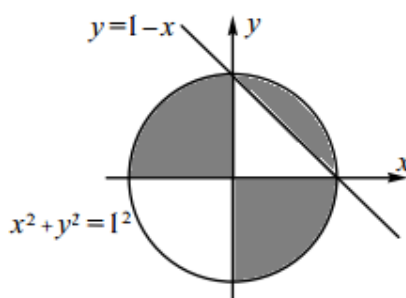


**Первый (отборочный) этап академического соревнования  
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету  
«Информатика», осень 2016 г.  
Вариант № 3**

**Задача 1 (8 баллов).** Переведите шестнадцатеричное число  $A16 = 147E,59$  в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

**Задача 2 (8 баллов).** На любом языке программирования запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами  $x, y$  попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



**Задача 3 (8 баллов).** Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ ( $\sim$ ), поразрядное И ( $\&$ ), поразрядное ИЛИ ( $\mid$ ), поразрядный сдвиг влево ( $\ll$ ), поразрядный сдвиг вправо ( $\gg$ ). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 ( $\sim$ ), уровень 2 ( $\ll$  и  $\gg$ ), уровень 3 ( $\&$ ), уровень 4 ( $\mid$ ). Вычислить значение следующего выражения:  $\sim(b \ll 1 \ \& \ b \gg 1) \ \& \ ((a \mid b) \gg 1 \mid (a \ \& \ b) \ll 1)$  для  $a = 195$  и  $b = 60$ . Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

**Задача 4 (8 баллов).** Упростить логическую функцию:

$$A \wedge (A \rightarrow B) \wedge (A \leftrightarrow (C \wedge \neg B)).$$

Ответ должен содержать не более трех логических операций.

**Задача 5 (8 баллов).** Сколько существует положительных целых чисел, меньших 2003, которые а) делятся и на 3, и на 5, и на 7? б) делятся или на 3, или на 5, или на 7? с) не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

**Задача 6 (8 баллов).** Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:

$a b d e f + - + * g h + i j + * *$ . Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, покажите порядок обхода вершин дерева, позволяющий вычислить значение этого выражения, вычислите значение этого выражения для  $a=1, b=2, d=4, e=5, f=6, g=7, h=8, i=9, j=10$ .

**Задача 7 (12 баллов).** Функция  $E$  определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел  $n$  и  $k$  следующим образом:  $E(n, 0) = 1$  для  $n \geq 0$ ;  $E(n, k) = (2*n-1-k)*E(n-1, k-1) + (k+1)*E(n-1, k)$  для  $0 < k < n$ . Очевидно, что  $E(n, n) = 0$  при  $n > 0$ ;  $E(n, k) = 0$  при  $k > n$ . Вычислить вручную  $E(6, 4)$ .

**Задача 8 (12 баллов).** Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\neg(x_1 \equiv x_2) \wedge \neg(x_1 \equiv x_3) \wedge (x_2 \equiv x_3) = 0$$

$$\neg(x_3 \equiv x_4) \wedge \neg(x_3 \equiv x_5) \wedge (x_4 \equiv x_5) = 0$$

$$\neg(x_5 \equiv x_6) \wedge \neg(x_5 \equiv x_7) \wedge (x_6 \equiv x_7) = 0$$

$$\neg(x_7 \equiv x_8) \wedge \neg(x_7 \equiv x_9) \wedge (x_8 \equiv x_9) = 0$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_9$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнены данные равенства. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

**Задача 9 (12 баллов).** Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre> var a: array[0..7] of integer; var j, i1, i2, i3, index: integer; var s: array[0..39] of char; begin for j := 0 to 7 do a[j] := 0; s := 'HHHTTTHHTTTHTHTHTHTTTHTTTHTTTHTHTH'; for j := 0 to 37 do begin if ( s[j] = 'H' ) then i1 := 4 else i1 := 0; if ( s[j+1] = 'H' ) then i2 := 2 else i2 := 0; if ( s[j+2] = 'H' ) then i3 := 1 else i3 := 0; index := i1 + i2 + i3; inc(a[index]); end; for index := 0 to 7 do write(a[index]:5); writeln; end. </pre>	<pre> int a[8] = { 0 }; int main(void) { int j, index; char s[] = " HHHTTTHHTTTHTHTHTHTTTHTTTHTTTHTHTH "; for (j = 0; j &lt; 38; ++j) { index = ( s[j] == 'H' ? 4 : 0 ) + ( s[j+1] == 'H' ? 2 : 0 ) + ( s[j+2] == 'H' ? 1 : 0 ); a[index]++; } for (unsigned index = 0; index &lt; 8; ++index) printf("%5d", a[index]); printf("\n"); return 0; } </pre>

