

**Первый (заочный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Физика», осень 2016 г.**

10 КЛАСС

1. При испытании гоночный автомобиль разгоняется с постоянным ускорением на прямолинейном треке. В определенных точках трека стоят устройства, фиксирующие текущую координату x и скорость автомобиля v . В результате компьютерного сбоя большая часть данных с этих устройств была безвозвратно потеряна, а те данные, которые удалось восстановить, приведены в таблице. (20 баллов)

2. Два орудия установлены на плоском горизонтальном участке лунной поверхности. Ствол одного орудия наклонен под углом $\alpha = 15^\circ$, а другого – под углом $\beta = 75^\circ$ к поверхности. Снаряды вылетели из жерл орудий одновременно с одинаковыми начальными скоростями, траектории движения снарядов лежат в одной плоскости. Чему равно минимальное расстояние между снарядами в процессе полета, если расстояние между орудиями $L = 1000$ м?

(20 баллов)

3. Чтобы удержать на наклонной плоскости небольшое тело массой m , к нему прикладывают горизонтальную силу F , как показано на рисунке. Величина силы F может меняться. Тело остается неподвижным на наклонной плоскости, пока $\frac{1}{3}mg \leq F \leq 3mg$, где g – ускорение свободного падения. С каким ускорением будет двигаться тело по этой наклонной плоскости, если сила F перестанет на него действовать?

(20 баллов)

4. В результате радиоактивного распада неподвижный атом разделился на две части. Определите отношение масс этих частей, если кинетическая энергия одной из частей распавшегося атома составляет 20% полной кинетической энергии продуктов распада.

(20 баллов)

5. При выполнении лабораторной работы по физике ученик Знайкин Иван получил от учителя три резистора с неизвестными сопротивлениями. Учитель сообщил, что, сопротивления двух резисторов из трех одинаковы, а также, что сопротивления всех трех резисторов в омах имеют целочисленные значения. По указанию учителя Иван собрал цепь, схема которой изображена на рисунке, и подключил к точкам A и B источник постоянного тока напряжением $U_0 = 5$ В, внутреннее сопротивление которого равно нулю. Затем он измерил силу тока I_1 , протекающего по резистору R_1 , и напряжение U_2 на резисторе R_2 и получил следующие

результаты: $I_1 = 1,5 \text{ A}$, $U_2 = 2 \text{ В}$. После этого Знайкин заявил, что он сможет посчитать сопротивления резисторов. Какие значения он получил?

Можно ли на самом деле найти значения сопротивлений каждого резистора в данных условиях? (20 баллов)

Решение задач заочного тура, 10 класс.

1. При испытании гоночный автомобиль разгоняется с постоянным ускорением на прямолинейном треке. В определенных точках трека стоят устройства, фиксирующие текущую координату x и скорость автомобиля v . В результате компьютерного сбоя большая часть данных с этих устройств была безвозвратно потеряна, а те данные, которые удалось восстановить, приведены в таблице.

x, м	?	35	45	65
v, км/ч	33,0	80,8	?	132

Расстояние между соседними фиксирующими устройствами 5 м, относительная погрешность определения скорости 1%.

- 1) Определите с максимально возможной точностью ускорение автомобиля.
- 2) Попробуйте восстановить данные в ячейках, в которых стоит знак вопроса.
- 3) Определите координаты фиксирующих устройств, мимо которых автомобиль пройдет спустя 1 секунду и спустя 2 секунды после начала разгона.

Решение: Переведем значения скоростей v_i в таблице в СИ (м/с) и добавим строку v_i^2 , $i = 1, 2, 3, 4$.

x _i , м	x ₁ = ?	x ₂ = 35	x ₃ = 45	x ₄ = 65
v _i , км/ч	v ₁ = 33,0	v ₂ = 80,8	v ₃ = ?	v ₄ = 132
v _i , м/с	v ₁ = 9,17	v ₂ = 22,44	v ₃ = ?	v ₄ = 36,67
v _i ² , м/с	v ₁ ² = 84	v ₂ ² = 503,75	v ₃ ² = ?	v ₄ ² = 1344,44

Пусть начальная координата автомобиля $x(0) = x_0$, начальная скорость, по условию, $v(0) = v_0 = 0$, ускорение автомобиля a . Тогда $v_i^2 = 2a(x_i - x_0)$. (1)

Возможные способы дальнейшего решения задачи.

