Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1 ОП

212450

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Богатырев Егор Юрьевич

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Москва, ГБОУ „Лицей № 1580"

Регистрационный номер ШМ 4543

Вариант задания 28

С работой ознакомлен. ЕБогат 18.03.17 г.

Дата проведения "12" марта 2017 г.

Подпись участника ЕБогат

восемьдесят один

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
8	8	8	0	9	9	12	12	12	3	81

Шифр 212450

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

212450

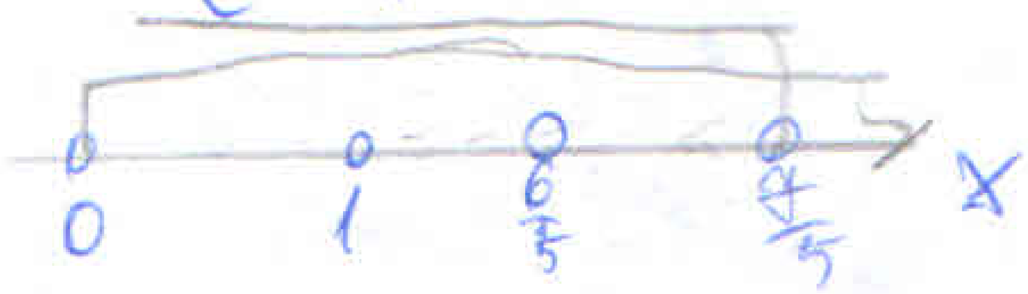
Вариант № 28

№2

$\log_x(36-60x+25x^2)<0$

$\log_x((5x-6)^2)<0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)((5x-6)^2-1)<0\\ x\neq\frac{6}{5}\\ x>0\\ x\neq 1\end{cases}$ ✓ $\begin{cases}(x-1)(5x-7)(5x-5)<0\\ x\neq\frac{6}{5}\\ x>0\\ x\neq 1\end{cases}$

$\begin{cases}5(x-1)^2(5x-7)<0\\ x\neq\frac{6}{5}\\ x>0\\ x\neq 1\end{cases}$



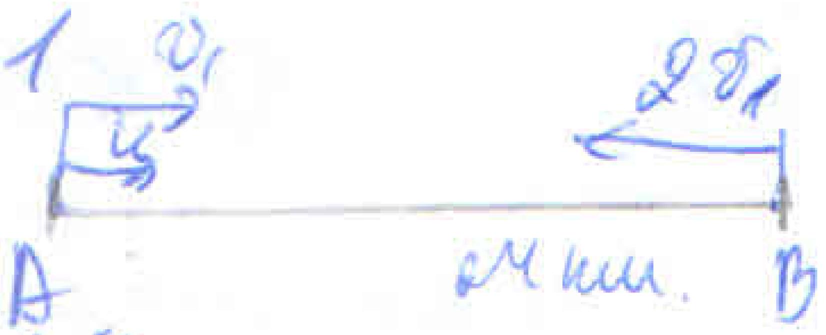
Ответ: $x\in(0;1)\cup(1;\frac{6}{5})\cup(\frac{6}{5};\frac{7}{5})$ ✓ 8

№3

$\cancel{26x^2+23xy-3y^2-19=0}$

$\cancel{x=\frac{-23y\pm\sqrt{23^2y^2+4\cdot 26(3y^2+19)}}{52}}$

№1



Дано: $AB=24$ км $t\geq 2$ ч.

$v_2=2v_1$ $t_1=24$ мин.

найти: u, v?

v_1 - ?

Р е ш: $v_1=\frac{24}{t}$, $t\geq 2$ч., $v_1\leq 12$ км/ч. ✓

$v_2=\frac{48}{t}\leq 24$ км/ч

$\cancel{u\cdot(60t+24)+\frac{48}{5}\cdot 24}$

$u(t+\frac{2}{5})+v_2\cdot\frac{2}{5}=24$ $v_2=\frac{48}{t}$, $t\geq 2$

$u(t+\frac{2}{5})+\frac{96}{5t}=24$

$u=\frac{24(1-\frac{4}{5t})\cdot 5}{5t+2}=24\cdot\frac{5t-4}{5t^2+2t}$

$\begin{cases}u'(t)=24\cdot\left(\frac{5(5t^2+2t)-(5t-4)\cdot(10t+2)}{(5t^2+2t)^2}\right)=24\cdot\frac{25t^2+10t-50t^2+30t+8}{(5t^2+2t)^2}=\\ =24\frac{-25t^2+40t+8}{(5t^2+2t)^2}\\ t\geq 2\end{cases}$

