Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Олимпиада для школьников
8-10-х классов

118073

Шифр ____________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету Математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Савельев Сергей Алексеевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Лицей № 1568 г. Москва

Регистрационный номер класс 8

Вариант задания 1

Дата проведения "12" февраля 2017 г.

Подпись участника Сав

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
+	+	+	+	+	+					
10	15	15	20	20	20					

118073

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

100

Власова ОВ

Вариант № 1

№1.

$n^2+8n+15=(n^2+8n+16)-1=(n+4)^2-1$. Очевидно, $(n+4)^2 \vdots$ (делится нацело на) $n+4$. $\frac{(n+4)^2-1}{n+4}=\frac{(n+4)^2}{n+4}-\frac{1}{n+4}=n+4-\frac{1}{n+4}$. По опр. нат. числа,

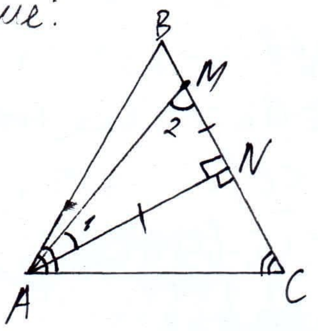
$n\geq 1 \Rightarrow n+4\geq 5>1 \Rightarrow \frac{1}{n+4}$ не целое; $n+4$ – целое, при вычитании дробного числа из целого всегда получится дробное число $\Rightarrow \frac{(n+4)^2-1}{n+4}$ – дробн., отсюда $n^2+8n+15$ не делится на $n+4$. ч.т.д.

№2.

Дано: $\triangle ABC$ ($\angle A, \angle B, \angle C < 90°$), $AB=BC=12$. $AN\perp BC$. Т. $M \in$ отр. BN, $AN=MN$.
$BN=?$ ($BN=x$)

Решение:

$\times\frac{35}{16}$



$\triangle ABC$ – остр.-уг $\Rightarrow$ т. $N\in$ отр. BC.

$\triangle AMN$ – р/б по опр. ($AN=MN$) $\Rightarrow$ по его св-ву $\angle 1=\angle 2$

$AN\perp BC \Rightarrow \angle MNA=90° \Rightarrow \triangle AMN$ – пр-уг по опр. $\Rightarrow$ по его св-ву $\angle 1+\angle 2=90° \Rightarrow \angle 1=\angle 2=45°$.

$\triangle ABC$ – р/б по опр. ($AB=BC$) $\Rightarrow \angle BAC=\angle C$ по св-ву р/б $\triangle$.

Ответ зависит от AC. ~~Докажу: пусть есть какое-то $AC>0$. По форм. Герона,~~ ~~$S_{ABC}=\sqrt{(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$~~ Докажу примером: $AC=2$ и $AC=4$ (очевидно, допустимы).

$AC=2$

Полупериметр ABC $p=13$. По форм. Герона $S_{ABC}=\sqrt{(13-12)(13-12)(13-2)13}=\sqrt{11}\cdot\sqrt{13}=S$.

Также $S=\frac{BC\cdot AN}{2}=6AN \Rightarrow AN=h=\frac{S}{6}$.

По т. Пиф-ра, в пр-уг $\triangle BNA$ $h^2+x^2=AB^2$;

$x_1=\sqrt{144-h^2}=\sqrt{144-\frac{S^2}{36}}=\sqrt{144-\frac{\sqrt{11}^2\cdot\sqrt{13}^2}{36}}$

$AC=4$

$p=14$. $S_{ABC}=\sqrt{(14-12)(14-12)(14-4)\cdot 14}=\sqrt{2\cdot 2\cdot 10\cdot 14}=4\sqrt{5\cdot 7}=S$

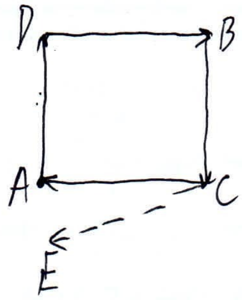
$S=\frac{BC\cdot AN}{2}=6AN \Rightarrow AN=h=\frac{S}{6}$.

+

По т. Пиф., $h^2+x_2^2=AB^2$; $x_2=\sqrt{144-h^2}=\sqrt{144-\frac{S^2}{36}}=$
$=\sqrt{144-\frac{35\cdot 16}{36}}$. $35\cdot 16\neq 11\cdot 13 \Rightarrow 144-\frac{35\cdot 16}{36}\neq 144-\frac{11\cdot 13}{36} \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1\neq x_2$. Ответ неоднозначный +

№3.