1 способ (графический). Пользуясь приведенной выше таблицей, можно построить график $v^2(x)$ или $x(v^2)$ – прямую. Затем из графика извлечь угловой коэффициент этой прямой, который связан с ускорением a , а также найти x_0 , и неизвестные значения x_1 и v_3 .

2 способ (аналитический). Пользуясь уравнением (1) и используя известные значения скорости и координаты, получим систему:

$$\begin{cases} v_2^2 = 2a(x_2 - x_0), \\ v_4^2 = 2a(x_4 - x_0). \end{cases} \Rightarrow a = \frac{v_4^2 - v_2^2}{2(x_4 - x_2)}, \quad x_0 = x_2 - \frac{v_2^2}{2a}.$$

Используя (1) и значения a и x_0 , полученные из решения приведенной выше системы, можно найти неизвестные значения x_1 и v_3 по формулам

$$x_1 = x_0 + \frac{v_1^2}{2a}, \quad v_3 = \sqrt{2a(x_3 - x_0)}.$$

Оба способа дают следующие численные значения величин

1) $a = 14 \text{ м/с}^2, x_0 = 17 \text{ м.}$

2) $x_1 = 20 \text{ м, } v_3 = 28 \text{ м/с} = 100,8 \text{ км/ч.}$

3) Для ответа на третий вопрос, воспользуемся формулой $x = x_0 + \frac{at^2}{2}$.

При $t = 1 \text{ с}$, получим $x = 17 + \frac{14 \cdot 1^2}{2} = 24 \text{ м}$. Т.к. фиксирующие устройства расположены через пять метров, т.е. координаты фиксирующих устройств – целые и кратны 5, то спустя 1 с после начала движения автомобиль пройдет мимо устройства с координатой $x = 25 \text{ м}$.

При $t = 2 \text{ с}$, $x = 17 + \frac{14 \cdot 2^2}{2} = 45 \text{ м}$. Т.е. спустя 2 с автомобиль пройдет мимо фиксирующего устройства с координатой $x = 45 \text{ м}$.

Ответ: 1) $a = 14 \text{ м/с}^2$.

2) $x_1 = 20 \text{ м, } v_3 = 28 \text{ м/с} = 100,8 \text{ км/ч.}$

3) спустя 1 с после начала движения автомобиль пройдет мимо устройства с координатой $x = 25 \text{ м}$, а спустя 2 с – мимо фиксирующего устройства с координатой $x = 45 \text{ м}$.

Критерии оценивания задачи 1.

	Решение содержит следующие верные элементы решения. Баллы за каждый верный элемент решения суммируются	Мах. балл ставится, когда данный элемент решения сделан верно и полно.
1	Для решения используется формула (1)	от 1 до 2 баллов
2	Получено значение ускорения	от 1 до 3 баллов
3	Получено значение начальной координаты	от 1 до 3 баллов
4	Получено значение ячейки x_1	от 1 до 3 баллов
5	Получено значение ячейки v_3	от 1 до 3 баллов
6	Получено значение координаты	от 1 до 3 баллов

	фиксирующего устройства спустя 1 секунду	
5	Получено значение координаты фиксирующего устройства спустя 2 секунды	от 1 до 3 баллов

2. Два орудия установлены на плоском горизонтальном участке лунной поверхности. Ствол одного орудия наклонен под углом $\alpha = 15^\circ$, а другого – под углом $\beta = 75^\circ$ к поверхности. Снаряды вылетели из жерл орудий одновременно с одинаковыми начальными скоростями, траектории движения снарядов лежат в одной плоскости. Чему равно минимальное расстояние между снарядами в процессе полета, если расстояние между орудиями $L = 1000$ м?

