Первый (отборочный) этап академического соревнования

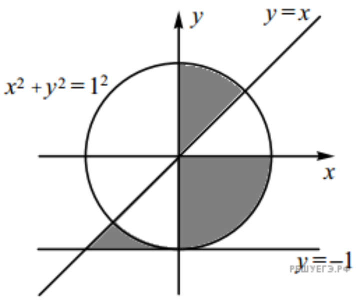
Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

по образовательному предмету «Информатика», осень 2016 г.

Вариант № 2

Задача 1 (8 баллов). Переведите десятичное число A10 = 1876,54625 в шестнадцатеричную систему счисления. Ответ дать с точностью до 4-го знака после запятой.

Задача 2 (8 баллов). На любом языке программирования запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами *x*, *y* попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ (~), поразрядное И (&), поразрядное ИЛИ (|), поразрядный сдвиг влево (<<), поразрядный сдвиг вправо (>>). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (~), уровень 2 (<< и >>), уровень 3 (&), уровень 4 (|). Вычислить значение следующего выражения: (b << 2 | b >> 2) | ~((a & b) >> 2 | (a | b) << 2) для a = 60 и b = 195. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Задача 4 (8 баллов). Упростить логическую функцию:

$(A \to \neg B) \leftrightarrow (B \wedge (C \to \neg A))$.

Ответ должен содержать не более трех логических операций.

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел, меньших 2003, которые a) делятся и на 4, и на 5, и на 6? b) делятся или на 4, или на 5, или на 6? c) не делятся ни на 4, ни на 5, ни на 6?

Задача 6 (8 баллов). Дана префиксная запись арифметического выражения: * * a + b – d + e f * + g h + i j. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, покажите порядок обхода вершин дерева, позволяющий вычислить значение этого выражения, вычислите значение этого выражения для a=10, b=9, d=7, e=6, f=5, g=4, h=3, i=2, j=1.

Задача 7 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1)*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(6, 3).

Задача 8 (12 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) = 1$

$\neg x_1 \wedge y_1 \wedge z_1 \vee x_1 \wedge \neg y_1 \wedge z_1 \vee x_1 \wedge y_1 \wedge \neg z_1 = 1$

$\neg x_2 \wedge y_2 \wedge z_2 \vee x_2 \wedge \neg y_2 \wedge z_2 \vee x_2 \wedge y_2 \wedge \neg z_2 = 1$

$\neg x_3 \wedge y_3 \wedge z_3 \vee x_3 \wedge \neg y_3 \wedge z_3 \vee x_3 \wedge y_3 \wedge \neg z_3 = 1$

где $x_1, \ldots, x_3, y_1, \ldots, y_3, z_1, \ldots, z_3$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнены данные равенства. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Задача 9 (12 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
var a: array[0..7] of integer;
var j, i1, i2, i3, index: integer;
var    s: array[0..39] of char
begin
for j := 0 to 7 do a[j] := 0;
s := 'TTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTT';
for j := 0 to 37 do begin
if ( s[j] = 'H' ) then i1 := 4 else i1 := 0;
if ( s[j+1] = 'H' ) then i2 := 2 else i2 := 0;
if ( s[j+2] = 'H' ) then i3 := 1 else i3 := 0;
index := i1 + i2 + i3;
inc(a[index]);
end;
for index := 0 to 7 do write(a[index]:5);
writeln;
end.
```

C