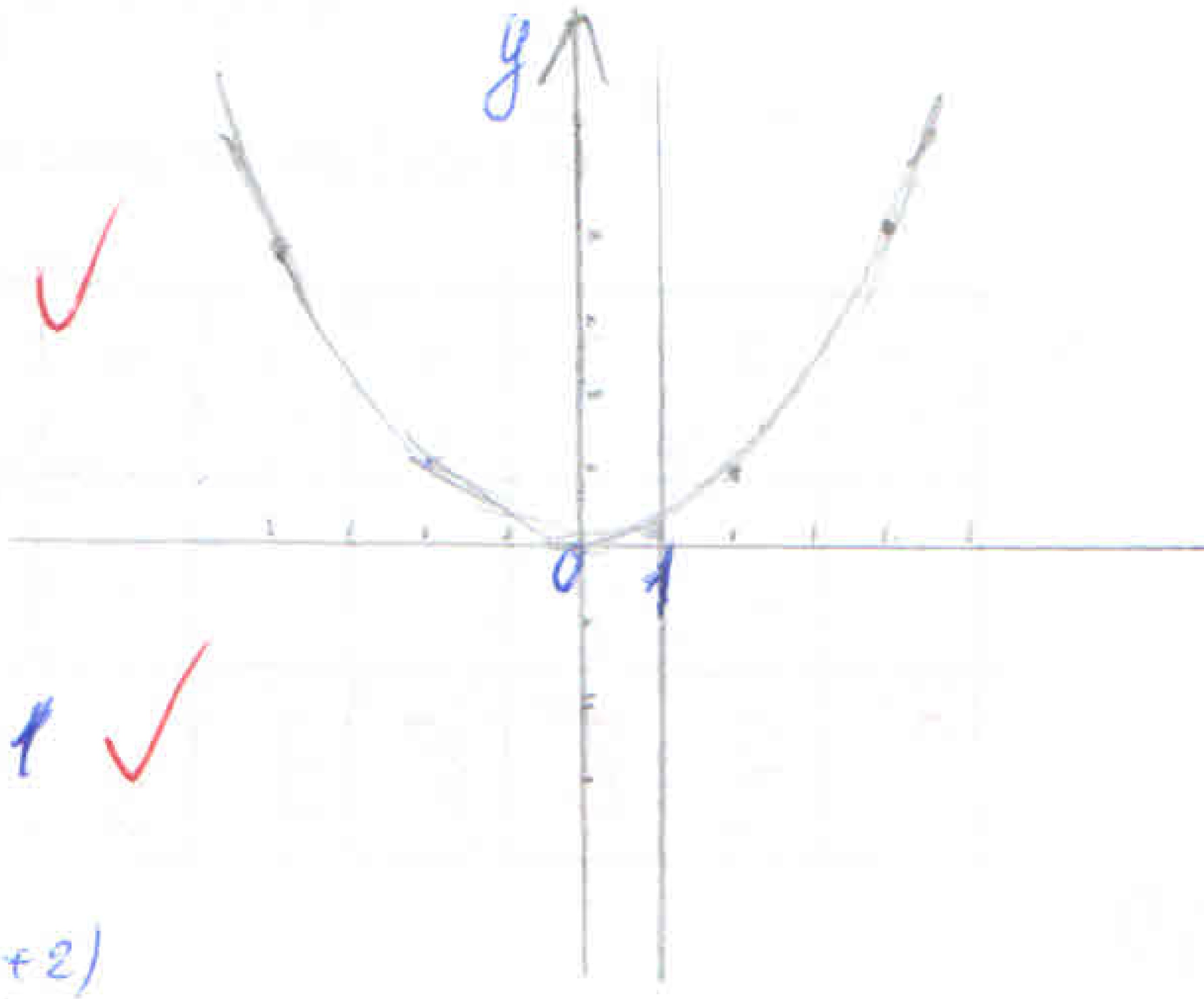
$-25t^2+40t+8=0$. $t=\frac{-20\pm\sqrt{400+200}}{-25}=\frac{-20\pm 10\sqrt{6}}{-25}$, т.к.

$t>0$, то $\frac{-20+10\sqrt{6}}{-25}$ не уд., то $t=\frac{20+10\sqrt{6}}{25}=\frac{4+2\sqrt{6}}{5}$ $u(t)$ 0 $\frac{4+2\sqrt{6}}{5}$ 2 t, но

по усл. $t\geq 2$, то u_{max} при $t=2$, то $u=24\cdot\frac{10-4}{5\cdot 4+2\cdot 2}=\frac{24\cdot 6}{24}=6$ км/ч, тогда

$v_1=\frac{24}{2}=12$ км/ч Ответ: ск. пеш. $u=6$ км/ч, ск. вел. $v_1=12$ км/ч ✓ 8

№ 8



$x=1$; $y=\frac{x^2}{4}$; $\angle=45^\circ$

касат: $l_1: y=\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_1}{2}(x-x_1)=\frac{x_1x}{2}-\frac{x_1^2}{4}$ ✓

$l_2: y=\frac{x_2^2}{4}+\frac{x_2}{2}(x-x_2)=\frac{x_2x}{2}-\frac{x_2^2}{4}$ ✓

$\varphi=45^\circ \Rightarrow tg\varphi=1$, то

$tg\varphi=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}}{1+\frac{x_1x_2}{4}}\right|=\left|\frac{(x_1-x_2)2}{4+x_1x_2}\right|=1$ ✓

$2x_1-2x_2=4+x_1x_2$

$x_1(2-x_2)=2(2+x_2)$ $x_1=\frac{2(x_2+2)}{2-x_2}$

При $x=1$, касат $\cap$, то. $\frac{x_1}{2}-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_2}{2}-\frac{x_2^2}{4}$

$x_1(2-x_1)=x_2(2-x_2)$, $x_1=\frac{2(x_2+2)}{2-x_2}$, то.