Решение: Из различных вариантов расположения орудий, только в двух случаях, изображенных на рисунках а и б, расстояние между снарядами в процессе движения имеет минимальное значение; во всех остальных случаях расстояние между снарядами в процессе движения увеличивается, т.е. минимальное значение этого расстояния равно L .

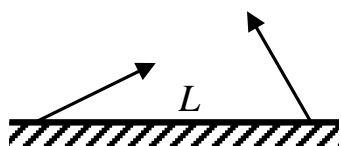


Рис. а



Рис. б

Докажем это утверждение. Рассмотрим общий случай (рис. в).

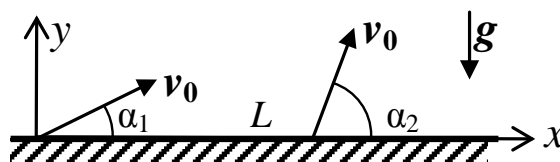


Рис. в

В отсутствие атмосферы, ускорение снарядов равно ускорению свободного падения на Луне g . Обозначим начальные скорости снарядов v_0 , углы, которые орудия образуют с поверхностью Луны α_1 и α_2 ,

Уравнения движения снарядов

$$x_1 = v_0 \cos \alpha_1 \cdot t, \quad y_1 = v_0 \sin \alpha_1 \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

$$x_2 = v_0 \cos \alpha_2 \cdot t + L, \quad y_2 = v_0 \sin \alpha_2 \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Квадрат расстояния между снарядами в процессе движения равен

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Подставим в это выражение координаты снарядов, и после необходимых алгебраических преобразований получим

$$s^2 = 2v_0^2 [1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)]t^2 + 2Lv_0 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)t + L^2.$$

Относительно t полученное выражение – квадратичная функция. Ее минимальное значение можно найти различными способами, например, с помощью производной, или путем нахождения вершины параболы. Проводя подобный анализ функции $s^2(t)$, получим, что минимум этой функции достигается при

$$t = \frac{L}{2v_0} \cdot \frac{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1}{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{L}{2v_0} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)}.$$

Чтобы минимальное значение расстояния достигалось в процессе движения снарядов, должно быть $t > 0$, т.е. при $\alpha_2 > \alpha_1$. При этом $s_{\min} = L \cos\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$.

Проведем расчет минимального расстояния.

Для рис. а. $\alpha_1 = \alpha = 15^\circ$, $\alpha_2 = 180^\circ - \beta = 105^\circ$ или $\alpha_1 = \beta = 75^\circ$, $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha = 165^\circ$

$$\Rightarrow s_{\min} = L \cos 60^\circ = \frac{L}{2} = 500 \text{ м.}$$

$$\text{Для рис. б. } \alpha_1 = \alpha = 15^\circ, \alpha_2 = \beta = 75^\circ \Rightarrow s_{\min} = L \cos 45^\circ = \frac{L\sqrt{2}}{2} = 707 \text{ м.}$$

II способ (графический). Векторы скоростей снарядов $\vec{v}_1 = \vec{v}_{01} + \vec{g}t$, $\vec{v}_2 = \vec{v}_{02} + \vec{g}t$.

Относительная скорость $\vec{v}_{\text{отн.}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01} = \overrightarrow{\text{const}}$. В системе отсчета, связанной с первым снарядом, второй снаряд движется с постоянной скоростью $\vec{v}_{\text{отн.}}$. Построим этот вектор. Т.к. первый снаряд при этом неподвижен, то минимальное расстояние между ними – это длина перпендикуляра, опущенного из точки, где находится первое орудие на направление вектора $\vec{v}_{\text{отн.}}$.

