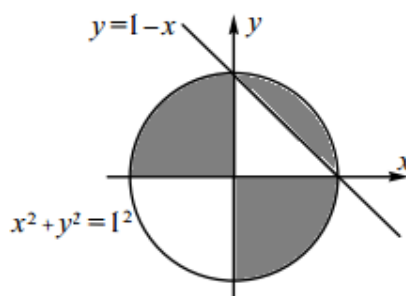


**Первый (отборочный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету
«Информатика», осень 2016 г.
Вариант № 3**

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число $A16 = 147E,59$ в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

Задача 2 (8 баллов). На любом языке программирования запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами x, y попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ (\sim), поразрядное И ($\&$), поразрядное ИЛИ (\mid), поразрядный сдвиг влево (\ll), поразрядный сдвиг вправо (\gg). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (\sim), уровень 2 (\ll и \gg), уровень 3 ($\&$), уровень 4 (\mid). Вычислить значение следующего выражения: $\sim(b \ll 1 \ \& \ b \gg 1) \ \& \ ((a \mid b) \gg 1 \mid (a \ \& \ b) \ll 1)$ для $a = 195$ и $b = 60$. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Задача 4 (8 баллов). Упростить логическую функцию:

$$A \wedge (A \rightarrow B) \wedge (A \leftrightarrow (C \wedge \neg B)).$$

Ответ должен содержать не более трех логических операций.

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел, меньших 2003, которые а) делятся и на 3, и на 5, и на 7? б) делятся или на 3, или на 5, или на 7? с) не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Задача 6 (8 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:

$a b d e f + - + * g h + i j + * *$. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, покажите порядок обхода вершин дерева, позволяющий вычислить значение этого выражения, вычислите значение этого выражения для $a=1, b=2, d=4, e=5, f=6, g=7, h=8, i=9, j=10$.

Задача 7 (12 баллов). Функция E определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: $E(n, 0) = 1$ для $n \geq 0$; $E(n, k) = (2^{n-1-k}) * E(n-1, k-1) + (k+1) * E(n-1, k)$ для $0 < k < n$. Очевидно, что $E(n, n) = 0$ при $n > 0$; $E(n, k) = 0$ при $k > n$. Вычислить вручную $E(6, 4)$.

Задача 8 (12 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{aligned} \neg(x_1 \equiv x_2) \wedge \neg(x_1 \equiv x_3) \wedge (x_2 \equiv x_3) &= 0 \\ \neg(x_3 \equiv x_4) \wedge \neg(x_3 \equiv x_5) \wedge (x_4 \equiv x_5) &= 0 \\ \neg(x_5 \equiv x_6) \wedge \neg(x_5 \equiv x_7) \wedge (x_6 \equiv x_7) &= 0 \\ \neg(x_7 \equiv x_8) \wedge \neg(x_7 \equiv x_9) \wedge (x_8 \equiv x_9) &= 0 \end{aligned}$$

где x_1, x_2, \dots, x_9 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнены данные равенства. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Задача 9 (12 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre> var a: array[0..7] of integer; var j, i1, i2, i3, index: integer; var s: array[0..39] of char; begin for j := 0 to 7 do a[j] := 0; s := 'HHTTTTHTTTHTHTHTTTHTTTHTHTHTTTHTHT'; for j := 0 to 37 do begin if (s[j] = 'H') then i1 := 4 else i1 := 0; if (s[j+1] = 'H') then i2 := 2 else i2 := 0; if (s[j+2] = 'H') then i3 := 1 else i3 := 0; index := i1 + i2 + i3; inc(a[index]); end; for index := 0 to 7 do write(a[index]:5); writeln; end. </pre>	<pre> int a[8] = { 0 }; int main(void) { int j, index; char s[] = " HHTTTTHTTTHTHTHTTTHTTTHTHTHTTTHTHT "; for (j = 0; j < 38; ++j) { index = (s[j] == 'H' ? 4 : 0) + (s[j+1] == 'H' ? 2 : 0) + (s[j+2] == 'H' ? 1 : 0); a[index]++; } for (unsigned index = 0; index < 8; ++index) printf("%5d", a[index]); printf("\n"); return 0; } </pre>

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго выше побочной диагонали:

Pascal	C
<pre> const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 <> 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for j:=0 to n-1 do for i:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end. </pre>	<pre> #define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k<2; k++) for (j=0; j<n; j++) for (i=0; i<n; i++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; } </pre>

Решения варианта 3

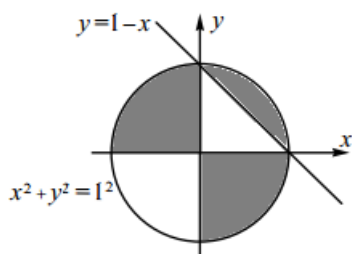
Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число $A16 = 147E,59$ в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

Решение.

$$147E,59 = 1 \cdot 16^3 + 4 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^0 + 5 \cdot 16^{-1} + 9 \cdot 16^{-2} = 4096 + 1024 + 112 + 14 + 0,3125 + 0,03515625 = 5246 + 0,34765625 = 5246,34765625.$$

Ответ: 5246,34765625.