Рассмотрю самый простой случай - робот просто двигается по кругу (точнее, по квадрату). Пусть исх. точка - A. Скажем, скор-ть робота - $x(\frac{м}{с})$, он едет прямо $15с \cdot x(\frac{м}{с}) = 15x(м)$. ~~Он~~ сворачивает направо,



едет столько же, ещё раз поворач. направо, проезжает BC и, наконец, ~~чер. проез~~ сворачивает ещё раз направо (отн. себя) и ещё чер. 15с. приезжает в A. Итого - 60с. Повторяем.

Допустим, робот не вернётся в A, а приедет в нек. т. E. Тогда ①: $AD=DB=BC=CE=15x(м)$; $AD \perp BD$, $BD \perp BC$, $BC \perp CE$ (по усл.), отсюда $AD \parallel BC$, $BD \parallel CE$, но ①, поэтому ABCE - ромб по (опр.) св-ву, в нём $\angle D = 90°$ => это (пр-уг-к) квадрат => в нём $CE \parallel BD$. Но в 4-уг-ке ADBC $AD \parallel BC$, $AD=BC=15x$ => это парал-м => $BD \parallel AC$, $BD=AC$, $BD \parallel CE$, $BD \parallel AC$, но $AC \cap CE =$ т. C - невозм., если пр. AC и CE не совп.

Значит, т. $E \in$ пр. AC. Но $BD=CE=AC \neq 0$, т. $E \in$ лучу CA (робот всё время сворачивал вправо) => т. A и E совпадают.

Из этого всего - робот может просто двигаться по квадрату ADBC, и каждую минуту (60с.) приезжать в A. Значит, и чер. 6 минут он окажется в A.

Ответ: Можно.

№4.

Для $x+2 \le x^2-6x+8$:

$x^2-7x+6 \ge 0$;

$(x-6)(x-1) \ge 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6>0 \\ x-1>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-6<0 \\ x-1<0 \end{cases} \\ x-6=0 \\ x-1=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>6 \\ x>1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<6 \\ x<1 \end{cases} \\ x=6 \\ x=1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \ge 6 \\ x \le 1. \end{array}\right.$$

$\min(x+2; x^2-6x+8) = x+2$

Для $x+2 \ge x^2-6x+8$:

$x^2-7x+6 \le 0$;

$(x-6)(x-1) < 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6>0 \\ x-1<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-6<0 \\ x-1>0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>6 \\ x<1 \end{cases} \text{- невозм.} \\ \begin{cases} x<6 \\ x>1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$1 < x < 6$

$\min(x+2; x^2-6x+8) = x^2-6x+8$

Другими словами, на участке от 1 до 6 (не включительно, хотя на самом деле разницы никакой) график функции $y=\min(x+2;\ x^2-6x+8)$ будет график $y=x^2-6x+8$ (1); на ост. участках - график $y=$ ~~x^2-6x+8~~ $x+2$ (2).

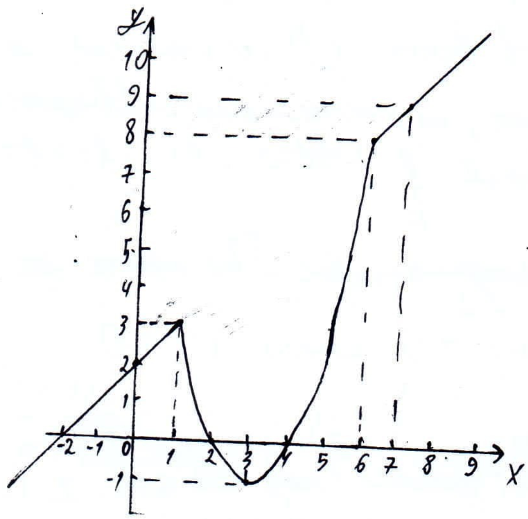
(1)

x	1 (в.т.)	3	6 (в.т.)
y	3	-1	8

(2)

x	0	1	6	7
y	2	3	8	9

разрыв



(даже если не очень похоже, уч-к графика между $x=1$ и $x=5$ - парабола).

Явно видно, что $\min(x+2;\ x^2-6x+8)\geq 0$ верно при $-2\leq x\leq 2$ и $x\geq 4$, т.е. $x\in[-2;2];[4;+\infty)$

Ответ: $[-2;2];[4;+\infty)$

№5

Никто не запрещает взять $x=0$, тогда по усл.