В случае расположения пушек, как на рис. а, угол между векторами начальных скоростей \vec{v}_{01} и \vec{v}_{02} равен 90° , поэтому треугольник, образованный векторами скоростей \vec{v}_{02} , $-\vec{v}_{01}$ и $\vec{v}_{\text{отн.}}$ – прямоугольный, а т.к. $|\vec{v}_{01}| = |\vec{v}_{02}| = v_0$, то этот треугольник еще и равнобедренный, поэтому угол $\theta = 45^\circ$.

$$\text{Тогда } \varphi = \beta - \theta = 30^\circ. s_{\min} = L \sin \varphi = \frac{L}{2} = 500 \text{ м.}$$

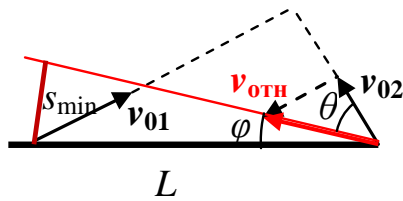


Рис. а

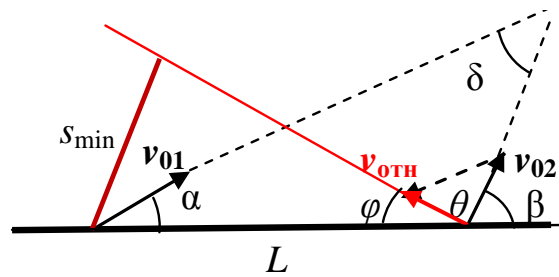


Рис. б.

В случае расположения пушек, как на рис. б ($\alpha = 15^\circ, \beta = 75^\circ$), угол между векторами начальных скоростей \vec{v}_{01} и \vec{v}_{02} равен $\delta = 60^\circ$, поэтому треугольник, образованный векторами скоростей $\vec{v}_{02}, -\vec{v}_{01}$ и $\vec{v}_{отн.}$ – равносторонний, в нем угол $\theta = 60^\circ$. Соответственно угол $\varphi = 180^\circ - \beta - \theta = 45^\circ$.

Тогда $s_{\min} = L \sin \varphi = \frac{L\sqrt{2}}{2} = 707$ м.

Ответ. В случае расположения пушек как на рис. а $s_{\min} = \frac{L}{2} = 500$ м.

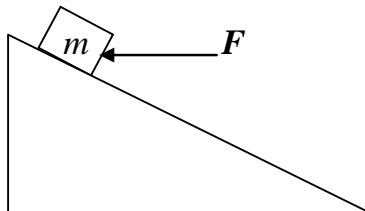
В случае расположения пушек как на рис. б $s_{\min} = \frac{L\sqrt{2}}{2} = 707$ м.

Во всех остальных случаях $s_{\min} = L = 1000$ м.

Критерии оценивания задачи 2.

	Решение содержит следующие верные элементы решения. Баллы за каждый верный элемент решения суммируются	Мах. балл ставится, когда данный элемент решения сделан верно и полно.
1	Сделан рисунок, указаны различные варианты расположения орудий.	от 1 до 2 баллов
2	Записаны формулы для координат или скоростей снарядов (при решении вторым способом)	от 1 до 3 баллов
3	Проведен расчет минимального расстояния в одном из двух случаев а или б	от 1 до 10 баллов Если правильно рассмотрен только лишь один случай, полная сумма баллов не более 15
4	Проведен расчет минимального расстояния в другом из двух случаев а или б	от 1 до 4 баллов
5	Указано, что во всех остальных случаях $s_{\min} = L = 1000$ м.	1 балл

3. Чтобы удержать на наклонной плоскости небольшое тело массой m , к нему прикладывают горизонтальную силу F , как показано на рисунке. Величина силы F может меняться. Тело остается неподвижным на наклонной плоскости, пока $\frac{1}{3}mg \leq F \leq 3mg$, где g – ускорение свободного падения. С каким ускорением будет двигаться тело по этой наклонной плоскости, если сила F перестанет на него действовать?