$\frac{2(x_2+2)}{2-x_2}\left(2-\frac{2(x_2+2)}{2-x_2}\right)=x_2(2-x_2)$

$-\frac{2(x_2+2)\cdot 4x_2}{2-x_2\cdot 2-x_2}=x_2(2-x_2)$

~~$\frac{2(x_2+2)}{2-x_2}\left(\frac{2x_2-4-2x_2-4}{2-x_2}\right)=x_2(2-x_2)(2-x_2)$~~

~~$-16(x_2+2)=+x_2(2-x_2)^3$~~

~~$x_2^4-6x_2^3+12x_2^2-8x_2-16x_2-32=0.$~~

~~$x_2^4-6x_2^3+12x_2^2-24x_2-32=0.$~~

$\left[\begin{array}{l} x_2=0 \\ -8(x_2+2)=(2-x_2)^3 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 8(x_2+2)=(x_2-2)^3 \\ x_2=0 \end{array}\right.$

$x_2^3-6x_2^2+12x_2-8-8x_2-16=0.$

$x_2^3-6x_2^2+4x_2-24=0$ $x_2=6$, то

	1	−6	4	−24
6	1	0	4	0

$=(x_2-6)(x_2^2+4)=0$ $\left[\begin{array}{l} x_2=6 \\ x_2=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x_1=-4 \\ x_2=6 \\ x_1=2 \\ x_2=0 \end{array}\right.$, тогда

$l_2: \left[\begin{array}{l} y=\frac{6\cdot 1}{2}-\frac{6\cdot 6}{4}=-6 \\ y=\frac{0\cdot 1}{4}-0=0. \end{array}\right.$

Ответ: $M(1;0)$ или $M(1;-6)$ ✓ 12

№ 3

$26x^2+23xy-3y^2-19=0.$ $x-b$, $y-11$; $x,y\in\mathbb{Z} \Rightarrow d\in\mathbb{Z}$.

$y=x+5d$, $d<0$.

$26x^2+26xy-3xy-3y^2=19$

$26x(x+y)-3y(x+y)=19$ $(26x-3y)(x+y)=19$, числа $\in\mathbb{Z}$, то

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=19 \\ 26x-3y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=1 \\ 26x-3y=19 \end{cases} \end{array}\right.$ ✓ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=19-x \\ 26x-57+3x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=1-x \\ 26x+3x-3=19. \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=17 \end{cases} \\ \begin{cases} y=1-x \\ x=\frac{22}{29} \end{cases} \varnothing, \text{т.к. } x\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$ то $x=2$, $y=$ $y>x$ — не уд усл,

~~тогда $x+5d=y$, т.е. $2+5d=17$ $5d=15$ $d=3$~~

~~Ответ:~~ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=-19 \\ 26x-3y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-1 \\ 26x-3y=-19 \end{cases} \end{array}\right.$ ✓ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-x-19 \\ 26x+3x+57=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-1-x \\ 26x+3x+3=-19 \end{cases} \end{array}\right.$ $\begin{cases} y=-17 \\ x=-2 \end{cases}$ $\varnothing$ — уд, то.

$x+5d=y$

$-2+5d=-17$

$5d=-15$ $d=-$

Ответ: $d=-3$ ✓ 8

№9

$$\begin{cases} 2y-2=a(x-1) \\ \dfrac{2x}{|y|+y}=\sqrt{x} \end{cases}$$

хотя бы 1 реш. при кажд. a.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2y-2=a(x-1) \\ y>0 \\ \dfrac{x}{y}=\sqrt{x} \end{cases} \\ \begin{cases} y<0 \\ \varnothing \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 2y-2=a(x-1) \\ y>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} x>0 \\ y=\sqrt{x} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y>0 \\ 2y-2=-a \end{cases} \\ \begin{cases} y>0 \\ y^2=x \\ 2y-2=a(y^2-1) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y>0 \\ y=\dfrac{2-a}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y>0 \\ y^2=x \\ 2(y-1)=a(y-1)(y+1) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y>0 \\ y=\dfrac{2-a}{2} \\ a<2 \end{cases} \\ \begin{cases} y>0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y\neq 1 \\ 2=a(y+1) \\ y^2=x \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{2-a}{2} \\ a<2 \end{cases} \\ \begin{cases} y>0 \\ y^2=x \\ y\neq 1 \\ y=\dfrac{2-a}{a} \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{2-a}{2} \\ a<2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\dfrac{2-a}{a} \\ x=\left(\dfrac{2-a}{a}\right)^2 \\ a\in(0;1)\cup(1;2) \end{cases} \end{array}\right.$$