$y(0{,}01\cdot 0+1)=y(-0{,}01\cdot 0)$;

$y(1)=y(0)$;

$a\cdot 1^2+b\cdot 1+k=0^2\cdot a+b\cdot 0+k$;

$a+b+k=k$; $a+b=0$; $a=-b$, $b=-a$; однозначно, иначе $y(1)\neq y(0)$.

$y(x)=ax^2-ax+k$.

Теперь для $x=100$:

$y(0{,}01\cdot 100+1)=y(-0{,}01\cdot 100)$;

$y(2)=y(-1)$;

$a\cdot 2^2+b\cdot 2+k=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+k$;

$4a+2b=a-b$;

$y(0{,}01x+1)=a(0{,}01x+1)^2-a(0{,}01x+1)+k=y(-0{,}01x)=a(-0{,}01x)^2-a(-0{,}01x)+k$;

$a\cdot(0{,}0001x^2+0{,}02x+1)-0{,}01xa-a=0{,}0001x^2a+0{,}01xa$;

$0{,}0001x^2a+0{,}02xa+a-0{,}01xa-a=0{,}0001x^2a+0{,}01xa$ - верно всегда.

Ещё уточнить вид квадр. трёхчлена данного невозможно.

Ответ: ax^2-ax+k.

№6.

1. $a^5+3ba^4-5a^3b^2-15a^2b^3+4ab^4+12b^5=a^4(a+3b)-5a^2b^2(a+3b)+$
$+4b^4(a+3b)=(a^4-5a^2b^2+4b^4)(a+3b)=(a^2-4b^2)(a^2-b^2)(a+3b)=$
$=(a-2b)(a+2b)(a-b)(a+b)(a+3b)$ = (1)

2. $b\neq 0$, иначе $a^5=55$ - очевидно, невозм. для целого a.

3. Никакие два из множителей в выр. (1) не равны между собой.
Я мог бы перебрать все пары, но посчитаю очевидным, что для любой пары сценарий будет примерно таков: $a-2b=a+2b$; $-2b=2b \Rightarrow b=0$, уже исключено.

4. Но: $55>0 \Rightarrow$ есть три альтернативы: I все множ-ли в (1) >0; II 2 мн-ля <0, 3 мн-ля >0; III 4 мн-ля <0, один >0, иначе (1) <0.

~~4.1.~~

5. Все мн-ли в (1) - цел. числа (суммы/раз-ти цел. a, b, $2b$, $3b$).
Допустим, (1) $=55$. $55=5\cdot 11 = (-5)\cdot(-11)\cdot 1\cdot 1\cdot 1$ - прост. множители, значит, либо модуль одного из 5 мн-лей в (1) $=55$, а модули остальных $=1$, либо модули 2х из 5 мн-лей $=5$ и 11, остальных $=1$. Иначе (если модуль 3 из 5 мн-лей в (1) $\neq 1$), ~~прост. число (5 или 11) = произв-ие 2 цел. чисел~~, 55 = произв-ие 3 и более цел. чисел, ни одно из кот-х $\neq 1$ или -1, что невозможно - у 55 только 2 прост. множителя.

5.1. См. п. 4(I). Модули 3 или 4 мн-лей в (1) $=1$; но они все $>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ 3 мн-ля в (1) равны между собой ($=1$) - в п. 3 док-но, что такого быть не может.

5.2. См. п. 4(II). Модули 3 или 4 мн-й в (1) $=1$. Доп-тим, один из них (из этих 3/4 мн-лей с модулем 1) $=1$, другой $=-1$, а вот третий (и 4й) девать некуда - он равен либо 1, либо -1 - др. вариантов нет. Значит, опять 2 мн-ля в (1) между собой равны, что недопустимо.

5.3. Наконец, см. п. 4(III). Опять модули 3/4 мн-лей в (1) $=1$; один из них м/б $=1$, другой $=-1$ (из 3-4 мн-лей с модулем 1), 3й не вмещается - равен 1 или -1, недопустимо.

Вот я и рассмотрел все варианты событий для (1) $=55$, и во всех получил противоречие. Из этого исходит, что (1) $\neq 55 \Rightarrow a^5+3ba^4-5a^3b^2-15a^2b^3+4ab^4+12b^5 \neq$
$\neq 55$. ч.т.д.