Решение:

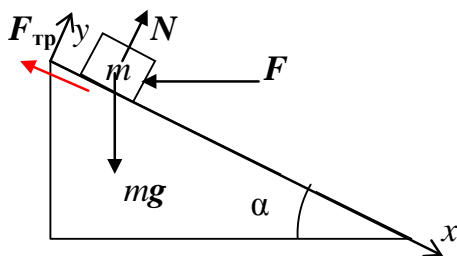


Рис. а

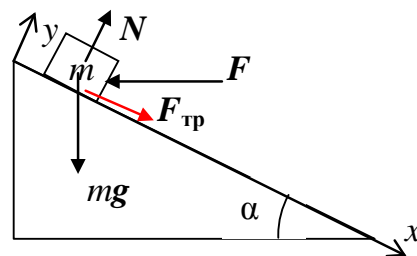


Рис. б.

1. Тело не скатывается вниз (рис. а).

$$\begin{cases} x: mg \sin \alpha - F \cos \alpha - F_{\text{тр}} = 0, \\ y: N - F \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0, \\ F_{\text{тр}} \leq \mu N. \end{cases} \Rightarrow F \geq \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} = \frac{mg(\operatorname{tg} \alpha - \mu)}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}$$

2. Тело не движется вверх (рис. б).

$$\begin{cases} x: mg \sin \alpha - F \cos \alpha + F_{\text{тр}} = 0, \\ y: N - F \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0, \\ F_{\text{тр}} \leq \mu N. \end{cases} \Rightarrow F \leq \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)} = \frac{mg(\operatorname{tg} \alpha + \mu)}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}.$$

3. По условию тело покоится пока $\frac{1}{3}mg \leq F \leq 3mg$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{mg(\operatorname{tg} \alpha - \mu)}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{3}mg, \\ \frac{mg(\operatorname{tg} \alpha + \mu)}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha} = 3mg. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha - \mu = \frac{1}{3}(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha), \\ \operatorname{tg} \alpha + \mu = 3(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 + 3\mu}{3 - \mu}, \\ 2\mu^2 + 3\mu - 2 = 0. \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения $\mu = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$.

Т.к. $\mu > 0$, то $\mu = 0,5$, $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $\Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

4. Если сила F перестанет действовать на тело, то его ускорение равно

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{4} g = 3,5 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = \frac{\sqrt{2}}{4} g = 3,5 \text{ м/с}^2$.

Критерии оценивания задачи 3.

	Решение содержит следующие верные элементы решения. Баллы за каждый верный элемент решения суммируются	Мах. балл ставится, когда данный элемент решения сделан верно и полно.
1	Сделан рисунок, на котором указаны все силы, действующие на тело	от 1 до 2 баллов
2	Записаны уравнения динамики в случае 1 и получена формула для минимальной силы F , при которой тело не скатывается вниз	от 1 до 3 баллов
3	Записаны уравнения динамики в случае 2 и получена формула для максимальной силы F , при которой тело не движется вверх	от 1 до 3 баллов
4	Записана система (п.3) и получены значения μ и α .	от 1 до 7 баллов
5	Получена формула для ускорения тела a в отсутствие силы F .	от 1 до 3 баллов
6	Сделан численный расчет ускорения a .	от 1 до 2 баллов

4. В результате радиоактивного распада неподвижный атом разделился на две части. Определите отношение масс этих частей, если кинетическая энергия одной из частей распавшегося атома составляет 20% полной кинетической энергии продуктов распада.

Решение: Пусть m_1 , m_2 – массы, v_1 , v_2 – скорости распавшихся частей атома. Запишем закон сохранения импульса для распада атома: $0 = m_1 v_1 - m_2 v_2$. (1)

Обозначим полную кинетическую энергию продуктов распада E . Тогда кинетическая энергия распавшейся части массой m_1 равна $E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = 0,2E$, а другой части массой m_2 –

$$E_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} = 0,8E. \text{ Тогда } \frac{E_2}{E_1} = \frac{m_2 v_2^2}{m_1 v_1^2} = \frac{0,8}{0,2} = 4. \quad (2)$$

Составим систему

$$\begin{cases} \frac{m_2 v_2^2}{m_1 v_1^2} = 4, \\ m_1 v_1 = m_2 v_2. \end{cases} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 4.$$

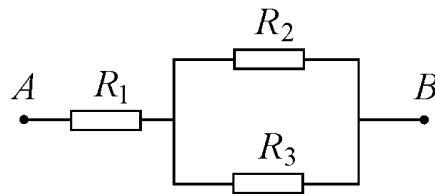
Ответ. $\frac{m_1}{m_2} = 4$ или $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{4}$.

