеет 3 делителя, поэтому L=3. У числа 3 имеются 2 делителя, что как раз равно $\frac{K}{2}$. Это подходит.

3. Пусть K=6. Это число имеет 4 делителя, поэтому L=4. У числа 4 имеются 3 делителя, что как раз равно $\frac{K}{2}$. Это тоже подходит.

Итак, получается, что есть две возможности: $K=4$, $L=3$, а также $K=6$, $L=4$. В первом случае сумма $K+2L$ равна 10, во втором случае она равна 14. Но и у 10, и у 14 количество делителей одинаково и равно 4.

Ответ: 4 (хотя однозначно определить *K* и *L* мы не можем)

Критерии проверки

20 баллов	Выполнен анализ для каждого из полученных значений K, сделан правильный вывод. Обоснованно получен правильный ответ
15 баллов	Получены возможные значения для переменной K
10 баллов	Из составленных неравенств верно получена оценка для K
5 баллов	Верно составлены неравенства для переменных K и L по условию задачи
0 баллов	Задача не решена или решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий