Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Работа на 2й лист

Шифр 119031

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Поляков Дмитрий Александрович

Город, № школы (образовательного учреждения) лицей № 1537

Регистрационный номер класс 9

Вариант задания 1

Дата проведения “12” февраля 2017 г.

Подпись участника

Лист 1

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
+	+	+	+	+	+					
15	15	15	15	10	20					

Шифр 119031

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

$\Sigma б = 90$ Лисасов

Вариант № 1

№1

Пусть x – кол-во вагонов, кот нужно выделить, ~~что~~ вместимостью 62 тонны

a – масса груза

По условию задачи:

$$\begin{cases} 62(x-1) < a < 62x & (1) \\ 53x < a < 53(x+1) & (2) \\ a = 45(x+3) & (3) \end{cases}$$

Подставив р-во (3) в нер-ва (1) и (2) получим:

$$\begin{cases} 62x-62 < 45x+135 < 62x & (4) \\ 53x < 45x+135 < 53x+53 & (5) \end{cases}$$

из нер-ва (4):

$$x \in \left(\frac{135}{17}; \frac{197}{17}\right)$$

из нер-ва (5):

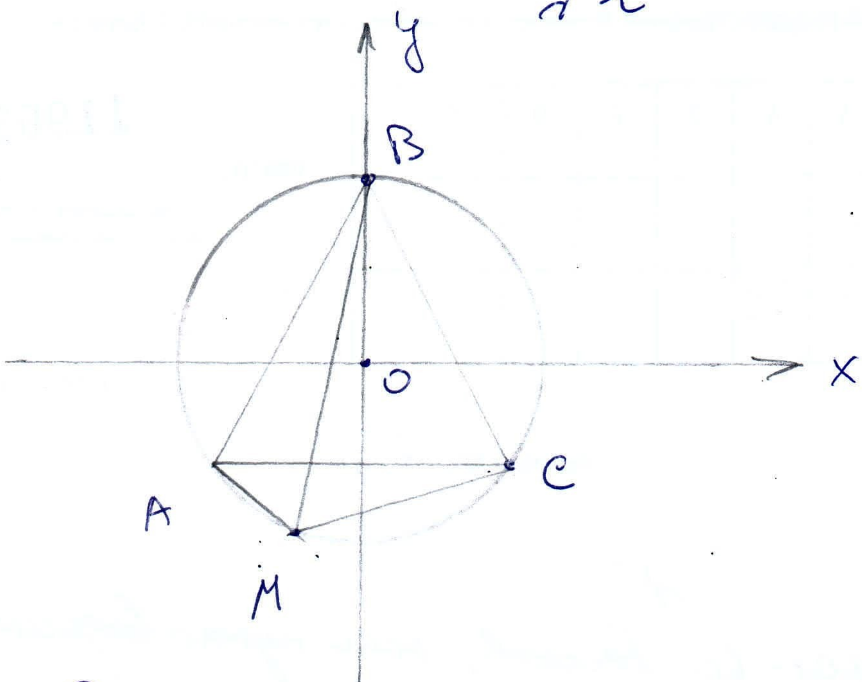
$$x \in \left(\frac{82}{8}; \frac{135}{8}\right)$$

Значит $x \in \left(\frac{82}{8}; \frac{197}{17}\right)$, но $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 45 \cdot (11+3) = 630$ (т)

Ответ: 630 тонн +

№2



Пусть O – центр описанной окружности

Введём систему координат OXY так, что

B (0; y), тогда точки A и C имеют координаты

$\left(-\frac{\sqrt{3}y}{2}; -\frac{y}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{3}y}{2}; -\frac{y}{2}\right)$ соответственно – по

св-ву р/с Δ-ка. Пусть точка M имеет координаты

$(x_2; y_2)$, причём $M \in \omega(O; r = OB = y)$, а значит $x_2^2 + y_2^2 = y^2$

$BM^2 = (y - y_2)^2 + x_2^2 = y^2 - 2yy_2 + y_2^2 + x_2^2 = 2y^2 - 2yy_2$

$AM = \sqrt{\left(x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + \left(y_2 + \frac{y}{2}\right)^2} = \sqrt{x_2^2 + \frac{3}{4}y^2 + \sqrt{3}x_2 y + \frac{1}{4}y^2 + yy_2 + y_2^2} =$

$= \sqrt{2y^2 + y(y_2 + \sqrt{3}x_2)}$

$MC = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y - x_2\right)^2 + \left(y_2 + \frac{y}{2}\right)^2} = \sqrt{2y^2 + y(y_2 - \sqrt{3}x_2)}$

