Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

х7 ~~Ш~~

Шифр 217114

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математике

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Голоднов Дмитрий Александрович

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Тамбов, МАОУ „Лицей №29", 11„Г"

Регистрационный номер ШМ8085

Вариант задания 23

Дата проведения "17" февраля 2017 г.

Подпись участника Дмитр

семьдесят один

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
8	8	8	8	10	2	9	12	6	0	
										71

Шифр 217114
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 23

№1.

Пусть новый автомобиль на 100км расходует x л, тогда старый
422 (x+1,25) л, где x>0.

$$\frac{^{x+1,25}100}{x} - \frac{^{x}100}{x+1,25} = \frac{^{x(x+1,25)}}{4}$$

8

$$\frac{100x+125-100x-4x^2-5x}{x(x+1,25)}=0. \quad x\neq 0,\ x\neq -1,25.$$

$4x^2+5x-125=0.$

$x=5$ или $x=-6\frac{1}{4}$, $x=-6,25$ не удовлетворяет смыслу задачи.

Значит, у нового автомобиля расход 5л на 100км, а у 2 → 6,25л.

Ответ: 5л и 6,25л.

№2.

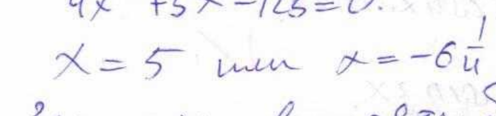
$1+\log_x(7-6x)<0$ ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ 7-6x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x<1\frac{1}{6} \end{cases}$

$\log_x x+\log_x(7-6x)<0$

$\log_x(x(7-6x))<0.$

$(x-1)(7x-6x^2-1)<0$ т.к. при вычитании 1 из основания и подл. части знак не меняется.

8



$x\in(\frac{1}{6};1)\cup(1;+\infty).$

С учетом ОДЗ: $x\in(\frac{1}{6};1)\cup(1;1\frac{1}{6}).$

Ответ: $(\frac{1}{6};1)\cup(1;1\frac{1}{6}).$

№3.

Пусть знаменатель прогрессии q, тогда $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{8}{q}$, $a_3 = 8q$, $a_4 = 8q^2$, $a_5 = 8q^3$.

По условию

$$\frac{32\cdot 8}{q} - 8\cdot 12q + 8q^2\cdot(-4) + 3\cdot 8q^3 = 0$$

$$\frac{32}{q} - 12q - 4q^2 + 3q^3 = 0 \;|\cdot q$$

$$3q^4 - 4q^3 - 12q^2 + 32 = 0$$

3 -4 -12 0 32
2 3 2 -8 -16 → 2 - корень
2 3 8 8 → 2 корень

$$(q-2)^2(3q^2+8q+8) = 0$$

$3q^2+8q+8=0$

$D = 64 - 3\cdot 4\cdot 8 < 0$, сл-но, корней нет

8

Значит, $q=2$, $a_1 = \frac{8}{q} = 4$.

Ответ: знаменатель $q=2$, $a_1 = 4$.

№4.

$$2\cos 16x - 4\cos 4x \sin 2x = 4 + \cos 8x - \cos 4x$$

$$4\cos^2 8x - 2 - 4 = 2\cos^2 4x - 1 - (1 - 2\sin^2 2x) + 4\cos 4x \sin 2x$$

$$4\cos^2 8x - 6 = 2\cos^2 4x - 2 + 2\sin^2 2x + 4\cos 4x \sin 2x$$

$$\frac{4\cos^2 8x - 4}{2} = \cos^2 4x + \sin^2 2x + 2\cos 4x \sin 2x$$

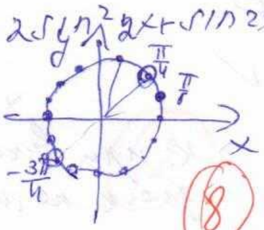
$$2\cos^2 8x - 2 = (\cos 4x + \sin 2x)^2$$

$2\cos^2 8x - 2 \le 0$, $(\cos 4x + \sin 2x)^2 \ge 0$, сл-но, корни есть только в случае.