**Задача 10 (16 баллов).** Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго выше побочной диагонали:

Pascal	C
<pre> const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 &lt;&gt; 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for j:=0 to n-1 do for i:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end. </pre>	<pre> #define MIN(X,Y) ((X) &lt; (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i&lt;n; i++) for (j=0; j&lt;n; j++) if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k&lt;2; k++) for (j=0; j&lt;n; j++) for (i=0; i&lt;n; i++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; } </pre>

### Решения варианта 3

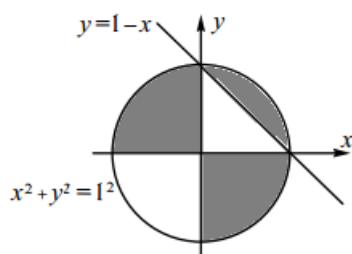
**Задача 1 (8 баллов).** Переведите шестнадцатеричное число  $A16 = 147E,59$  в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

**Решение.**

$$147E,59 = 1 \cdot 16^3 + 4 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^0 + 5 \cdot 16^{-1} + 9 \cdot 16^{-2} = 4096 + 1024 + 112 + 14 + 0,3125 + 0,03515625 = 5246 + 0,34765625 = 5246,34765625.$$

**Ответ: 5246,34765625.**

**Задача 2 (8 баллов).** Запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами  $x, y$  попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



**Решение.**

Используя нотацию, принятую в языке C, будем иметь

$$((x \leq 0) \ \&\& \ (y \geq 0) \ \&\& \ (x*x + y*y \leq 1)) \ ||$$

$$((x \geq 0) \ \&\& \ (y \leq 0) \ \&\& \ (x*x + y*y \leq 1)) \ ||$$

$$((x \geq 0) \ \&\& \ (y \geq 0) \ \&\& \ (y \geq 1-x) \ \&\& \ (x*x + y*y \leq 1))$$

**Задача 3 (8 баллов).** Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ ( $\sim$ ), поразрядное И ( $\&$ ), поразрядное ИЛИ ( $\mid$ ), поразрядный сдвиг влево ( $\ll$ ), поразрядный сдвиг вправо ( $\gg$ ). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 ( $\sim$ ), уровень 2 ( $\ll$  и  $\gg$ ), уровень 3 ( $\&$ ), уровень 4 ( $\mid$ ). Вычислить значение следующего выражения:  $\sim(b \ll 1 \ \& \ b \gg 1) \ \& \ ((a \mid b) \gg 1 \ \mid \ (a \ \& \ b) \ll 1)$  для  $a = 195$  и  $b = 60$ . Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

**Решение.**

$$a = c3_{16} = 11000011_2$$

$$b = 3c_{16} = 00111100_2$$

$$b \ll 1 = 78_{16} = 01111000_2$$

$$b \gg 1 = 1e_{16} = 00011110_2$$

$$b \ll 1 \ \& \ b \gg 1 = 18_{16} = 00011000_2$$

$$\sim(b \ll 1 \ \& \ b \gg 1) = e7_{16} = 11100111_2$$

$$a \mid b = ff_{16} = 11111111_2$$

$$(a \mid b) \gg 1 = 7f_{16} = 01111111_2$$

$$a \ \& \ b = 00_{16} = 00000000_2$$

$$(a \ \& \ b) \ll 1 = 00_{16} = 00000000_2$$

$$(a \mid b) \gg 1 \mid (a \ \& \ b) \ll 1 = 7f_{16} = 01111111_2$$

$$\sim(b \ll 1 \ \& \ b \gg 1) \ \& \ ((a \mid b) \gg 1 \mid (a \ \& \ b) \ll 1) = 67_{16} = 01100111_2 = 103_{10}.$$

**Ответ:  $01100111_2 = 103_{10}$**

**Задача 4 (8 баллов).** Упростить логическую функцию:

$$A \wedge (A \rightarrow B) \wedge (A \leftrightarrow (C \wedge \neg B)).$$

Ответ должен содержать не более трех логических операций.

