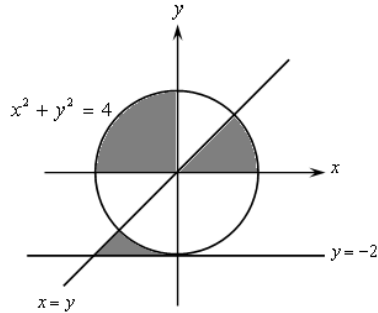


Типовой вариант

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число $A_{16} = 32AB,C1$ в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

Задача 2 (8 баллов). На любом языке программирования запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами x, y попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. Вычислить значение следующего выражения: $(\sim a \mid a \ll 1 \ \& \ a \gg 1) \ \& \ ((a \mid b) \gg 1 \mid (a \ \& \ b) \ll 1)$ для $a = 15$ и $b = 136$. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Задача 4 (8 баллов). На книжной полке расположены книги по математике, физике, информатике и химии. Какая книга будет выбрана при одновременном выполнении следующих условий: а) если не выбирается химия, то не выбирается физика; б) не верно, что если выбирается информатика, то выбирается химия; с) если выбирается математика, то выбирается физика.

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел между 1 и 2003, которые а) Делятся на 6? б) Делятся на 7? с) Делятся на 8? д) Делятся на 6 или 7 или 8?

Задача 6 (8 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения: $a \ x \ b \ x \ c \ x \ d \ x \ e \ x \ x \ + \ * \ + \ * \ + \ * \ + \ * \ +$. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, и с помощью алгоритма централизованного обхода дерева вручную вычислите значение этого выражения для $x=3, a=1, b=2, c=3, d=4, e=5$.

Задача 7 (12 баллов). Функция A определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел m и n следующим образом: $A(0, n) = n+1$; $A(m, 0) = A(m-1, 1)$, если $m > 0$; $A(m, n) = A(m-1, A(m, n-1))$, если $n, m > 0$. Вычислить вручную значение $A(3, 2)$.

Задача 8 (12 баллов). Укажите наибольшее целое число X , при котором логическое выражение $(10 < X \cdot (X+1)) \rightarrow (10 > (X+1) \cdot (X+2))$ истинно.

Задача 9 (12 баллов). Выпишите состояние массива a в конце выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre>const n=9; var a: array[0..n-1] of integer = (7, 3, 9, 4, 2, 5, 6, 1, 8); var i, first, p, v, t: integer; begin first:=0; p:=first; v:=a[first]; for i:=first+1 to n-1 do if (a[i]<v) then begin p:=i+1; t:=a[i]; a[i]:=a[p]; a[p]:=t; end; t:=a[first]; a[first]:=a[p]; a[p]:=t; end.</pre>	<pre>const int n = 9; int a[n] = {7, 3, 9, 4, 2, 5, 6, 1, 8}; int main() { int i, first, p, v, t; first=0; p=first; v=a[first]; for (i=first+1; i<n; i++) if (a[i]<v) { p++; t=a[i]; a[i]=a[p]; a[p]=t; } t=a[first]; a[first]=a[p]; a[p]=t; return 0; }</pre>

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее главной диагонали:

Pascal	C
<pre> const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 <> 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for j:=0 to n-1 do for i:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end. </pre>	<pre> #define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k<2; k++) for (j=0; j<n; j++) for (i=0; i<n; i++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; } </pre>

Типовой вариант (условия, решения, ответы)

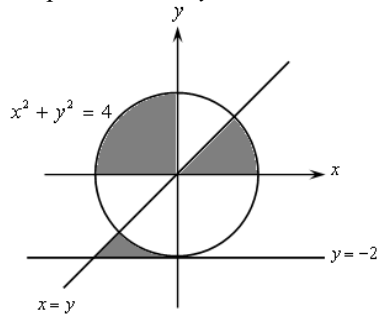
Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число $A_{16} = 32AB,C1$ в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

Решение задачи 1.

$$32AB,C1 = 3 \cdot 16^3 + 2 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 + 12 \cdot 16^{-1} + 1 \cdot 16^{-2} = 12288 + 512 + 160 + 11 + 0,75 + 0,00390625 = 12971 + 0,75390625 = 12971,75390625.$$

Ответ: 12971,75390625.

