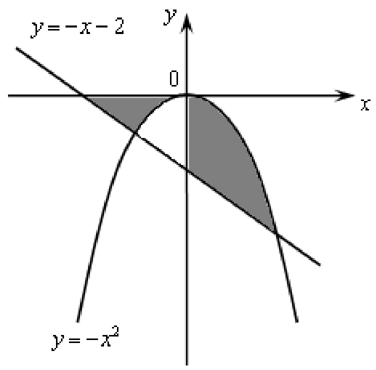
Первый (отборочный) этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Информатика», осень 2016 г.

Вариант № 1

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 32AB,12 в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

Задача 2 (8 баллов). На любом языке программирования запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами *x*, *y* попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ (~), поразрядное И (&), поразрядное ИЛИ (|), поразрядный сдвиг влево (<<), поразрядный сдвиг вправо (>>). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (~), уровень 2 (<< и >>), уровень 3 (&), уровень 4 (|). Вычислить значение следующего выражения: a >> 2 & b << 1 | ~(a << 2 & b >> 1) для a = 240 и b = 63. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Задача 4 (8 баллов). Является ли тождественно истинной формула:

$(A \wedge B \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \wedge \neg C) \rightarrow \neg B)$.

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел, меньших 1001, которые a) делятся и на 2, и на 3, и на 5? b) делятся на 2, или на 3, или на 5? c) не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Задача 6 (8 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:

a b + c – d * e f g h + * – *. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, покажите порядок обхода вершин дерева, позволяющий вычислить значение этого выражения, вычислите значение этого выражения для a=8, b=7, c=6, d=5, e=4, f=3, g=2, h=1.

Задача 7 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + k*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, 1) = 1 при n > 0; S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(6, 3).

Задача 8 (12 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\neg(x_1 \equiv x_2) \wedge \neg(x_1 \equiv x_3) \wedge (x_2 \equiv x_3) = 0$$

$$\neg(x_3 \equiv x_4) \wedge \neg(x_3 \equiv x_5) \wedge (x_4 \equiv x_5) = 0$$

$$\neg(x_5 \equiv x_6) \wedge \neg(x_5 \equiv x_7) \wedge (x_6 \equiv x_7) = 0$$

$$\neg(x_7 \equiv x_8) \wedge \neg(x_7 \equiv x_9) \wedge (x_8 \equiv x_9) = 0$$

где x_1, x_2, …, x_9 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнены данные равенства. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Задача 9 (12 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```pascal
var a: array[0..7] of integer;
var j, i1, i2, i3, index: integer;
var s: array[0..39] of char;
begin
for j := 0 to 7 do a[j] := 0;
s := 'HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHH';
for j := 0 to 37 do begin
if ( s[j] = 'H' ) then i1 := 4 else i1 := 0;
if ( s[j+1] = 'H' ) then i2 := 2 else i2 := 0;
if ( s[j+2] = 'H' ) then i3 := 1 else i3 := 0;
index := i1 + i2 + i3;
inc(a[index]);
end;
for index := 0 to 7 do write(a[index]:5);
writeln;
end.
```

C

```c
int a[8] = { 0 };
int main(void)
{
int j, index;
char s[] =
"HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHH";
for (j = 0; j < 38; ++j) {
index = ( s[j] == 'H' ? 4 : 0 )
+ ( s[j+1] == 'H' ? 2 : 0 )
+ ( s[j+2] == 'H' ? 1 : 0 );
a[index]++;
}
for (unsigned index = 0; index < 8; ++index)
printf("%5d", a[index]);
printf("\n");
return 0;
}
```

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго ниже главной диагонали:

Pascal

```pascal
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

C

```c
#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k;
else D[i][j]=++l;
for (k=0; k<2; k++)
for (j=0; j<n; j++)
for (i=0; i<n; i++)
D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
return 0;
}
```

Решения варианта 1

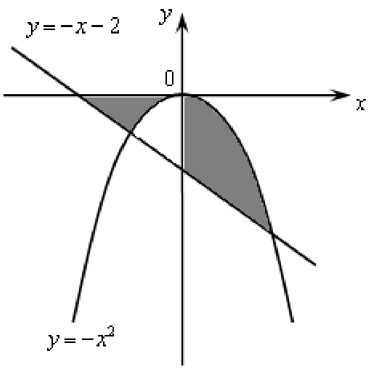
Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 32AB,12 в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

Решение.