Задача 2 (8 баллов). Запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами x, y попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Решение.

Используя нотацию, принятую в языке C, будем иметь

$$((x \leq 0) \ \&\& \ (y \geq 0) \ \&\& \ (x*x + y*y \leq 1)) \ ||$$

$$((x \geq 0) \ \&\& \ (y \leq 0) \ \&\& \ (x*x + y*y \leq 1)) \ ||$$

$$((x \geq 0) \ \&\& \ (y \geq 0) \ \&\& \ (y \geq 1-x) \ \&\& \ (x*x + y*y \leq 1))$$

Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ (\sim), поразрядное И ($\&$), поразрядное ИЛИ (\mid), поразрядный сдвиг влево (\ll), поразрядный сдвиг вправо (\gg). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (\sim), уровень 2 (\ll и \gg), уровень 3 ($\&$), уровень 4 (\mid). Вычислить значение следующего выражения: $\sim(b \ll 1 \ \& \ b \gg 1) \ \& \ ((a \mid b) \gg 1 \ \mid \ (a \ \& \ b) \ll 1)$ для $a = 195$ и $b = 60$. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Решение.

$$a = c3_{16} = 11000011_2$$

$$b = 3c_{16} = 00111100_2$$

$$b \ll 1 = 78_{16} = 01111000_2$$

$$b \gg 1 = 1e_{16} = 00011110_2$$

$$b \ll 1 \ \& \ b \gg 1 = 18_{16} = 00011000_2$$

$$\sim(b \ll 1 \ \& \ b \gg 1) = e7_{16} = 11100111_2$$

$$a \mid b = ff_{16} = 11111111_2$$

$$(a \mid b) \gg 1 = 7f_{16} = 01111111_2$$

$$a \ \& \ b = 00_{16} = 00000000_2$$

$$(a \ \& \ b) \ll 1 = 00_{16} = 00000000_2$$

$$(a \mid b) \gg 1 \mid (a \ \& \ b) \ll 1 = 7f_{16} = 01111111_2$$

$$\sim(b \ll 1 \ \& \ b \gg 1) \ \& \ ((a \mid b) \gg 1 \mid (a \ \& \ b) \ll 1) = 67_{16} = 01100111_2 = 103_{10}.$$

Ответ: $01100111_2 = 103_{10}$

Задача 4 (8 баллов). Упростить логическую функцию:

$$A \wedge (A \rightarrow B) \wedge (A \leftrightarrow (C \wedge \neg B)).$$

Ответ должен содержать не более трех логических операций.

Ответ: $A \wedge B \wedge \neg C$.

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел, меньших 2003, которые а) делятся и на 3, и на 5, и на 7? б) делятся или на 3, или на 5, или на 7? с) не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Решение.

Пусть универсум U будет множеством всех неотрицательных целых чисел, меньших 2003. Следовательно, $|U| = 2003$.

Имеется всего $\lfloor 2003/3 \rfloor = 667$ целых чисел, которые делятся на 3.

Имеется всего $\lfloor 2003/5 \rfloor = 400$ целых чисел, которые делятся на 5.

Имеется всего $\lfloor 2003/7 \rfloor = 286$ целых чисел, которые делятся на 7.

Имеется всего $\lfloor 2003/15 \rfloor = 133$ целых чисел, которые делятся на 3 и на 5.

Имеется всего $\lfloor 2003/35 \rfloor = 57$ целых чисел, которые делятся на 5 и на 7.

Имеется всего $\lfloor 2003/21 \rfloor = 95$ целых чисел, которые делятся на 3 и на 7.

Имеется всего $\lfloor 2003/105 \rfloor = 19$ целых чисел, которые делятся на 3 и на 5 и на 7.

Следовательно, количество чисел, которые делятся на 3 или на 5 или на 7, равно $667 + 400 + 286 - 133 - 57 - 95 + 19 = 1087$. Количество чисел, которые не делятся ни на одно из указанных целых чисел, равно $2003 - 1087 = 916$.

Ответ: а) 33; б) 1087; с) 916.

Задача 6 (8 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:

$a b d e f + - + * g h + i j + * *$. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, покажите порядок обхода вершин дерева, позволяющий вычислить значение этого выражения, вычислите значение этого выражения для $a=1, b=2, d=4, e=5, f=6, g=7, h=8, i=9, j=10$.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: $((a*(b+(d-(e+f))))*((g+h)*(i+j)))$. Для наглядности дерево можно изобразить по правилу «корень вверху, листья внизу». Подставляя значения, получим $((1*(2+(4-(5+6))))*((7+8)*(9+10))) = -1425$.