Задача 2 (8 баллов). На любом языке программирования запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами x, y попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Решение задачи 2 на языке Си.

```
((x <= 0) && (y >= 0) && ((x*x + y*y) <= 4)) ||
((x >= 0) && (y >= 0) && ((x*x + y*y) <= 4) && (y <= x)) ||
((x <= 0) && (y <= 0) && (y >= -2) && ((x*x + y*y) >= 4) && (y <= x))
```

Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. Вычислить значение следующего выражения: $(\sim a \mid a \ll 1 \ \& \ a \gg 1) \ \& \ ((a \mid b) \gg 1 \mid (a \ \& \ b) \ll 1)$ для $a = 15$ и $b = 136$. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Решение задачи 3.

- 1) $a = 15_{10} = 00001111_2$
- 2) $b = 136_{10} = 10001000_2$
- 3) $\sim a = 11110000_2$
- 4) $a \ll 1 = 00011110_2$
- 5) $a \gg 1 = 00000111_2$
- 6) $a \ll 1 \ \& \ a \gg 1 = 00000110_2$
- 7) $\sim a \mid a \ll 1 \ \& \ a \gg 1 = 11110110_2$
- 8) $a \mid b = 10001111_2$
- 9) $(a \mid b) \gg 1 = 01000111_2$
- 10) $a \ \& \ b = 00001000_2$
- 11) $(a \ \& \ b) \ll 1 = 00010000_2$
- 12) $(a \mid b) \gg 1 \mid (a \ \& \ b) \ll 1 = 01010111_2$
- 13) $(\sim a \mid a \ll 1 \ \& \ a \gg 1) \ \& \ ((a \mid b) \gg 1 \mid (a \ \& \ b) \ll 1) = 01010110_2 = 86_{10}.$

Ответ: 01010110₂ = 86₁₀.

Задача 4 (8 баллов). На книжной полке расположены книги по математике, физике, информатике и химии. Какая книга будет выбрана при одновременном выполнении следующих условий: а) если не выбирается химия, то не выбирается физика; б) не верно, что если выбирается информатика, то выбирается химия; с) если выбирается математика, то выбирается физика.

Решение задачи 4.

Введем следующие обозначения: М – математика, Р – физика, I – информатика, С – химия. Используя элементарные функции алгебры логики, запишем условие задачи в аналитической форме:

$$f(M, P, I, C) = (\neg C \rightarrow \neg P) \wedge \neg (I \rightarrow C) \wedge (M \rightarrow P).$$

Используя свойства функций алгебры логики, выполним преобразования:

$$\begin{aligned} (\neg C \rightarrow \neg P) \wedge \neg (I \rightarrow C) \wedge (M \rightarrow P) &= \\ (\neg \neg C \vee \neg P) \wedge \neg (\neg I \vee C) \wedge (\neg M \vee P) &= \\ (C \vee \neg P) \wedge (\neg \neg I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) &= \\ (C \vee \neg P) \wedge (I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) &= \\ (C \wedge I \wedge \neg C \vee \neg P \wedge I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) &= \\ (\neg P \wedge I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) &= \\ (\neg P \wedge I \wedge \neg C \wedge \neg M \vee \neg P \wedge I \wedge \neg C) &= \\ (\neg P \wedge I \wedge \neg C \wedge \neg M). \end{aligned}$$

Функция $f(M, P, I, C)$ равна единице при следующих значениях переменных: $M = 0, P = 0, I = 1, C = 0$.

Ответ: Информатика.

