

**Второй (заключительный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету
«Информатика», весна 2017 г.
Вариант № 10**

Задача 1 (8 баллов). Существует ли такая система счисления, в которой $3 + 4 = 7$, $3 \times 4 = 13$ и $39 + 29 = 70$?

Задача 2 (8 баллов). Найти четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию, если известно, что после того, как к ним прибавить соответственно 1, 1, 4 и 13, они будут составлять арифметическую прогрессию.

Задача 3 (8 баллов). Из точки проведено n лучей. Сколько образовалось углов?

Задача 4 (8 баллов). При помощи тождеств алгебры логики выяснить, являются ли формулы $F1 = x \text{ and not } y \text{ or } y \text{ and not } z$ и $F2 = (x \text{ or not } y) \text{ and } (y \text{ or not } z)$ эквивалентными.

Задача 5 (8 баллов). Сколько имеется шестизначных чисел, у которых сумма цифр четная (первая цифра числа предполагается отличной от нуля)?

Задача 6 (8 баллов). Замените префиксное выражение $+**3ab+**4cd**5ad$ инфиксным.

Задача 7 (12 баллов). Решить рекуррентную функцию, т. е. найти формулу для n -ого члена ряда чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, если $a_1 = -1, a_2 = 1$ и каждое a_n , начиная с a_3 , есть $a_n = -2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$.

Задача 8 (12 баллов). Найти четырехзначное число по следующим условиям: сумма квадратов крайних цифр равна 13, сумма квадратов средних цифр равна 85, цифра тысяч на столько же больше цифры единиц, на сколько цифра сотен больше цифры десятков; если же из искомого числа вычесть 1089, то получится число, записываемое теми же цифрами, но в обратном порядке.

Задача 9 (12 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

| Pascal | C |
|--|--|
| <pre>var a: byte=22; b: byte=220; begin writeln(byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and (byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1))); end.</pre> | <pre>typedef unsigned char byte; int main() { byte a=22, b=220; printf("%d\n", (byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) & ((byte)((a b) >> 1) (byte)((a & b) << 1))); return 0; }</pre> |

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго ниже ее главной диагонали:

| Pascal | C |
|--|--|
| <pre>const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 = 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end.</pre> | <pre>#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k<2; k++) for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; }</pre> |

Ответы варианта 10

Задача 1 (8 баллов). Существует ли такая система счисления, в которой $3 + 4 = 7$, $3 \times 4 = 13$ и $39 + 29 = 70$?

Решение.

Предположим, что такая система счисления существует, обозначим ее основание через P . Тогда справедлива следующая система уравнений относительно P

$$3P^0 + 4P^0 = 7P^0,$$

$$3P^0 \times 4P^0 = P + 3P^0,$$

$$3P + 9P^0 + 2P + 9P^0 = 7P.$$

Из двух последних уравнений следует, что $P = 9$.

Но в позиционной системе счисления с основанием 9 нет цифры "9", т.е. в этой системе счисления нельзя записать числа 29 и 39.

Ответ: Такой системы счисления не существует.

Задача 2 (8 баллов). Найти четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию, если известно, что после того, как к ним прибавить соответственно 1, 1, 4 и 13, они будут составлять арифметическую прогрессию.

Ответ: -3, -6, -12, -24.

Задача 3 (8 баллов). Из точки проведено n лучей. Сколько образовалось углов?

Ответ: C_n^2

Задача 4 (8 баллов). При помощи тождеств алгебры логики выяснить, являются ли формулы

$F1 = x \text{ and not } y \text{ or } y \text{ and not } z$ и $F2 = (x \text{ or not } y) \text{ and } (y \text{ or not } z)$ эквивалентными.

Ответ: НЕТ.

Задача 5 (8 баллов). Сколько имеется шестизначных чисел, у которых сумма цифр четная (первая цифра числа предполагается отличной от нуля)?

Ответ: 64800.

Задача 6 (8 баллов). Замените префиксное выражение $+++3ab+++4cd**5ad$ инфиксным.

Ответ: $3*a*b+4*c*d+5*a*d$.

Задача 7 (12 баллов). Решить рекуррентную функцию, т. е. найти формулу для n -ого члена ряда чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, если $a_1 = -1, a_2 = 1$ и каждое a_n , начиная с a_3 , есть $a_n = -2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$.

Ответ: $a_n = (-1)^n$.

Задача 8 (12 баллов). Найти четырехзначное число по следующим условиям: сумма квадратов крайних цифр равна 13, сумма квадратов средних цифр равна 85, цифра тысяч на столько же больше цифры единиц, на сколько цифра сотен больше цифры десятков; если же из искомого числа вычесть 1089, то получится число, записываемое теми же цифрами, но в обратном порядке.

Ответ: 3762.

Задача 9 (12 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

| Pascal | C |
|--|---|
| <pre>var a: byte=22; b: byte=220; begin writeln(byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and (byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1))); end.</pre> | <pre>typedef unsigned char byte; int main() { byte a=22, b=220; printf("%d\n", (byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) & ((byte)((a b) >> 1) (byte)((a & b) << 1))); return 0; }</pre> |

Ответ: 71.

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу D после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго ниже ее главной диагонали:

| Pascal | C |
|--|--|
| <pre>const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 = 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end.</pre> | <pre>#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k<2; k++) for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; }</pre> |

Решение задачи 10.

После первичного заполнения матрица D будет иметь вид:

-1 1 -2 2 -3
3 -4 4 -5 5
-6 6 -7 7 -8
8 -9 9 -10 10
-11 11 -12 12 -13

Для $k=0$ матрица D будет иметь вид:

-2 -1 -4 0 -5
1 -4 -3 -5 -4
-8 -9 -12 -8 -13
6 -9 2 -10 1
-13 -14 -17 -13 -18

Для $k=1$ матрица D будет иметь вид:

-2 -5 -8 -10 -9
-3 -8 -11 -13 -12
-12 -17 -28 -30 -29
-12 -17 -28 -30 -29
-17 -22 -33 -35 -34

Ответ: Сумма элементов строго ниже главной диагонали итоговой матрицы: -196.