$1 - 2\sin^2 2x + \sin 2x = 0$

$\sin 2x = 1$ или $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} 2\cos^2 8x - 2 = 0 \\ (\cos 4x + \sin 2x)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 8x = \pm 1 \\ 1 - 2\sin^2 2x + \sin 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{8}, n \in Z \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi k \\ x = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi k \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$$



$\Rightarrow x \in = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

8

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

№5.

$$\frac{(\sqrt{x-1}-1)(1-x-\sqrt{x^2-15x+56})}{(\log_4(x+4)-1)(\log_3(9-x)-1)} \ge 0.$$

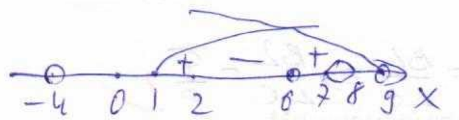
ОДЗ: $\begin{cases} x \ge 1 \\ x > -4 \\ x < 9 \\ x^2 - 15x + 56 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x > -4 \\ x < 9 \\ x \in (-\infty; 7] \cup \end{cases}$

① $\sqrt{x-1} - 1 = 0$
$x = 2$

② $1 - x - \sqrt{x^2-15x+56} = 0$.
$1 - x = \sqrt{x^2-15x+56}$, $x \le 1$
$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 15x + 56$
$13x = 55$.
$x = 4\frac{3}{13}$, сл-но, $\begin{cases} x \le 1 \\ x = 4\frac{3}{13} \end{cases} \Rightarrow$
корней нет.

③ $\log_4(x+4) - 1 = 0$
$x = 0$

④ $\log_3(9-x) - 1 = 0$
$x = 6$.



$x \in [1;2] \cup (6;7] \cup [8;9)$

10

Ответ: $[1;2] \cup (6;7] \cup [8;9)$.

№6

$$f(x)=\frac{1}{g(g(g(x)-1)+1)},\ \text{где } g(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{g(g(x+\frac{1}{x}-1)+1)},\quad g\left(x+\frac{1}{x}-1\right)=x+\frac{1}{x}-1+\frac{1}{x+\frac{1}{x}-1}$$

$$f(x)=\frac{1}{g\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}-1}\right)},\quad g\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}-1}\right)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}-1}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}}$$

$$f(x)=\frac{1}{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}-1}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}-1}}}$$

$x+\frac{1}{x} \in (-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$

$x+\frac{1}{x}-1 \in [-\frac{1}{3};0) \cup (0;1]$?

$x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}-1} \in (-\infty;-2\frac{1}{3}] \cup [3;+\infty)$

2

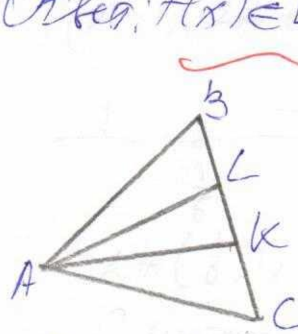
$$\frac{1}{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}-1}} \in \left[-\frac{3}{7};0\right) \cup \left(0;\frac{1}{3}\right)$$

$$x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}-1}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}-1}} \in \left(-\infty;-4\frac{2}{7}\right] \cup \left[3\frac{1}{3};+\infty\right)$$

$f(x) \in [-\frac{7}{30};0) \cup (0;\frac{3}{10})$.

Ответ: $f(x) \in [-\frac{7}{30};0) \cup (0;\frac{3}{10})]$

№7



Дано: $AK=35$, $BK=42$, $KC=14$, $\angle B+\angle C=\angle AKB$.

Найти: AL - биссектрису.

Решение:

Т.к. $\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)$, $\angle AKB=\angle B+\angle C$, то $\angle A=\angle AKC$,

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle AKC$, $\angle A=\angle AKC$, $\angle C$ - общий, сл-но $\triangle ABC \sim \triangle A$... по I признаку, сл-но, $\frac{AC}{BC}=\frac{KC}{AC}=\frac{AK}{AB}$.

$AC^2=BC\cdot KC$, $AC^2=(42+14)\cdot 14$, $AC=28$.

$AB=\frac{AC\cdot AK}{KC}=\frac{28\cdot 35}{14}=70$.

Т.к. AL - биссектриса, то $\frac{AB}{BL} = \frac{AC}{CL}$, $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC} \Rightarrow \frac{BL}{LC} = \frac{5}{2}$ ✓

$\begin{cases} BL + LC = 56 \\ 2BL = 5LC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BL = 40 \\ LC = 16 \end{cases}$ ✓

В $\triangle ABC$ по теореме косинусов $28^2 + 70^2 + 56 - 2 \cdot 70 \cdot 56 \cos\angle B$

$$\cos\angle B = \frac{70^2 + 56^2 - 28^2}{2 \cdot 70 \cdot 56} = \frac{35^2 + 28^2 - 14^2}{2 \cdot 35 \cdot 28} = \frac{1421}{70 \cdot 28} = \frac{29}{40}.$$

В $\triangle ALB$ по теореме косинусов

$AL^2 = 70^2 + 40^2 - 2 \cdot 70 \cdot 29 = 6500 - 4060 = 2440$

$AL = \sqrt{2440} = 2\sqrt{610}$.