$(AM + CM)^2 = 2y^2 + y(y_2 - \sqrt{3}x_2) + 2y^2 + y(y_2 + \sqrt{3}x_2) + 2\sqrt{2y^2 + y(y_2 + \sqrt{3}x_2)} \cdot$

$\cdot \sqrt{2y^2 + y(y_2 - \sqrt{3}x_2)} = 4y^2 + 2yy_2 + 2y\sqrt{(2y + y_2 + \sqrt{3}x_2)(2y + y_2 - \sqrt{3}x_2)} =$

$= 4y^2 + 2yy_2 + 2y\sqrt{(2y + y_2)^2 - 3x_2^2} = 4y^2 + 2yy_2 + 2y\sqrt{4y^2 + 4yy_2 + y_2^2 - 3x_2^2} = 4y^2 + 2yy_2 + 2y\sqrt{4y^2 + 4yy_2 + y_2^2 - 3y^2 + 3y_2^2} =$

$x_3))$

$, x_2) =$

$2 \cdot 4 +$

Лист 2

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 1

$= 4y^2 + 2yy_2 + 2y\sqrt{y^2 + 4yy_2 + 4y_2^2} = 4y^2 + 2yy_2 +$

$+ 2y \cdot |2y_2 + y| = 4y^2 + 2yy_2 - 4yy_2 - 2y^2 =$

$= 2y^2 - 2yy_2 = BM$

Итак $BM^2 = (AM + MC)^2$, но $BM > 0$ и $(AM + MC) > 0$,

а значит $BM = AM + MC$ ч.т.д.

(+)

№3

$A\varphi: y^2 - 3x^2 - 2xy - 9 - 12x = 0$

$(y-x)^2 - (2x+3)^2 = 0$

$(y-3x-3)(y+x+3) = 0$

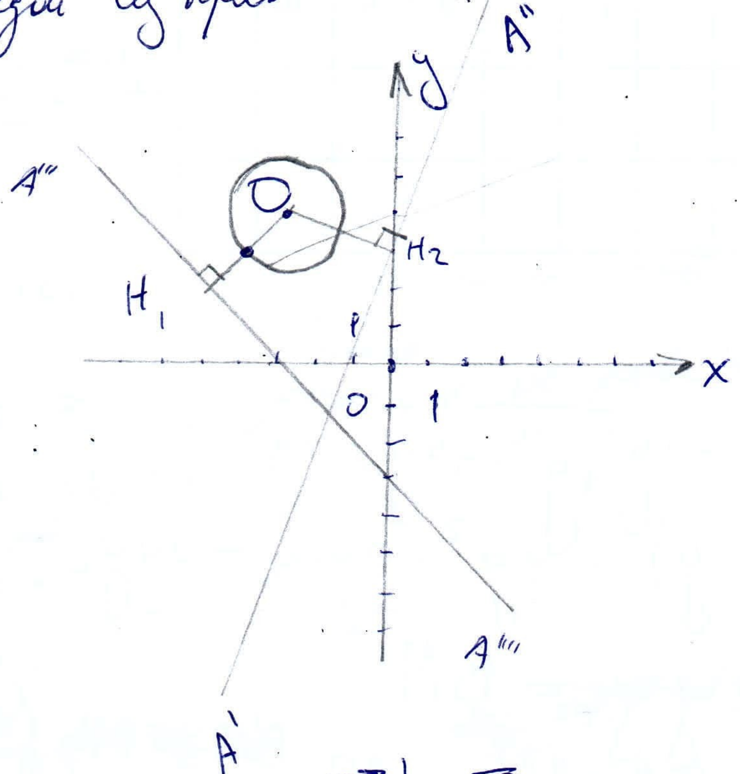
$\left[\begin{array}{l} y = 3x+3 \\ y = -x-3 \end{array}\right.$

$B: \quad x^2 - 8y + 23 + 6x + y^2 = 0$

$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 2$

$B \in \omega(O(-3;4), r = \sqrt{2})$

Найдём кратчайшее расстояние от точки O до каждой из прямых A.