```
int a[8] = { 0 };
int main(void)
{
int j, index;
char s[] =  "
TTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTT";
for (j = 0; j < 38; ++j) {
index = ( s[j] == 'H' ? 4 : 0 )
+ ( s[j+1] == 'H' ? 2 : 0 )
+ ( s[j+2] == 'H' ? 1 : 0 );
a[index]++;
}
for (unsigned index = 0; index < 8; ++index)
printf("%5d", a[index]);
printf("\n");
return 0;
}
```

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу D после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго выше главной диагонали:

Pascal

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

C

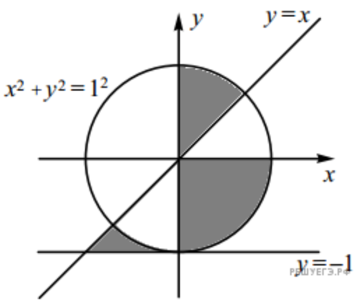
```
#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k;
else D[i][j]=++l;
for (k=0; k<2; k++)
for (j=0; j<n; j++)
for (i=0; i<n; i++)
D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
return 0;
}
```

Решения варианта 2

Задача 1 (8 баллов). Переведите десятичное число A10 = 1876,54625 в шестнадцатеричную систему счисления. Ответ дать с точностью до 4-го знака после запятой.

Ответ: 754,8BD7.

Задача 2 (8 баллов). Запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами x, y попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Решение.

Используя нотацию, принятую в языке С, будем иметь

((x >= 0) && (y >= 0) && (y >= x) && (x*x + y*y <= 1)) ||

((x >= 0) && (y <= 0) && (x*x + y*y <= 1)) ||

((x <= 0) && (y <= 0 && y >= -1) && (y <= x) && (x*x + y*y >= 1))

Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ (~), поразрядное И (&), поразрядное ИЛИ (|), поразрядный сдвиг влево (<<), поразрядный сдвиг вправо (>>). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (~), уровень 2 (<< и >>), уровень 3 (&), уровень 4 (|). Вычислить значение следующего выражения: (b << 2 | b >> 2) | ~((a & b) >> 2 | (a | b) << 2) для a = 60 и b = 195. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Решение.

1) $a = 3c_{16} = 00111100_2$
2) $b = c3_{16} = 11000011_2$
3) $b << 2 = c_{16} = 00001100_2$
4) $b >> 2 = 30_{16} = 00110000_2$
5) $b << 2 | b >> 2) = 3c_{16} = 00111100_2$
6) $a \& b = 0_{16} = 00000000_2$
7) $(a \& b) >> 2 = 0_{16} = 00000000_2$

8) $a \mid b = ff_{16} = 11111111_2$

9) $(a \mid b) << 2 = fc_{16} = 11111100_2$

10) $(a \& b) >> 2 \mid (a \mid b) << 2) = fc_{16} = 11111100_2$

11) $\sim((a \& b) >> 2 \mid (a \mid b) << 2) = 3_{16} = 00000011_2$

12) $(b << 2 \mid b >> 2) \mid \sim((a \& b) >> 2 \mid (a \mid b) << 2) = 3f_{16} = 00111111_2 = 63_{10}$.

Ответ: $00111111_2 = 63_{10}$

Задача 4 (8 баллов). Упростить логическую функцию:

$(A \to \neg B) \leftrightarrow (B \wedge (C \to \neg A))$.

Ответ должен содержать не более трех логических операций.

Ответ: **$B \wedge (\neg A \to C)$.**

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел, меньших 2003, которые a) делятся и на 4, и на 5, и на 6? b) делятся или на 4, или на 5, или на 6? c) не делятся ни на 4, ни на 5, ни на 6?

Решение.

Пусть универсум **U** будет множеством всех неотрицательных целых чисел, меньших 2003. Следовательно, |**U**| = 2003.

Имеется всего $\lfloor 2003/4 \rfloor = 500$ целых чисел, которые делятся на 4.

Имеется всего $\lfloor 2003/5 \rfloor = 400$ целых чисел, которые делятся на 5.

Имеется всего $\lfloor 2003/6 \rfloor = 333$ целых чисел, которые делятся на 6.

Имеется всего $\lfloor 2003/20 \rfloor = 100$ целых чисел, которые делятся на 4 и на 5.

Имеется всего $\lfloor 2003/30 \rfloor = 66$ целых чисел, которые делятся на 5 и на 6.

Имеется всего $\lfloor 2003/12 \rfloor = 166$ целых чисел, которые делятся на 4 и на 6.

Имеется всего $\lfloor 2003/60 \rfloor = 33$ целых чисел, которые делятся на 4 и на 5 и на 6.

Следовательно, количество чисел, которые делятся на 4 или на 5 или на 6, равно 500 + 400 + 333 – 100 – 66 – 166 + 33 = 934. Количество чисел, которые не делятся ни на одно из указанных целых чисел, равно 2003 – 934 = 1069.

Ответ: **a) 33; b) 934; c) 1069.**

Задача 6 (8 баллов). Дана префиксная запись арифметического выражения: * * a + b – d + e f * + g h + i j. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, покажите порядок обхода вершин дерева, позволяющий вычислить значение этого выражения, вычислите значение этого выражения для a=10, b=9, d=7, e=6, f=5, g=4, h=3, i=2, j=1.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: ((a*(b+(d-(e+f))))*((g+h)*(i+j)). Для наглядности дерево можно изобразить по правилу «корень вверху, листья внизу». Подставляя значения, получим ((10*(9+(7-(6+5))))*((4+3)*(2+1)) = 1050.

Ответ: 1050.

Задача 7 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1)*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(6, 3).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	**3**	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	**225**	85	15	1

