«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана

________________А.А. Александров

«_____»_______________2016 г.

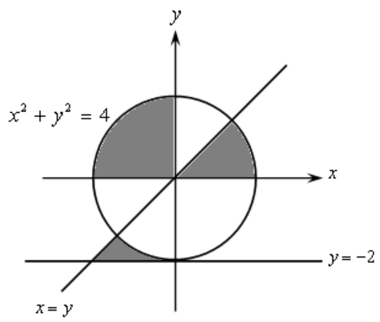
Типовой вариант академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

по общеобразовательному предмету «Информатика»

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 32AB,C1 в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

Задача 2 (8 баллов). На любом языке программирования запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами *x*, *y* попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. Вычислить значение следующего выражения: (~a | a << 1 & a >> 1) & ((a | b) >> 1 | (a & b) << 1) для a = 15 и b = 136. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Задача 4 (8 баллов). На книжной полке расположены книги по математике, физике, информатике и химии. Какая книга будет выбрана при одновременном выполнении следующих условий: a) если не выбирается химия, то не выбирается физика; b) не верно, что если выбирается информатика, то выбирается химия; c) если выбирается математика, то выбирается физика.

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел между 1 и 2003, которые a) Делятся на 6? b) Делятся на 7? c) Делятся на 8? d) Делятся на 6 или 7 или 8?

Задача 6 (8 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения: a x b x c x d x e x + * + * + * + * +. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, и с помощью алгоритма центрированного обхода дерева вручную вычислите значение этого выражения для x=3, a=1, b=2, c=3, d=4, e=5.

Задача 7 (12 баллов). Функция A определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел m и n следующим образом:
A(0, n) = n+1; A(m, 0) = A(m-1, 1), если m > 0; A(m, n) = A(m-1, A(m, n-1)), если n, m > 0. Вычислить вручную значение A(3, 2).

Задача 8 (12 баллов). Укажите наибольшее целое число X, при котором логическое выражение
$(10 < X \cdot (X+1)) \rightarrow (10 > (X+1) \cdot (X+2))$ истинно.

Задача 9 (12 баллов). Выпишите состояние массива **a** в конце выполнения следующей программы:

<table>
<tr><th>Pascal</th><th>C</th></tr>
<tr><td>

```
const n=9;
var a: array[0..n-1] of integer = (7, 3, 9, 4, 2, 5, 6, 1,
8);
var i, first, p, v, t: integer;
begin
  first:=0; p:=first; v:=a[first];
  for i:=first+1 to n-1 do
    if (a[i]<v) then
    begin p:=p+1; t:=a[i]; a[i]:=a[p]; a[p]:=t; end;
  t:=a[first]; a[first]:=a[p]; a[p]:=t;
end.
```

</td><td>

```
const int n = 9;
int a[n] = {7, 3, 9, 4, 2, 5, 6, 1, 8};
int main() {
  int i, first, p, v, t;
  first=0; p=first; v=a[first];
  for (i=first+1; i<n; i++)
    if (a[i]<v) { p++; t=a[i]; a[i]=a[p]; a[p]=t; }
  t=a[first]; a[first]=a[p]; a[p]=t;
  return 0;
}
```

</td></tr>
</table>

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее главной диагонали:

<table>
<tr><th>Pascal</th><th>C</th></tr>
<tr><td>

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

</td><td>

```
#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k;
else D[i][j]=++l;
for (k=0; k<2; k++)
for (j=0; j<n; j++)
for (i=0; i<n; i++)
D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
return 0;
}
```

</td></tr>
</table>

Решения типового варианта

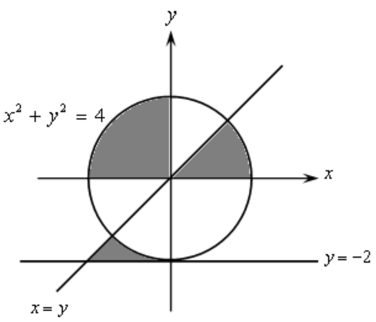
Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 32AB,C1 в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

Решение:

32AB,C1 = $3*16^3 + 2*16^2 + 10*16^1 + 11*16^0 + 12*16^{-1} + 1*16^{-2}$ = 12288 + 512 + 160 + 11 + 0,75 + 0,00390635 = 12971 + 0,75390625 = 12971,75390625.

Ответ: 12971,75390625.