$-$ 0 $+$ 1 $-$ 2 $-$ a

Ответ: хотя бы 1 реш при $a\in\mathbb{R}$,

$a\geq 2$ $(1;1)$, $a\in(-\infty;0)-\{(0;\frac{2-a}{2});(1;1)\}$

$a\in(0;1)\cup(1;2)-\{(0;\frac{2-a}{2});(1;1);(\left(\frac{a-2}{a}\right)^2;\frac{2-a}{a})\}$

~~$a\in\{2\}-(1;1)$ $a=1$~~

12

$a=2-(1;1)$ ~~$a\in\{0;1\}-\{(1;1)\}$~~

$a=0-\{(1;1);(0;1)\}$, $a=1-\{(1;1);(0;\frac{1}{2})\}$.

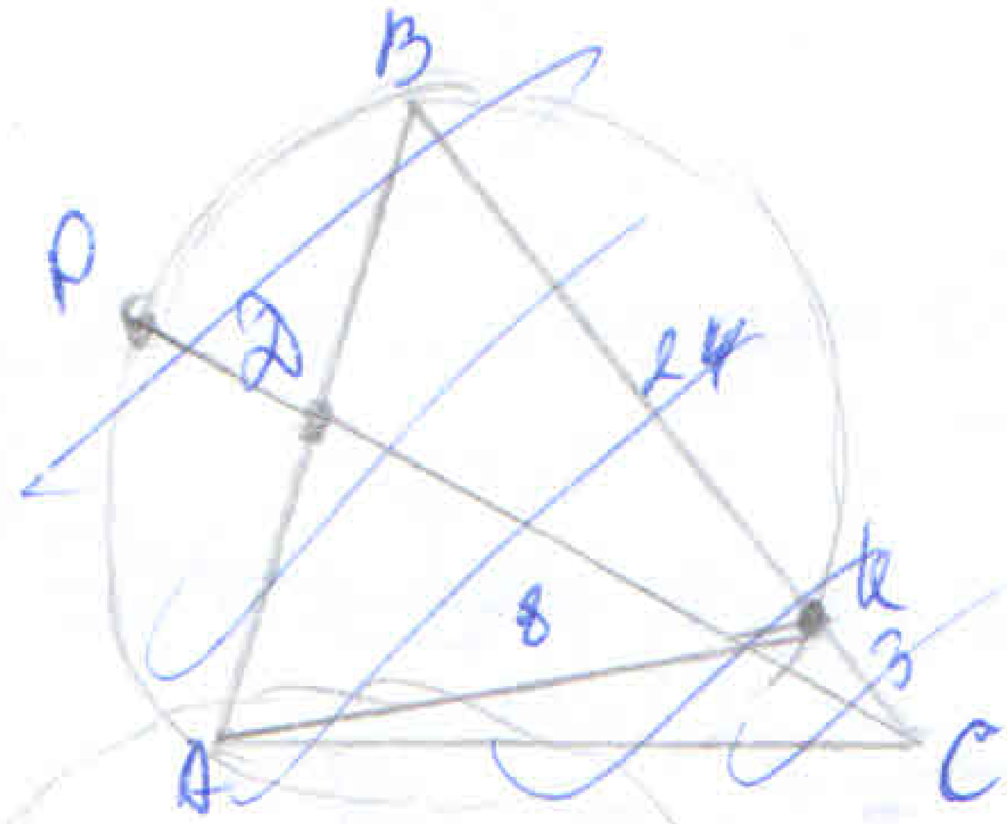
№7

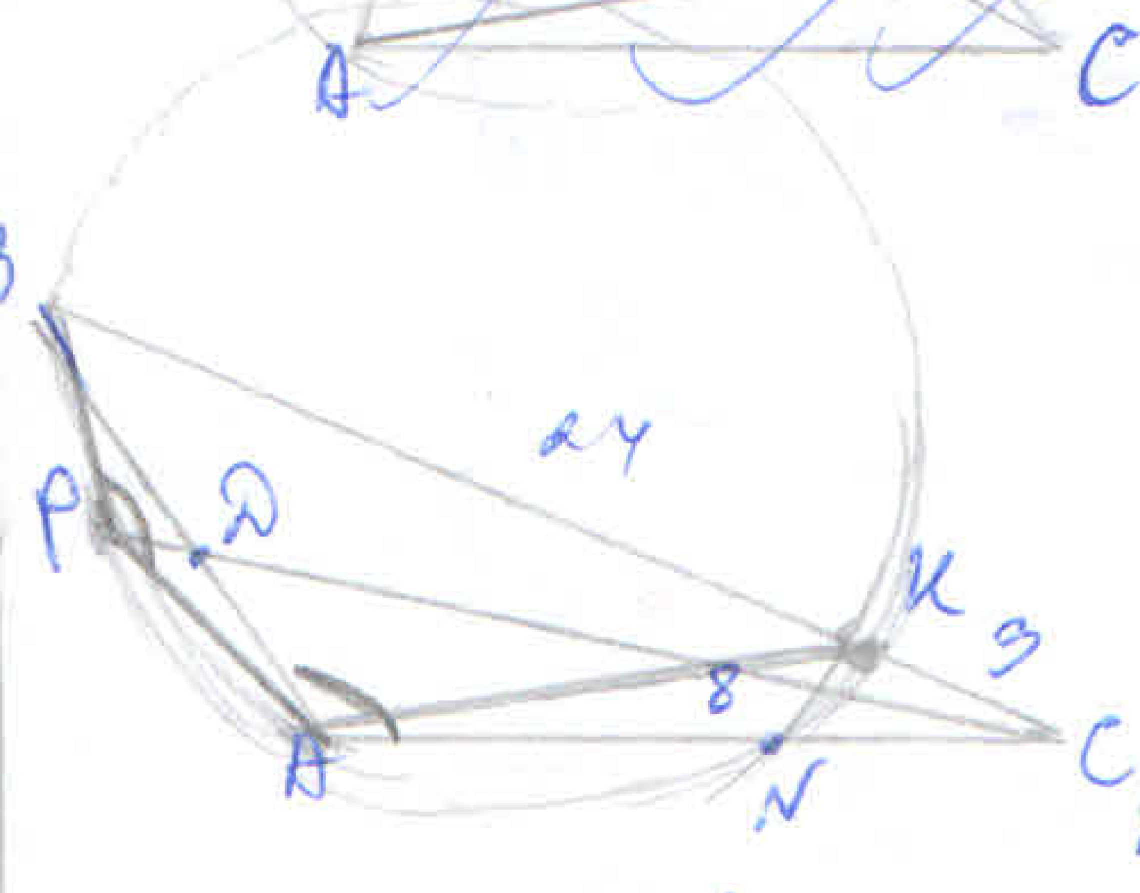
Дано: $AK=8$, $BK=24$, $CK=3$, D - ср AB, C т. пар $=P$, $\angle APB=\angle BAC$.

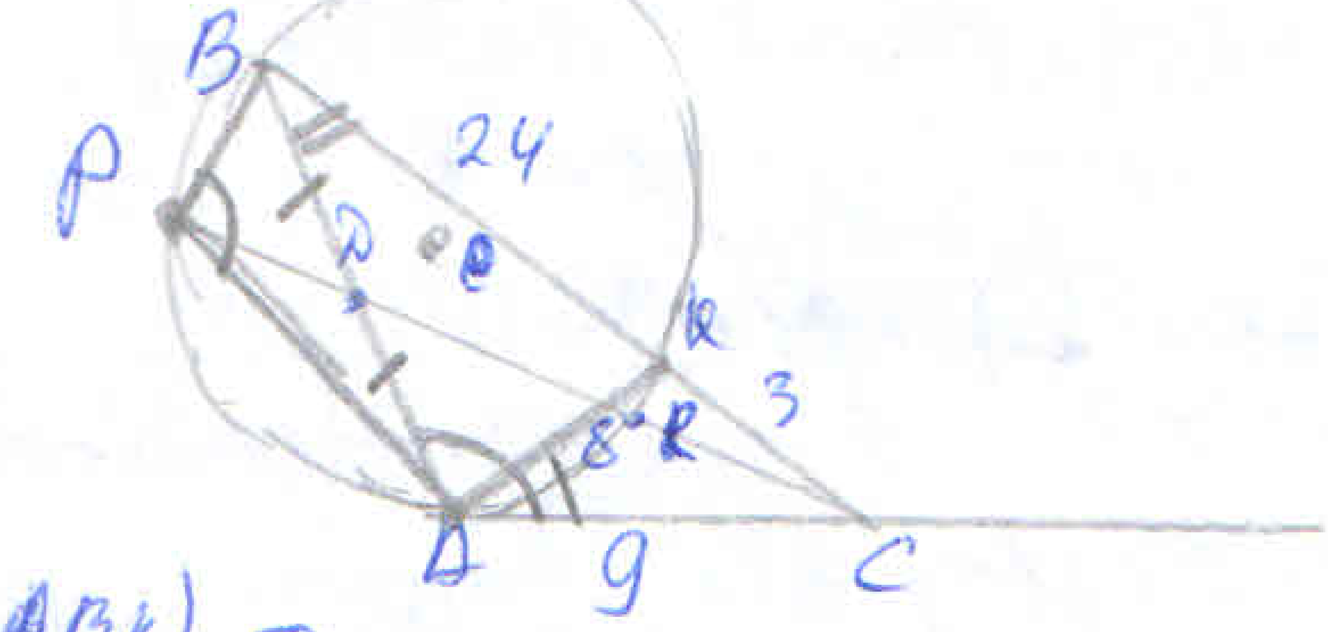
Найти: DP - ?