Ответ: S(6, 3) = 225.

Задача 8 (12 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) = 1$

$\neg x_1 \wedge y_1 \wedge z_1 \vee x_1 \wedge \neg y_1 \wedge z_1 \vee x_1 \wedge y_1 \wedge \neg z_1 = 1$

$\neg x_2 \wedge y_2 \wedge z_2 \vee x_2 \wedge \neg y_2 \wedge z_2 \vee x_2 \wedge y_2 \wedge \neg z_2 = 1$

$\neg x_3 \wedge y_3 \wedge z_3 \vee x_3 \wedge \neg y_3 \wedge z_3 \vee x_3 \wedge y_3 \wedge \neg z_3 = 1$

где $x_1, \ldots, x_3, y_1, \ldots, y_3, z_1, \ldots, z_3$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнены данные равенства. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

1) перепишем уравнения с помощью более простых обозначений:

$$(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3) = 1$$

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$

$$\bar{x}_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot \bar{y}_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot y_2 \cdot \bar{z}_2 = 1$$

$$\bar{x}_3 \cdot y_3 \cdot z_3 + x_3 \cdot \bar{y}_3 \cdot z_3 + x_3 \cdot y_3 \cdot \bar{z}_3 = 1$$

2) заметим, что последние 3 уравнения независимы друга от друга, и вся система связана только через первое уравнение

3) рассмотрим второе уравнение

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$

оно имеет три решения, каждое из которых соответствует единичному значению одного из слагаемых:

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad (x_1, y_1, z_1) = (0,1,1)$$
$$x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad (x_1, y_1, z_1) = (1,0,1)$$
$$x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad (x_1, y_1, z_1) = (1,1,0)$$

4) аналогичные уравнения 3-4 тоже имеют по три решения
5) теперь рассмотрим множество решений системы уравнений 2-3

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$
$$\bar{x}_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot \bar{y}_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot y_2 \cdot \bar{z}_2 = 1$$

при ограничении, которое накладывается первым уравнением:

$$(x_1 \to x_2) = 1$$

6) поскольку импликация дает ложное значение (0) только для случая 1→0, первое уравнение в исходной системе запрещает комбинацию $(x_1, x_2) = (1,0)$.

7) рассмотрим решение уравнений 2 и 3:

(x_1, y_1, z_1)	(x_2, y_2, z_2)
(0,1,1)	(0,1,1)
(1,0,1)	(1,0,1)
(1,1,0)	(1,1,0)

Эти уравнения независимы, поэтому система уравнений 2-3 (без дополнительных ограничений) имеет 3·3=9 решений

При ограничении $(x_1 \to x_2) = 1$:

- в случае $(x_2, y_2, z_2) = (0,1,1)$ имеем только одно решение системы, когда $x_1 = 0$ в уравнении 2, то есть $(x_1, y_1, z_1) = (0,1,1)$
- для двух решений уравнения 3, когда $x_2 = 1$, подходят все 3 отдельных решения уравнения 2

поэтому количество решений системы уравнений 2-3 при ограничении $(x_1 \to x_2) = 1$ вычисляется как 1 + 3 + 3 = 7 решений

8) рассуждая аналогично, подключаем уравнение 4 и ограничение $(x_2 \to x_3) = 1$, получаем, что количество решений системы уравнений 2-4 при ограничении $(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3) = 1$ вычисляется как 1 + 7 + 7 = 15 решений

Ответ: 15.

Задача 9 (12 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
var a: array[0..7] of integer;
var j, i1, i2, i3, index: integer;
var    s: array[0..39] of char
begin
for j := 0 to 7 do a[j] := 0;
s :=
'TTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTT';
for j := 0 to 37 do begin
if ( s[j] = 'H' ) then i1 := 4 else i1 := 0;
if ( s[j+1] = 'H' ) then i2 := 2 else i2 :=
0;
if ( s[j+2] = 'H' ) then i3 := 1 else i3 :=
0;
```

C

```
int a[8] = { 0 };
int main(void)
{
int j, index;
char s[] =  "
TTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTTT";
for (j = 0; j < 38; ++j) {
index = ( s[j] == 'H' ? 4 : 0 )
+ ( s[j+1] == 'H' ? 2 : 0 )
+ ( s[j+2] == 'H' ? 1 : 0 );
a[index]++;
}
for (unsigned index = 0; index < 8; ++index)
```

`index := i1 + i2 + i3;`
`inc(a[index]);`
`end;`
`for index := 0 to 7 do write(a[index]:5);`
`writeln;`
`end.`
	`printf("%5d", a[index]);`
	`printf("\n");`
	`return 0;`
	`}`

Ответ: 38 0 0 0 0 0 0 0.

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго выше главной диагонали:

Pascal

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

C

```
#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k;
else D[i][j]=++l;
for (k=0; k<2; k++)
for (j=0; j<n; j++)
for (i=0; i<n; i++)
D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
return 0;
}
```

Решение.

В конце программы матрица D будет иметь вид:

-4	-5	-9	-10	-10
-7	-8	-12	-13	-13
-13	-14	-26	-27	-27
-16	-17	-29	-30	-30
-18	-19	-31	-32	-32

Ответ: -156