9

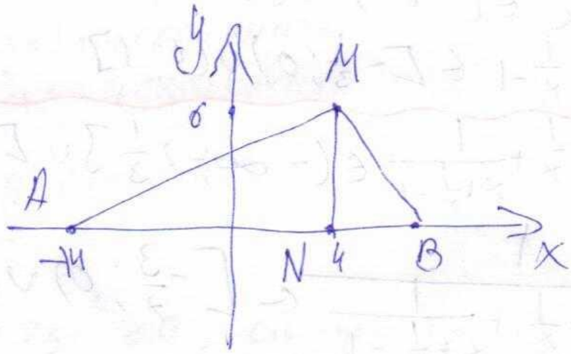
Ответ: $2\sqrt{610}$

№8.

$y = \frac{27 - x^2}{6}$.

$y' = -\frac{x}{3}$.

$l = -\frac{x_0}{3}(x - x_0) + \frac{27 - x_0^2}{6}$.



$6 - \frac{4x_0}{3} + \frac{x_0^2}{3} + \frac{27 - x_0^2}{6}$.

$\frac{2x_0^2 + 27 - 8x_0 - 36 - x_0^2}{6} = 0$.

$x_0^2 - 8x_0 - 9 = 0$.

$x_0 = -1$ или $x_0 = 9$. ✓

$l_1 = \frac{x+1}{3} + \frac{13}{3} = \frac{x+14}{3}$. ✓

$l_2 = -3(x - 9) - \frac{54}{6} \Rightarrow l_2 = 18 - 3x$.

$l_2 \cap Ox$ в $(6; 0)$

$l_1 \cap Ox$ в $(-14; 0)$

$l_2 \cap Ox$ в $(6; 0)$. ✓

$S_{MNB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (6 - 4) = \frac{12}{2} = 6$.

$S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 6 = 54$.

$S_{AMB} = 54 + 6 = 60$.

Ответ: 60 ✓

12

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 217114

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 23.

N 9

$16a(x-3)+32=(x+|x|)^2$

Если $x \le 0$, то $a(x-3)=2$

$x=\frac{3a-2}{a}=3-\frac{2}{a}, a\neq 0.$

$x<0$, сл-но, $3-\frac{2}{a}<0$, $\cancel{\Rightarrow} a<\frac{2}{3}.$

Если $x>0$, то $4x^2-16xa-32+48a=0.$

$x^2-4xa-8+12a=0.$

$D=16a^2-4(-8+12a)=16a^2-48a+32=16(a^2-3a+2)$

$x=\frac{4a\pm 4\sqrt{a^2-3a+2}}{2}=2a\pm 2\sqrt{a^2-3a+2}$

6

$2a\mp 2\sqrt{a^2-3a+2}\ge 0.$

$\cancel{4}a^2>a^2-3a+2$

$\cancel{a\ge\frac{2}{3}}.$

$\begin{cases} a\ge\frac{2}{3}. \\ a>0 \end{cases}$

$2a+2\sqrt{a^2-3a+2}\ge 0$

$\cancel{a\ge\frac{2}{3}}-a\ge\sqrt{a^2-3a+2}$

$a^2\le a^2-3a+2$

$a\le\frac{2}{3}$

$\{a\le 0.$

Ответ: $a\in[0;\frac{2}{3}]$, $x=3-\frac{2}{a}\ (x\le 0)$, $x=2a\pm 2\sqrt{a^2-3a+2}$.

N 10.

$AC=\sqrt{8^2+24^2}=8\sqrt{10}.$

$TC=\sqrt{3^2+24^2}=3\sqrt{65}.$

$AT=\sqrt{73}.$

$BC\perp(ABT)$ т.к. $BC\perp AB$, $BC\perp BT$.

$TS=\sqrt{160+9}=13.$

Наименьшая площадь будет, если ~~пр~~ треуг. прямоуг., сл-но,

$S=\frac{BS\cdot BT}{2}$, $BS=\frac{AC}{2}$, т.к. BS - медиана из прямого угла,

$S=\frac{4\sqrt{10}\cdot 3}{2}=6\sqrt{10}.$

Ответ: $6\sqrt{10}$.

0