Р-е: 1) $\angle BPA$ опир на ~~дугу~~ $\cup AB$, а $\angle BAC=\angle BAN$ опир на дугу $\cup BN$, т.к. $\angle APB=\angle BAC$, то $\cup BN=\cup BA$, что возможно лишь при $A=N$, т.к. $N\in AC$, тогда

AC - кас к окр, то







$AC^2=CK\cdot CB$

$AC=\sqrt{3\cdot 27}=9$

$\triangle CAK \sim \triangle CBA$ ($\angle CAK=\frac{1}{2}\cup AK=\angle ABK$), то

$\frac{CA}{CB}=\frac{AK}{AB}$ $\frac{9}{27}=\frac{8}{AB}$ $AB=24$, то $AB=BK$, $BD=DA=12$.

Пусть $CP\cap$ окр $=R$, то $81=CR\cdot CP$ и $BD\cdot DA=PD\cdot DR$, $DR=CD-CR$, то.

$CR=x$, $DP=y$ то.

$$\begin{cases} x(CD+y)=81 \\ y(CD-x)=144 \end{cases}$$

$CD=\sqrt{\dfrac{2\cdot 3^2+9^2-8^2\cdot 24^2}{2}}=3\sqrt{\dfrac{81+9}{2}-32}$

(продолжение после №4 на обороте)

$$\frac{\left(5\cdot 2^{-\log_x 3}-\frac{5}{2}\right)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}}{1+\sqrt{\log_x 3+8}} \geq \frac{\left(2^{-\log_x 3}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}}{\sqrt{\log_x 3+8}-3}$$

№5

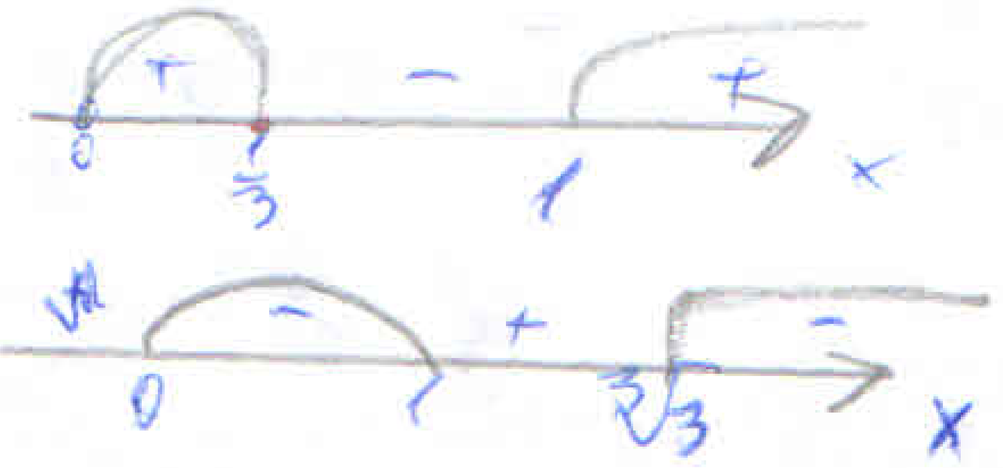
$\log_x 3 \geq -1$

$$\left(2^{-\log_x 3}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}\cdot\left(\frac{5}{1+\sqrt{\log_x 3+8}}-\frac{1}{\sqrt{\log_x 3+8}-3}\right)$$

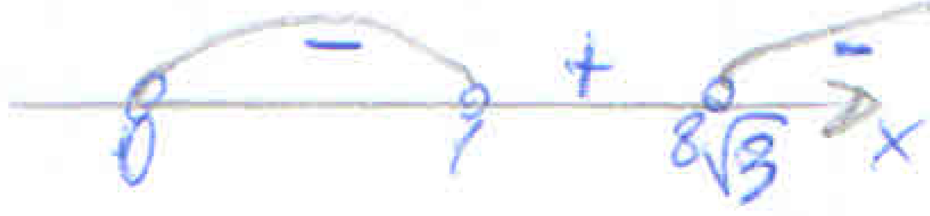
$$\begin{cases}\left(2^{-\log_x 3}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5\sqrt{\log_x 3+8}-15-1-\sqrt{\log_x 3+8}}{(1+\sqrt{\log_x 3+8})(\sqrt{\log_x 3+8}-3)}\right)>0\\ \log_x 3>-1\\ 2>\sqrt{\log_x 3+1}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{(2-1)(-\log_x 3+1)\cdot 4\left(\sqrt{\log_x 3+8}-4\right)}{\sqrt{\log_x 3+8}-3}>0.\\ \log_x 3x>0\\ 3>\log_x 3\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{(\log_x 3-8)(\log_x 3-1)}{\log_x 3-1}<0\\ (x-1)(3x-1)>0.\\ \log_x \frac{3}{x^3}<0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_x 3-8<0.\\ x\neq 3\\ \left[\begin{array}{l}x<\frac{1}{3}\\ x>1\end{array}\right.\\ (x-1)\frac{3-x^3}{x^3}<0\end{cases}$$



$$\begin{cases}\log_x \frac{3}{x^8}<0\\ x\neq 3\\ x\in(0;\tfrac{1}{3}]\cup(\sqrt[3]{3};+\infty).\end{cases} \quad \begin{cases}(x-1)\frac{3-x^8}{x^8}<0.\\ x\neq 3\\ x\in(0;\tfrac{1}{3})\cup(\sqrt[8]{3};+\infty).\end{cases}$$