**Ответ:  $A \wedge B \wedge \neg C$ .**

**Задача 5 (8 баллов).** Сколько существует положительных целых чисел, меньших 2003, которые а) делятся и на 3, и на 5, и на 7? б) делятся или на 3, или на 5, или на 7? с) не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

**Решение.**

Пусть универсум  $U$  будет множеством всех неотрицательных целых чисел, меньших 2003. Следовательно,  $|U| = 2003$ .

Имеется всего  $\lfloor 2003/3 \rfloor = 667$  целых чисел, которые делятся на 3.

Имеется всего  $\lfloor 2003/5 \rfloor = 400$  целых чисел, которые делятся на 5.

Имеется всего  $\lfloor 2003/7 \rfloor = 286$  целых чисел, которые делятся на 7.

Имеется всего  $\lfloor 2003/15 \rfloor = 133$  целых чисел, которые делятся на 3 и на 5.

Имеется всего  $\lfloor 2003/35 \rfloor = 57$  целых чисел, которые делятся на 5 и на 7.

Имеется всего  $\lfloor 2003/21 \rfloor = 95$  целых чисел, которые делятся на 3 и на 7.

Имеется всего  $\lfloor 2003/105 \rfloor = 19$  целых чисел, которые делятся на 3 и на 5 и на 7.

Следовательно, количество чисел, которые делятся на 3 или на 5 или на 7, равно  $667 + 400 + 286 - 133 - 57 - 95 + 19 = 1087$ . Количество чисел, которые не делятся ни на одно из указанных целых чисел, равно  $2003 - 1087 = 916$ .

**Ответ:      а) 33; б) 1087;              с) 916.**

**Задача 6 (8 баллов).** Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:

$a b d e f + - + * g h + i j + * *$ . Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, покажите порядок обхода вершин дерева, позволяющий вычислить значение этого выражения, вычислите значение этого выражения для  $a=1, b=2, d=4, e=5, f=6, g=7, h=8, i=9, j=10$ .

**Решение.**

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид:  $((a*(b+(d-(e+f))))*((g+h)*(i+j)))$ . Для наглядности дерево можно изобразить по правилу «корень вверху, листья внизу». Подставляя значения, получим  $((1*(2+(4-(5+6))))*((7+8)*(9+10))) = -1425$ .

**Ответ: -1425.**

**Задача 7 (12 баллов).** Функция  $E$  определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел  $n$  и  $k$  следующим образом:  $E(n, 0) = 1$  для  $n \geq 0$ ;  $E(n, k) = (2^{n-1-k}) * E(n-1, k-1) + (k+1) * E(n-1, k)$  для  $0 < k < n$ . Очевидно, что  $E(n, n) = 0$  при  $n > 0$ ;  $E(n, k) = 0$  при  $k > n$ . Вычислить вручную  $E(6, 4)$ .

**Решение.**

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером  $7 \times 7$ . В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	0					
2	1	2	0				
3	1	8	6	0			
4	1	22	58	24	0		
5	1	52	328	444	120	0	
<b>6</b>	1	114	1452	4400	<b>3708</b>	720	0

**Ответ:  $E(6, 4) = 3708$ .**

**Задача 8 (12 баллов).** Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\neg(x_1 \equiv x_2) \wedge \neg(x_1 \equiv x_3) \wedge (x_2 \equiv x_3) = 0$$

$$\neg(x_3 \equiv x_4) \wedge \neg(x_3 \equiv x_5) \wedge (x_4 \equiv x_5) = 0$$

$$\neg(x_5 \equiv x_6) \wedge \neg(x_5 \equiv x_7) \wedge (x_6 \equiv x_7) = 0$$

$$\neg(x_7 \equiv x_8) \wedge \neg(x_7 \equiv x_9) \wedge (x_8 \equiv x_9) = 0$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_9$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнены данные равенства. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