Критерии оценивания задачи 4.

	Решение содержит следующие верные элементы решения. Баллы за каждый верный элемент решения суммируются	Мак. балл ставится, когда данный элемент решения сделан верно и полно.
1	Записано уравнение закона сохранения импульса (1)	от 1 до 5 баллов
2	Получено отношение кинетических энергий распавшихся частей (2)	от 1 до 5 баллов
3	Записана и решена система и получен правильный ответ	от 1 до 10 баллов

5. При выполнении лабораторной работы по физике ученик Знайкин Иван получил от учителя три резистора с неизвестными сопротивлениями. Учитель сообщил, что, сопротивления двух резисторов из трех одинаковы, а также, что сопротивления всех трех резисторов в омах имеют целочисленные значения. По указанию учителя Иван собрал цепь, схема которой изображена на рисунке, и подключил к точкам A и B источник постоянного тока напряжением $U_0 = 5$ В, внутреннее сопротивление которого равно нулю. Затем он измерил силу тока I_1 , протекающего по резистору R_1 , и напряжение U_2 на резисторе R_2 и получил следующие результаты: $I_1 = 1,5$ А, $U_2 = 2$ В. После этого Знайкин заявил, что он сможет посчитать сопротивления резисторов. Какие значения он получил?

Можно ли на самом деле найти значения сопротивлений каждого резистора в данных условиях?



Решение:

1. Напряжение на резисторе R_1 равно $U_1 = U_0 - U_2 = 3$ В. Тогда сопротивление резистора

$$R_1 \text{ равно } R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{3}{1,5} = 2 \text{ Ом.}$$

2. По условию, сопротивления двух резисторов одинаковы. Пусть $R_2 = R_3$. Тогда токи через эти резисторы равны $I_2 = I_3 = \frac{I_1}{2} = 0,75$ А. А сопротивления $R_2 = R_3 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{2}{0,75} \approx 2,67$ Ом. Но, по условию, все сопротивления имеют целочисленные значения. Значит $R_2 \neq R_3$. Т.е. только одно из значений сопротивлений R_2 или R_3 равно R_1 .

3. Пусть $R_2 = R_1 = 2$ Ом. Тогда $I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{2}{2} = 1$ А,

$$I_3 = I_1 - I_2 = 1,5 - 1 = 0,5 \text{ А. Значит } R_3 = \frac{U_2}{I_3} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ Ом. Т.о. ученик получил значения}$$

сопротивлений резисторов 2 Ом, 2 Ом, 4 Ом. Но какой из резисторов R_2 или R_3 имеет сопротивление 2 Ом, а какой 4 Ом, определить нельзя.

Ответ. Значения сопротивлений резисторов 2 Ом, 2 Ом, 4 Ом. Нельзя в данных условиях определить, какие значения имеют сопротивления R_2 и R_3 .

Критерии оценивания задачи 5.

	Решение содержит следующие верные элементы решения. Баллы за каждый верный элемент решения суммируются	Мах. балл ставится, когда данный элемент решения сделан верно и полно.
1	Посчитано сопротивление резистора R_1	от 1 до 5 баллов
2	Установлено, что сопротивления R_2 и R_3 имеют различные значения.	от 1 до 5 баллов
3	Посчитаны значения сопротивлений R_2 и R_3	от 1 до 5 баллов
4	Есть объяснение, почему нельзя найти значения сопротивлений каждого резистора в данных условиях	от 1 до 5 баллов