9

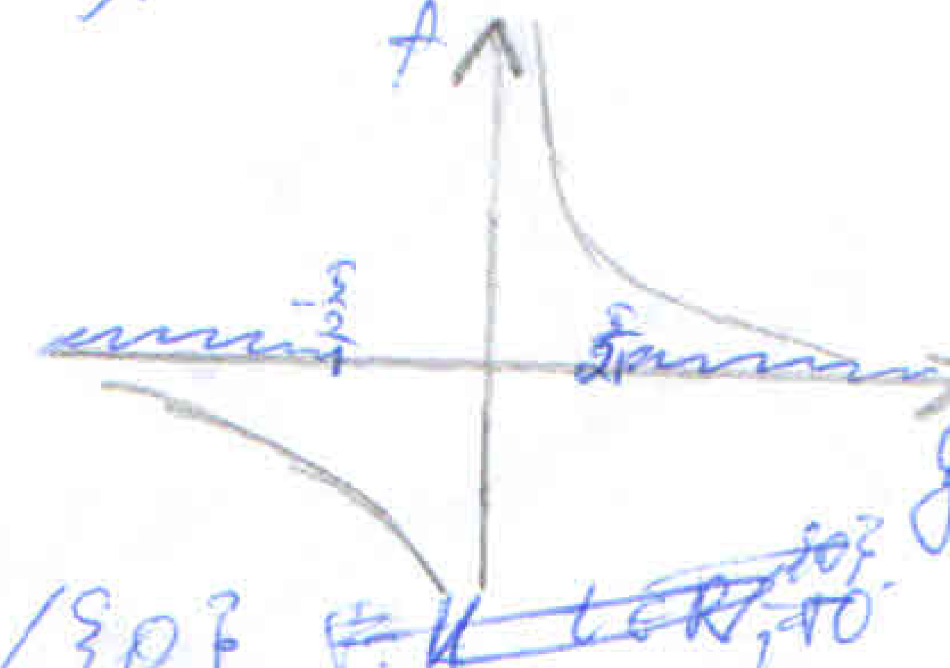
Ответ: $x\in(0;\tfrac{1}{3}]\cup(\sqrt[3]{3};3)\cup(3;+\infty)$.

№4

~~$2\,tg^4 6x+4\sin 4x\cdot\sin 8x-\cos 8x-\cos 16x+2=0$~~

~~$\sqrt{\cos x}=\sqrt{3}\cdot\sin x$~~

№6.



$$f(x)=\frac{1}{g\left(\frac{64g(\log(\log_2 x))}{5}\right)},\quad g(x)=\sqrt[5]{x}+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$$

$\sqrt[5]{x}=t,\ t\in R \quad g(t)=t+\frac{1}{t} \quad D(g)=R/\{0\}$, ~~$t\in R, t\neq 0$~~