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел между 1 и 2003, которые а) Делятся на 6? б) Делятся на 7? с) Делятся на 8? д) Делятся на 6 или 7 или 8?

Решение задачи 5.

Ответ: а) 333; б) 286; с) 250; д) 715.

Задача 6 (8 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:

$a \ x \ b \ x \ c \ x \ d \ x \ e \ x \ + \ * \ + \ * \ + \ * \ + \ * \ +$. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, и с помощью алгоритма централизованного обхода дерева вручную вычислите значение этого выражения для $x=3, a=1, b=2, c=3, d=4, e=5$.

Решение задачи 6.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: $(a+(x*(b+(x*(c+(x*(d+(x*(e+x))))))))$). Для наглядности дерево можно изобразить по правилу «корень вверху, листья внизу». Подставляя значения, получим $(1+(3*(2+(3*(3+(3*(4+(3*(5+3)))))))) = 790$.

Ответ: 790.

Задача 7 (12 баллов). Функция А определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел m и n следующим образом: $A(0, n) = n+1$; $A(m, 0) = A(m-1, 1)$, если $m > 0$; $A(m, n) = A(m-1, A(m, n-1))$, если $n, m > 0$. Вычислить вручную значение $A(3, 2)$.

Решение задачи 7.

$$\begin{aligned} 1) \quad &A(0, 0) = 1; \\ &A(0, 1) = 2; \\ &A(0, 2) = 3; \\ &\dots \\ &A(0, n) = n+1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad &A(1, 0) = A(0, 1) = 2; \\ &A(1, 1) = A(0, A(1, 0)) = A(0, 2) = 3; \\ &A(1, 2) = A(0, A(1, 1)) = A(0, 3) = 4; \\ &\dots \\ &A(1, n) = A(0, A(1, n-1)) = A(0, n+1) = n+2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad &A(2, 0) = A(1, 1) = 3 \\ &A(2, 1) = A(1, A(2, 0)) = A(1, 3) = 5; \\ &A(2, 2) = A(1, A(2, 1)) = A(1, 5) = 7; \\ &\dots \\ &A(2, n) = A(1, A(2, n-1)) = 2*n+3; \end{aligned}$$

- 4) $A(3, 0) = A(2, 1) = 5$;
 $A(3, 1) = A(2, A(3, 0)) = A(2, 5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13$;
 $A(3, 2) = A(2, A(3, 1)) = A(2, 13) = 2 \cdot 13 + 3 = 29$.

Для наглядности результаты вычислений представим в табличной форме

m\p	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	5	7	9	11	13
3	5	13	29			

Ответ: $A(3, 2) = 29$.

Задача 8 (12 баллов). Укажите наибольшее целое число X , при котором логическое выражение $(10 < X \cdot (X+1)) \rightarrow (10 > (X+1) \cdot (X+2))$ истинно.

Решение задачи 8.

- это операция импликации между двумя отношениями: $A_0 = (10 < X \cdot (X+1))$ и $B_0 = (10 > (X+1) \cdot (X+2))$;
- заметим, что по условию нас интересуют только целые числа, поэтому можно попытаться как-то преобразовать исходное выражение, получив равносильное высказывание (точные значения корней нас совершенно не интересуют!);
- рассмотрим неравенство $A_0 = (10 < X \cdot (X+1))$: очевидно, что X может быть как положительным, так и отрицательным числом;
- легко проверить, что в области $X \geq 0$ высказывание A_0 истинно при всех целых $X \geq 3$, а в области $X \leq 0$ – при всех целых $X \leq -4$ (чтобы не запутаться, удобнее использовать нестрогие неравенства);
- поэтому для целых X можно заменить A_0 на равносильное выражение $A = (X \leq -4) + (X \geq 3)$;
- область истинности выражения – объединение двух бесконечных интервалов;
- теперь рассмотрим второе неравенство $B_0 = (10 > (X+1) \cdot (X+2))$: очевидно, что X так же может быть как положительным, так и отрицательным числом;
- в области $X \geq 0$ высказывание B_0 истинно при всех целых $X \leq 1$, а в области $X \leq 0$ – при всех целых $X \geq -4$, поэтому для целых X можно заменить B_0 на равносильное выражение $B = (-4 \leq X \leq 0) + (0 \leq X \leq 1) = (-4 \leq X \leq 1)$;
- область истинности выражения – закрытый интервал;
- вспомним таблицу истинности операции «импликация»:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