32AB,12 = $3*16^3 + 2*16^2 + 10*16^1 + 11*16^0 + 1*16^{-1} + 2*16^{-2}$ = 12288 + 512 + 160 + 11 + 0,0625 + 0,0078125 = 12971 + 0,0703125 = 12971,0703125.

Ответ: 12971,0703125.

Задача 2 (8 баллов). На любом языке программирования запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами *x*, *y* попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Решение.

Используя нотацию, принятую в языке С, будем иметь

```
((x <= 0) && (y <= 0) && (y >= -x-2) && (y >= -x*x)) ||
((x >= 0) && (y <= 0) && (y >= -x-2) && (y <= -x*x))
```

Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ (~), поразрядное И (&), поразрядное ИЛИ (|), поразрядный сдвиг влево (<<), поразрядный сдвиг вправо (>>). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (~), уровень 2 (<< и >>), уровень 3 (&), уровень 4 (|). Вычислить значение следующего выражения: a >> 2 & b << 1 | ~(a << 2 & b >> 1) для a = 240 и b = 63. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Решение.

a = $f0_{16} = 11110000_2$

1) b = $3f_{16} = 00111111_2$

2) $a >> 2 = 3c_{16} = 00111100_2$

3) $b << 1 = 7e_{16} = 01111110_2$

4) $a >> 2 \& b << 1 = 3c_{16} = 00111100_2$

5) $a << 2 = c0_{16} = 11000000_2$

6) $b >> 1 = 1f_{16} = 00011111_2$

7) $a << 2 \& b >> 1 = 0_{16} = 00000000_2$

8) $\sim(a << 2 \& b >> 1) = ff_{16} = 11111111_2$

9) $a >> 2 \& b << 1 \mid \sim(a << 2 \& b >> 1) = ff_{16} = 11111111_2 = 255_{10}$.

Ответ: $11111111_2 = 255_{10}$.

Задача 4 (8 баллов). Является ли тождественно истинной формула:

$(A \wedge B \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \wedge \neg C) \rightarrow \neg B)$.

Ответ: ДА.

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел, меньших 1001, которые a) делятся и на 2, и на 3, и на 5? b) делятся на 2, или на 3, или на 5? c) не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Решение.

Пусть универсум **U** будет множеством всех неотрицательных целых чисел, меньших 1001. Следовательно, $|\mathbf{U}| = 1001$.

Имеется всего $\lfloor 1001/2 \rfloor = 500$ целых чисел, которые делятся на 2.

Имеется всего $\lfloor 1001/3 \rfloor = 333$ целых чисел, которые делятся на 3.

Имеется всего $\lfloor 1001/5 \rfloor = 200$ целых чисел, которые делятся на 5.

Имеется всего $\lfloor 1001/6 \rfloor = 166$ целых чисел, которые делятся на 2 и на 3.

Имеется всего $\lfloor 1001/15 \rfloor = 66$ целых чисел, которые делятся на 3 и на 5.

Имеется всего $\lfloor 1001/10 \rfloor = 100$ целых чисел, которые делятся на 2 и на 5.

Имеется всего $\lfloor 1001/30 \rfloor = 33$ целых чисел, которые делятся на 2 и на 3 и на 5.

Следовательно, количество чисел, которые делятся на 2 или на 3 или на 5, равно $500 + 333 + 200 - 166 - 66 - 100 + 33 = 734$. Количество чисел, которые не делятся ни на одно из указанных целых чисел, равно $1001 - 734 = 267$.

Ответ: a) 33; b) 734; c) 267.

Задача 6 (8 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:

a b + c – d * e f g h + * – *. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, покажите порядок обхода вершин дерева, позволяющий вычислить значение этого выражения, вычислите значение этого выражения для a=8, b=7, c=6, d=5, e=4, f=3, g=2, h=1.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид ((((a+b)-c)*d)*(e-(f*(g+h)))). Для наглядности дерево можно изобразить по правилу «корень вверху, листья внизу». Подставляя значения, получим ((((8+7)-6)*5)*(4-(3*(2+1)))) = -225.

Ответ: -225.

Задача 7 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + k*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, 1) = 1 при n > 0; S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(6, 3).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	**3**	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	**90**	65	15	1

Ответ: S(6, 3) = 90.