Получаем:

OH_1: $y = x + 7 \Rightarrow H_1(-5;2) \Rightarrow |\overrightarrow{OH_1}| = \sqrt{8}$

OH_2: $y = -\frac{1}{3}x + 3 \Rightarrow H_2(0;3) \Rightarrow |\overrightarrow{OH_2}| = \sqrt{10}$

$AB_{min} = \min(|\overrightarrow{OH_1}|; |\overrightarrow{OH_2}|) - r_{окр} = \sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

Ответ: $AB = \sqrt{2}$ +

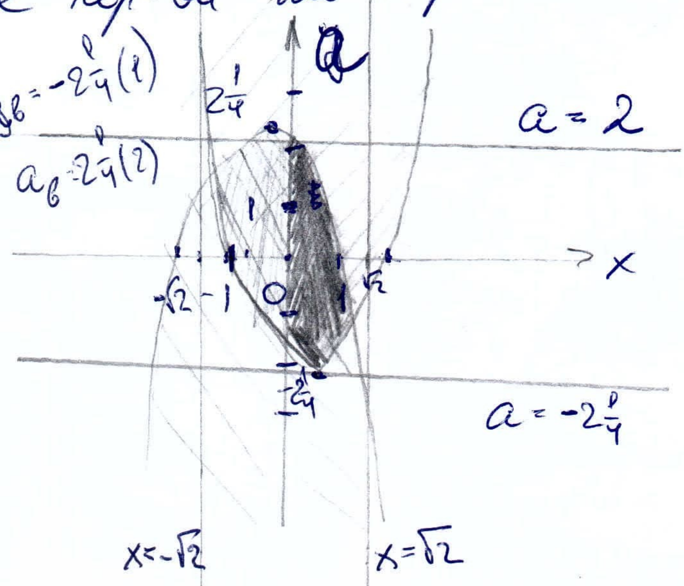
№ 4

$x^2 + |x+a| < 2$

Изобразим решение нер-ва на коорд. плоскости:

$|x+a| < 2 - x^2,\ x^2 < 2$

$\begin{cases} a > x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) & a_в = -2\frac{1}{4}\ (1) \\ a < 2 - x^2 - x = -(x+2)(x-1) & a_в = 2\frac{1}{4}\ (2) \end{cases}$



Чтобы найти такие a, ~~чтобы~~ при пол. x был больше 0, нужно посмотреть, чему будет равно a в (2) при $x=0$: $a_в = -(0-2)\cdot(0-1) = 2$ — это верхняя граница a. нижняя граница a равна вершине параболы $\Rightarrow a_{min} = -2\frac{1}{4}$

Ответ: $a \in (-2\frac{1}{4}; 2)$. (+)

15

Пусть $AD = l$, $CD = x$, тогда время

$$t = \frac{\overset{=AC}{l-x}}{0{,}8} + \frac{\overset{=CB}{\sqrt{20^2+x^2}}}{0{,}2}$$

$t \to \min$:

$$\frac{l-x}{0{,}8} + \frac{\sqrt{20^2+x^2}}{0{,}2} \to \min$$

умножим на 0,8

$l - x + 4\sqrt{20^2+x^2} \to \min$ заметим, что ~~..~~ при нахожд. ~~..~~ x l можно пренебречь

$4\sqrt{20^2+x^2} - x \to \min$

Пусть $a = \min$

$4\sqrt{20^2+x^2} - x = a$

$4\sqrt{20^2+x^2} = a + x$

$16(400+x^2) = (a+x)^2$

$6400 + 16x^2 = a^2 + 2ax + x^2$

$15x^2 - 2ax + 6400 - a^2 = 0$ мин. время достигается при $D=0$ нет! нет анализа для случая $D=0$, реше

$D = 4a^2 - 4\cdot15\cdot(6400 - a^2) = 64(a^2 - 60\cdot6400) = 0$,

а значит $a = \sqrt{60\cdot6400} = 80\sqrt{60} = 160\sqrt{15}$ (±) 10

$$x = \frac{+2a}{30} = \frac{a}{15} = \frac{160\sqrt{15}}{15} = \frac{32\sqrt{15}}{3} \text{ (км)}$$

~~Ответ: $32\sqrt{15}$~~

Ответ: привал нужно устроить не доезжая $\frac{32\sqrt{15}}{3}$ км до города D

№6

Пусть r_X - кол-во рыцарей на острове X

l_X - кол-во лжецов на острове X

По условию задачи:

$$\begin{cases} r_A + l_B + l_C = 55 \quad (1) \\ r_B + l_A + l_C = 38 \quad (2) \\ r_C + l_A + l_B = 49 \quad (3) \\ r_B + l_C = 27 \quad (4) \\ r_B + l_A = 29 \quad (5) \\ r_A + r_B + r_C + l_A + l_B + l_C = 100 \quad (6) \end{cases}$$

Вычтя (4) из (2) получим $l_A = 11$

(5) из (2) получим $l_C = 9$

Вычтя $(l_A + l_C)$ из (2) получим $r_B = 18$

из (6) вычтем ((1)+(2)) получим $r_B - l_B = -4$,

Откуда $l_B = +4 + r_B = 4 + 18 = 22$

Ответ: 22 лжеца.