Задача 2 (8 баллов). На любом языке программирования запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами *x*, *y* попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Решение (на языке Си):

((x <= 0) && (y >= 0) && ((x*x + y*y) <= 4)) ||
((x >= 0) && (y >= 0) && ((x*x + y*y) <= 4) && (y <= x)) ||
((x <= 0) && (y <= 0) && (y >= -2) && ((x*x + y*y) >= 4) && (y <= x))

Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. Вычислить значение следующего выражения: (~a | a << 1 & a >> 1) & ((a | b) >> 1 | (a & b) << 1) для a = 15 и b = 136. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Решение:

1) a = 15_{10} = 00001111_2
2) b = 136_{10} = 10001000_2
3) ~a = 11110000_2
4) a << 1 = 00011110_2
5) a >> 1 = 00000111_2
6) a << 1 & a >> 1 = 00000110_2
7) ~a | a << 1 & a >> 1 = 11110110_2
8) a | b = 10001111_2

9) $(a \mid b) >> 1 = 01000111_2$

10) $a \& b = 00001000_2$

11) $(a \& b) << 1 = 00010000_2$

12) $(a \mid b) >> 1 \mid (a \& b) << 1 = 01010111_2$

13) $(\sim a \mid a << 1 \& a >> 1) \& ((a \mid b) >> 1 \mid (a \& b) << 1) = 01010110_2 = 86_{10}$.

Ответ: $01010110_2 = 86_{10}$.

Задача 4 (8 баллов). На книжной полке расположены книги по математике, физике, информатике и химии. Какая книга будет выбрана при одновременном выполнении следующих условий: a) если не выбирается химия, то не выбирается физика; b) не верно, что если выбирается информатика, то выбирается химия; c) если выбирается математика, то выбирается физика.

Решение:

Введем следующие обозначения: M – математика, P – физика, I – информатика, C – химия.

Используя элементарные функции алгебры логики, запишем условие задачи в аналитической форме:

$f(M, P, I, C) = (\square C \rightarrow \square P) \wedge \square\ (I \rightarrow C) \wedge (M \rightarrow P)$.

Используя свойства функций алгебры логики, выполним преобразования:

$(\square C \rightarrow \square P) \wedge \square\ (I \rightarrow C) \wedge (M \rightarrow P) =$

$(\square\square C \vee \square P) \wedge \square\ (\square I \vee C) \wedge (\square M \vee P) =$

$(C \vee \square P) \wedge\ (\square\square I \wedge \square C) \wedge (\square M \vee P) =$

$(C \vee \square P) \wedge\ (I \wedge \square C) \wedge (\square M \vee P) =$

$(C \wedge\ I \wedge \square C \vee \square P \wedge\ I \wedge \square C) \wedge (\square M \vee P) =$

$(\square P \wedge\ I \wedge \square C) \wedge (\square M \vee P) =$

$(\square P \wedge\ I \wedge \square C \wedge \square M \vee P\square \wedge P \wedge\ I \wedge \square C) =$

$(\square P \wedge\ I \wedge \square C \wedge \square M)$.

Функция f(M, P, I, C) равна единице при следующих значениях переменных: M = 0, P = 0, I = 1, C = 0.

Ответ: Информатика.

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел между 1 и 2003, которые a) Делятся на 6? b) Делятся на 7? c) Делятся на 8? d) Делятся на 6 или 7 или 8?

Ответ: a) 333; b) 286; c) 250; d) 715.

Задача 6 (8 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения: a x b x c x d x e x + * + * + * + * +. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, и с помощью алгоритма центрированного обхода дерева вручную вычислите значение этого выражения для x=3, a=1, b=2, c=3, d=4, e=5.

Решение:

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: (a+(x*(b+(x*(c+(x*(d+(x*(e+x))))))))). Для наглядности дерево можно изобразить по правилу «корень вверху, листья внизу». Подставляя значения, получим (1+(3*(2+(3*(3+(3*(4+(3*(5+3))))))))) = 790.

Ответ: 790.

Задача 7 (12 баллов). Функция A определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел m и n следующим образом:

A(0, n) = n+1; A(m, 0) = A(m-1, 1), если m > 0; A(m, n) = A(m-1, A(m, n-1)), если n, m > 0. Вычислить вручную значение A(3, 2).

Решение:

1) A(0, 0) = 1;
   A(0, 1) = 2;
   A(0, 2) = 3;
   …
   A(0, n) = n+1;
2) A(1, 0) = A(0, 1) = 2;
   A(1, 1) = A(0, A(1, 0)) = A(0, 2) = 3;
   A(1, 2) = A(0, A(1, 1)) = A(0, 3) = 4;
   …
   A(1, n) = A(0, A(1, n–1)) = A(0, n+1) = n+2;
3) A(2, 0) = A(1, 1) = 3
   A(2, 1) = A(1, A(2, 0)) = A(1, 3) = 5;
   A(2, 2) = A(1, A(2, 1)) = A(1, 5) = 7;
   …
   A(2, n) = A(1, A(2, n-1)) = 2*n+3;
4) A(3, 0) = A(2, 1) = 5;
   A(3, 1) = A(2, A(3, 0)) = A(2, 5) = 2*5+3 = 13;
   A(3, 2) = A(2, A(3, 1)) = A(2, 13) = 2*13+3 = 29.

Для наглядности результаты вычислений представим в табличной форме

m\n	0	1	**2**	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	5	7	9	11	13
3	5	13	**29**			

Ответ: A(3, 2) = 29.

Задача 8 (12 баллов). Укажите наибольшее целое число X, при котором логическое выражение $(10 < X \cdot (X+1)) \to (10 > (X+1) \cdot (X+2))$ истинно.