Задача 8 (12 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\neg(x_1 \equiv x_2) \land \neg(x_1 \equiv x_3) \land (x_2 \equiv x_3) = 0$$

$$\neg(x_3 \equiv x_4) \land \neg(x_3 \equiv x_5) \land (x_4 \equiv x_5) = 0$$

$$\neg(x_5 \equiv x_6) \land \neg(x_5 \equiv x_7) \land (x_6 \equiv x_7) = 0$$

$$\neg(x_7 \equiv x_8) \land \neg(x_7 \equiv x_9) \land (x_8 \equiv x_9) = 0$$

где x_1, x_2, …, x_9 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнены данные равенства. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

1) заметим два важных момента:
   а) все 4 уравнения – однотипные
   б) первое связано со вторым только через переменную $\mathbf{x_3}$, второе с третьим – только через $\mathbf{x_5}$, третье с четвертым – только через $\mathbf{x_7}$
2) разберем подробно одно первое уравнение; поскольку в нем используется операция И (конъюнкция) и правая часть равна нулю (ложное значение), имеет смысл проверить ситуации, когда первое уравнение истинно: это будет тогда, когда $\mathbf{x_2 \equiv x_3}$, а $\mathbf{x_1}$ не равно этому значению, то есть в двух случаях: $(\mathbf{x_1,x_2,x_3})=(1,0,0)$ и $(\mathbf{x_1,x_2,x_3})=(0,1,1)$
3) поскольку логическое уравнение с тремя переменными может иметь не более $8 = 2^3$ решений, вычитаем два решения из этого количества и находим, что первое уравнение имеет $8 – 2 = 6$ решений, причем в трёх из них $\mathbf{x_3} = 0$, а в трёх других $\mathbf{x_3} = 1$.
4) подключаем второе уравнение: для каждого из трёх решений первого при $\mathbf{x_3} = 0$ получаем три решения второго, и для каждого из трёх решений первого при $\mathbf{x_3} = 1$ получаем ещё три решения второго, всего система из двух уравнений имеет 3*3 + 3*3 = 18 решений
5) далее продолжаем таблицу:

число уравнений	решений
1	$3_{(\text{при } \mathbf{x3}=0)} + 3_{(\text{при } \mathbf{x3}=1)} = 6$
2	$3*3 + 3*3 = 9_{(\text{при } \mathbf{x5}=0)} + 9_{(\text{при } \mathbf{x5}=1)} = 18$
3	$9*3 + 9*3 = 27_{(\text{при } \mathbf{x7}=0)} + 27_{(\text{при } \mathbf{x7}=1)} = 54$
4	27*3 + 27*3 = 81 + 81 = 162

Ответ: 162.

Задача 9 (12 баллов).

Pascal

```
var a: array[0..7] of integer;
var j, i1, i2, i3, index: integer;
var   s: array[0..39] of char;
begin
for j := 0 to 7 do a[j] := 0;
s :=
'HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHH';
for j := 0 to 37 do begin
if ( s[j] = 'H' ) then i1 := 4 else i1 := 0;
if ( s[j+1] = 'H' ) then i2 := 2 else i2 :=
0;
if ( s[j+2] = 'H' ) then i3 := 1 else i3 :=
0;
index := i1 + i2 + i3;
inc(a[index]);
end;
for index := 0 to 7 do write(a[index]:5);
writeln;
end.
```

C

```
int a[8] = { 0 };
int main(void)
{
int j, index;
char s[] =
"HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHH";
for (j = 0; j < 38; ++j) {
index = ( s[j] == 'H' ? 4 : 0 )
+ ( s[j+1] == 'H' ? 2 : 0 )
+ ( s[j+2] == 'H' ? 1 : 0 );
a[index]++;
}
for (unsigned index = 0; index < 8; ++index)
printf("%5d", a[index]);
printf("\n");
return 0;
}
```

Ответ: 0 0 0 0 0 0 0 38.

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго ниже главной диагонали:

Pascal

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

C

```
#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k;
else D[i][j]=++l;
for (k=0; k<2; k++)
for (j=0; j<n; j++)
for (i=0; i<n; i++)
D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
return 0;
}
```

Решение.

В конце программы матрица D будет иметь вид:

$$\begin{matrix} -4 & -5 & -9 & -10 & -10 \\ -7 & -8 & -12 & -13 & -13 \\ -13 & -14 & -26 & -27 & -27 \\ -16 & -17 & -29 & -30 & -30 \\ -18 & -19 & -31 & -32 & -32 \end{matrix}$$

Ответ: -196