**Решение.**

- 1) заметим два важных момента:
  - а) все 4 уравнения – однотипные
  - б) первое связано со вторым только через переменную  $x_3$ , второе с третьим – только через  $x_5$ , третье с четвертым – только через  $x_7$
- 2) разберем подробно одно первое уравнение; поскольку в нем используется операция И (конъюнкция) и правая часть равна нулю (ложное значение), имеет смысл проверить ситуации, когда первое уравнение истинно: это будет тогда, когда  $x_2 \equiv x_3$ , а  $x_1$  не равно этому значению, то есть в двух случаях:  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$  и  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 1)$
- 3) поскольку логическое уравнение с тремя переменными может иметь не более  $8 = 2^3$  решений, вычитаем два решения из этого количества и находим, что первое уравнение имеет  $8 - 2 = 6$  решений, причем в трёх из них  $x_3 = 0$ , а в трёх других  $x_3 = 1$ .
- 4) подключаем второе уравнение: для каждого из трёх решений первого при  $x_3 = 0$  получаем три решения второго, и для каждого из трёх решений первого при  $x_3 = 1$  получаем ещё три решения второго, всего система из двух уравнений имеет  $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$  решений
- 5) далее продолжаем таблицу:

число уравнений	решений
1	$3_{(\text{при } x_3=0)} + 3_{(\text{при } x_3=1)} = 6$
2	$3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 9_{(\text{при } x_5=0)} + 9_{(\text{при } x_5=1)} = 18$
3	$9 \cdot 3 + 9 \cdot 3 = 27_{(\text{при } x_7=0)} + 27_{(\text{при } x_7=1)} = 54$
4	$27 \cdot 3 + 27 \cdot 3 = 81 + 81 = 162$

**Ответ: 162.**

**Задача 9 (12 баллов).**

Pascal	C
<pre> var a: array[0..7] of integer; var j, i1, i2, i3, index: integer; var s: array[0..39] of char; begin for j := 0 to 7 do a[j] := 0; s := 'HHTTTTHTTTHTHTHTHTHTTTTHTTTHTTTHTTTHTH'; for j := 0 to 37 do begin if ( s[j] = 'H' ) then i1 := 4 else i1 := 0; if ( s[j+1] = 'H' ) then i2 := 2 else i2 := 0; if ( s[j+2] = 'H' ) then i3 := 1 else i3 := 0; index := i1 + i2 + i3; inc(a[index]); end; for index := 0 to 7 do write(a[index]:5); writeln; end. </pre>	<pre> int a[8] = { 0 }; int main(void) { int j, index; char s[] = " HHTTTTHTTTHTHTHTHTTTTHTTTHTTTHTTTHTH "; for (j = 0; j &lt; 38; ++j) { index = ( s[j] == 'H' ? 4 : 0 ) + ( s[j+1] == 'H' ? 2 : 0 ) + ( s[j+2] == 'H' ? 1 : 0 ); a[index]++; } for (unsigned index = 0; index &lt; 8; ++index) printf("%5d", a[index]); printf("\n"); return 0; } </pre>

**Ответ:** 4 7 6 4 7 4 5 1.

**Задача 10 (16 баллов).** Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго выше побочной диагонали:

Pascal	C
<pre> const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 &lt;&gt; 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for j:=0 to n-1 do for i:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end. </pre>	<pre> #define MIN(X,Y) ((X) &lt; (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i&lt;n; i++) for (j=0; j&lt;n; j++) if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k&lt;2; k++) for (j=0; j&lt;n; j++) for (i=0; i&lt;n; i++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; } </pre>

**Решение.**

В конце программы матрица **D** будет иметь вид:

```

-4 -5 -9 -10 -10
-7 -8 -12 -13 -13
-13 -14 -26 -27 -27
-16 -17 -29 -30 -30
-18 -19 -31 -32 -32

```

**Ответ:** -98