Решение:

1) это операция импликации между двумя отношениями: $A_0 = (10 < X \cdot (X+1))$ и $B_0 = (10 > (X+1) \cdot (X+2))$;
2) заметим, что по условию нас интересуют только целые числа, поэтому можно попытаться как-то преобразовать исходное выражение, получив равносильное высказывание (точные значения корней нас совершенно не интересуют!);
3) рассмотрим неравенство $A_0 = (10 < X \cdot (X+1))$: очевидно, что X может быть как положительным, так и отрицательным числом;
4) легко проверить, что в области X >= 0 высказывание A_0 истинно при всех целых X >= 3, а в области X <= 0 – при всех целых X <= -4 (чтобы не запутаться, удобнее использовать нестрогие неравенства);
5) поэтому для целых X можно заменить A_0 на равносильное выражение A = (X <= -4) + (X >= 3);
6) область истинности выражения – объединение двух бесконечных интервалов;
7) теперь рассмотрим второе неравенство $B_0 = (10 > (X+1) \cdot (X+2))$: очевидно, что X так же может быть как положительным, так и отрицательным числом;
8) в области X >= 0 высказывание B_0 истинно при всех целых X <= 1, а в области X <= 0 – при всех целых X >= -4, поэтому для целых X можно заменить B_0 на равносильное выражение B = (-4 <= X <= 0) + (0 <= X <= 1) = (-4 <= X <= 1);
9) область истинности выражения – закрытый интервал;
10) вспомним таблицу истинности операции «импликация»:

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Согласно таблице, заданное выражение истинно везде, кроме областей, где A = 1и B = 0.

11) обратите внимание, что значение 3 уже не входит в эту область, потому что там A = 1и B = 0, то есть импликация дает 0;

12) максимальное целое число в этой области будет 2.

Ответ: 2.

Задача 9 (12 баллов). Выпишите состояние массива **a** в конце выполнения следующей программы:

Pascal	C

const n=9;
var a: array[0..n-1] of integer = (7, 3, 9, 4, 2, 5, 6, 1, 8);
var i, first, p, v, t: integer;
begin
  first:=0; p:=first; v:=a[first];
  for i:=first+1 to n-1 do
    if (a[i]<v) then
    begin p:=p+1; t:=a[i]; a[i]:=a[p]; a[p]:=t; end;
  t:=a[first]; a[first]:=a[p]; a[p]:=t;
end.
	const int n = 9;
	int a[n] = {7, 3, 9, 4, 2, 5, 6, 1, 8};
	int main() {
	  int i, first, p, v, t;
	  first=0; p=first; v=a[first];
	  for (i=first+1; i<n; i++)
	    if (a[i]<v) { p++; t=a[i]; a[i]=a[p]; a[p]=t; }
	  t=a[first]; a[first]=a[p]; a[p]=t;
	  return 0;
	}

Решение:

Выпишем состояние массива **a** после каждого прохода **for**-цикла:

1-й проход: 7 3 9 4 2 5 6 1 8

2-й проход: 7 3 9 4 2 5 6 1 8

3-й проход: 7 3 4 9 2 5 6 1 8

4-й проход: 7 3 4 2 9 5 6 1 8

5-й проход: 7 3 4 2 5 9 6 1 8

6-й проход: 7 3 4 2 5 6 9 1 8

7-й проход: 7 3 4 2 5 6 1 9 8

8-й проход: 7 3 4 2 5 6 1 9 8

После выхода из **for**-цикла переменная **p** равна 6, и выполняется последняя перестановка элементов, после которой состояние массива **a** будет таким: 1 3 4 2 5 6 7 9 8.

Ответ: 1, 3, 4, 2, 5, 6, 7, 9, 8.

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее главной диагонали:

Pascal	**C**

const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
	#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
	const int n=5;
	int D[n][n];
	int main() {
	int i, j, k=0, l=0;
	for (i=0; i<n; i++)
	for (j=0; j<n; j++)
	if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k;
	else D[i][j]=++l;
	for (k=0; k<2; k++)
	for (j=0; j<n; j++)
	for (i=0; i<n; i++)
	D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
	return 0;
	}

Решение:

После инициализации матрица **D** будет иметь вид:

1	-1	2	-2	3
-3	4	-4	5	-5
6	-6	7	-7	8
-8	9	-9	10	-10
11	-11	12	-12	13

Для **k=0** матрица **D** будет иметь вид:

1	-1	2	-2	3
-3	-4	-4	-5	-5
6	-6	7	-7	8
-8	-9	-9	-10	-10
11	-11	12	-12	13

Для **k=1** матрица **D** будет иметь вид:

-4	-5	-9	-10	-10
-7	-8	-12	-13	-13
-13	-14	-26	-27	-27
-16	-17	-29	-30	-30
-18	-19	-31	-32	-32

В конце программы матрица **D** будет иметь вид:

-4	-5	-9	-10	-10
-7	-8	-12	-13	-13
-13	-14	-26	-27	-27
-16	-17	-29	-30	-30
-18	-19	-31	-32	-32

Ответ: -4 -8 -26 -30 -32.