Ответ: -1425.

Задача 7 (12 баллов). Функция E определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: $E(n, 0) = 1$ для $n \geq 0$; $E(n, k) = (2^{n-1-k}) * E(n-1, k-1) + (k+1) * E(n-1, k)$ для $0 < k < n$. Очевидно, что $E(n, n) = 0$ при $n > 0$; $E(n, k) = 0$ при $k > n$. Вычислить вручную $E(6, 4)$.

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7×7 . В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	0					
2	1	2	0				
3	1	8	6	0			
4	1	22	58	24	0		
5	1	52	328	444	120	0	
6	1	114	1452	4400	3708	720	0

Ответ: $E(6, 4) = 3708$.

Задача 8 (12 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\neg(x_1 \equiv x_2) \wedge \neg(x_1 \equiv x_3) \wedge (x_2 \equiv x_3) = 0$$

$$\neg(x_3 \equiv x_4) \wedge \neg(x_3 \equiv x_5) \wedge (x_4 \equiv x_5) = 0$$

$$\neg(x_5 \equiv x_6) \wedge \neg(x_5 \equiv x_7) \wedge (x_6 \equiv x_7) = 0$$

$$\neg(x_7 \equiv x_8) \wedge \neg(x_7 \equiv x_9) \wedge (x_8 \equiv x_9) = 0$$

где x_1, x_2, \dots, x_9 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнены данные равенства. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

- 1) заметим два важных момента:
 - а) все 4 уравнения – однотипные
 - б) первое связано со вторым только через переменную x_3 , второе с третьим – только через x_5 , третье с четвертым – только через x_7
- 2) разберем подробно одно первое уравнение; поскольку в нем используется операция И (конъюнкция) и правая часть равна нулю (ложное значение), имеет смысл проверить ситуации, когда первое уравнение истинно: это будет тогда, когда $x_2 \equiv x_3$, а x_1 не равно этому значению, то есть в двух случаях: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ и $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 1)$
- 3) поскольку логическое уравнение с тремя переменными может иметь не более $8 = 2^3$ решений, вычитаем два решения из этого количества и находим, что первое уравнение имеет $8 - 2 = 6$ решений, причем в трёх из них $x_3 = 0$, а в трёх других $x_3 = 1$.
- 4) подключаем второе уравнение: для каждого из трёх решений первого при $x_3 = 0$ получаем три решения второго, и для каждого из трёх решений первого при $x_3 = 1$ получаем ещё три решения второго, всего система из двух уравнений имеет $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$ решений
- 5) далее продолжаем таблицу:

число уравнений	решений
1	$3_{(\text{при } x_3=0)} + 3_{(\text{при } x_3=1)} = 6$
2	$3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 9_{(\text{при } x_5=0)} + 9_{(\text{при } x_5=1)} = 18$
3	$9 \cdot 3 + 9 \cdot 3 = 27_{(\text{при } x_7=0)} + 27_{(\text{при } x_7=1)} = 54$
4	$27 \cdot 3 + 27 \cdot 3 = 81 + 81 = 162$

Ответ: 162.

Задача 9 (12 баллов).

Pascal	C
<pre> var a: array[0..7] of integer; var j, i1, i2, i3, index: integer; var s: array[0..39] of char; begin for j := 0 to 7 do a[j] := 0; s := 'HHTTTTHHTTTHTHTHTHTHTTTTHHTTTHTTTHTTTHTH'; for j := 0 to 37 do begin if (s[j] = 'H') then i1 := 4 else i1 := 0; if (s[j+1] = 'H') then i2 := 2 else i2 := 0; if (s[j+2] = 'H') then i3 := 1 else i3 := 0; index := i1 + i2 + i3; inc(a[index]); end; for index := 0 to 7 do write(a[index]:5); writeln; end. </pre>	<pre> int a[8] = { 0 }; int main(void) { int j, index; char s[] = " HHTTTTHHTTTHTHTHTHTHTTTTHHTTTHTTTHTTTHTH "; for (j = 0; j < 38; ++j) { index = (s[j] == 'H' ? 4 : 0) + (s[j+1] == 'H' ? 2 : 0) + (s[j+2] == 'H' ? 1 : 0); a[index]++; } for (unsigned index = 0; index < 8; ++index) printf("%5d", a[index]); printf("\n"); return 0; } </pre>

Ответ: 4 7 6 4 7 4 5 1.

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго выше побочной диагонали:

Pascal	C
<pre> const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 <> 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for j:=0 to n-1 do for i:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end. </pre>	<pre> #define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k<2; k++) for (j=0; j<n; j++) for (i=0; i<n; i++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; } </pre>

Решение.

В конце программы матрица **D** будет иметь вид:

```

-4 -5 -9 -10 -10
-7 -8 -12 -13 -13
-13 -14 -26 -27 -27
-16 -17 -29 -30 -30
-18 -19 -31 -32 -32

```

Ответ: -98