согласно таблице, заданное выражение истинно везде, кроме областей, где $A = 1$ и $B = 0$.

- обратите внимание, что значение 3 уже не входит в эту область, потому что там $A = 1$ и $B = 0$, то есть импликация дает 0;
- максимальное целое число в этой области будет 2.

Ответ: 2.

Задача 9 (12 баллов). Выпишите состояние массива a в конце выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre>const n=9; var a: array[0..n-1] of integer = (7, 3, 9, 4, 2, 5, 6, 1, 8); var i, first, p, v, t: integer; begin first:=0; p:=first; v:=a[first]; for i:=first+1 to n-1 do if (a[i]<v) then begin p:=p+1; t:=a[i]; a[i]:=a[p]; a[p]:=t; end; t:=a[first]; a[first]:=a[p]; a[p]:=t; end.</pre>	<pre>const int n = 9; int a[n] = {7, 3, 9, 4, 2, 5, 6, 1, 8}; int main() { int i, first, p, v, t; first=0; p=first; v=a[first]; for (i=first+1; i<n; i++) if (a[i]<v) { p++; t=a[i]; a[i]=a[p]; a[p]=t; } t=a[first]; a[first]=a[p]; a[p]=t; return 0; }</pre>

Решение задачи 9.

Выпишем состояние массива **a** после каждого прохода **for**-цикла:

1-й проход: 7 3 9 4 2 5 6 1 8
 2-й проход: 7 3 9 4 2 5 6 1 8
 3-й проход: 7 3 4 9 2 5 6 1 8
 4-й проход: 7 3 4 2 9 5 6 1 8
 5-й проход: 7 3 4 2 5 9 6 1 8
 6-й проход: 7 3 4 2 5 6 9 1 8
 7-й проход: 7 3 4 2 5 6 1 9 8
 8-й проход: 7 3 4 2 5 6 1 9 8

После выхода из **for**-цикла переменная **p** равна 6, и выполняется последняя перестановка элементов, после которой состояние массива **a** будет таким: 1 3 4 2 5 6 7 9 8.

Ответ: 1, 3, 4, 2, 5, 6, 7, 9, 8.

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее главной диагонали:

Pascal	C
<pre>const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 <> 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for j:=0 to n-1 do for i:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end.</pre>	<pre>#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k<2; k++) for (j=0; j<n; j++) for (i=0; i<n; i++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; }</pre>

Решение задачи 10.

После инициализации матрица **D** будет иметь вид:

```
 1  -1  2  -2  3
-3  4  -4  5  -5
 6  -6  7  -7  8
-8  9  -9 10 -10
11 -11 12 -12 13
```

Для **k=0** матрица **D** будет иметь вид:

```
 1  -1  2  -2  3
-3  -4  -4  -5  -5
 6  -6  7  -7  8
-8  -9  -9 -10 -10
11 -11 12 -12 13
```

Для **k=1** матрица **D** будет иметь вид:

```
-4  -5  -9 -10 -10
-7  -8 -12 -13 -13
-13 -14 -26 -27 -27
-16 -17 -29 -30 -30
-18 -19 -31 -32 -32
```

В конце программы матрица **D** будет иметь вид:

-4	-5	-9	-10	-10
-7	-8	-12	-13	-13
-13	-14	-26	-27	-27
-16	-17	-29	-30	-30
-18	-19	-31	-32	-32

Ответ: -4 -8 -26 -30 -32.