$E(g)$: $g'(t)=1-\frac{1}{t^2}=\frac{(t-1)(t+1)}{t^2}$

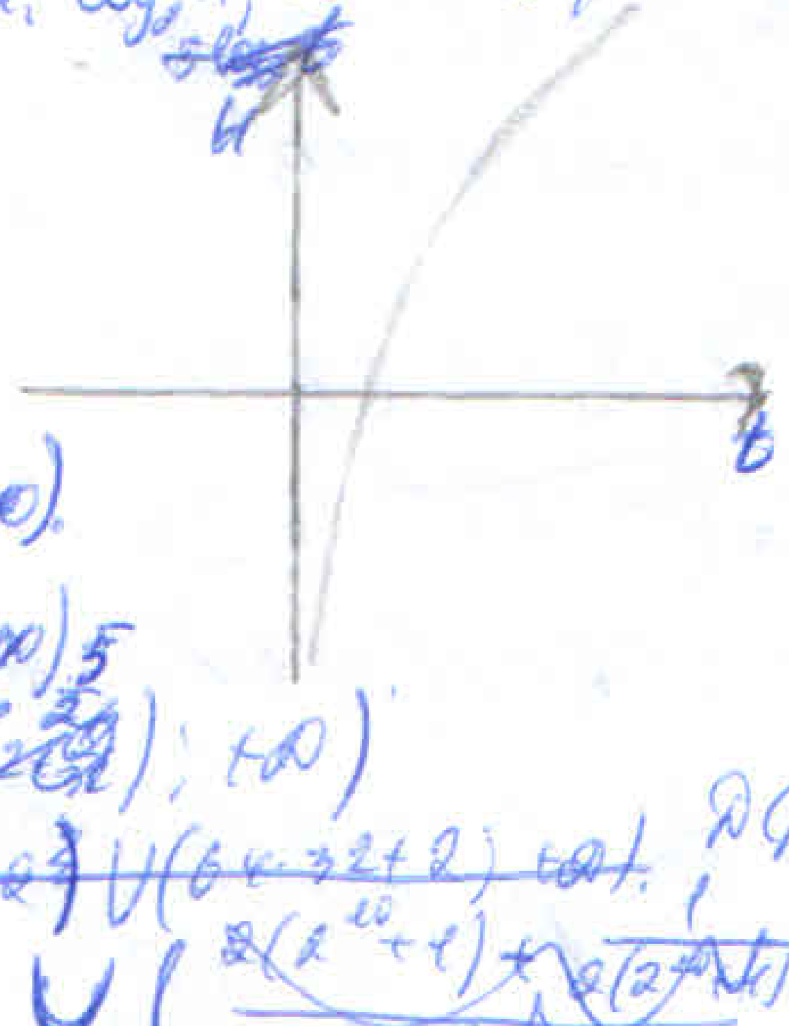
+ − − + ; −1 0 1 ; t, $g'(t)$, $g(t)$

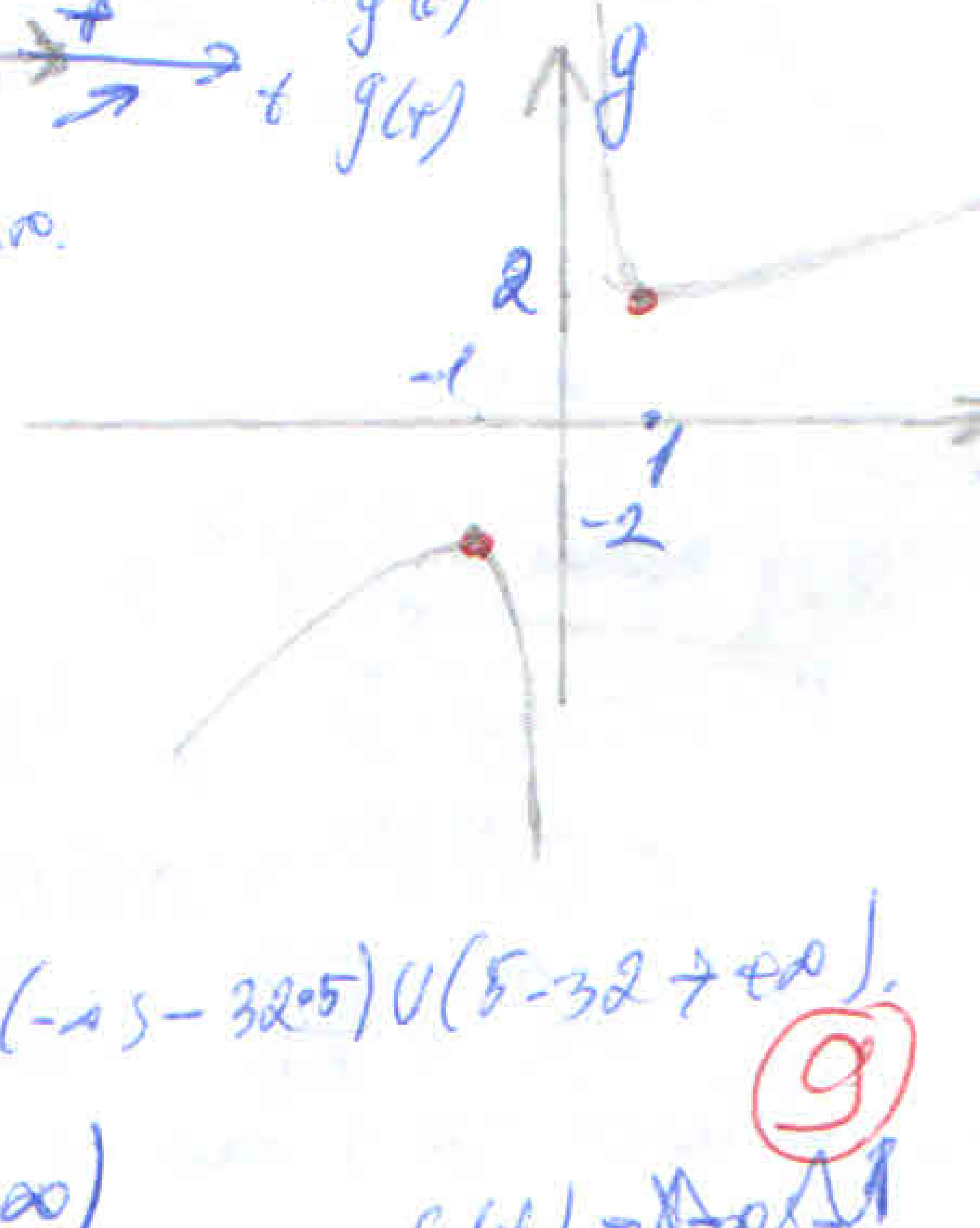
$E(g)=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$, т.к. $\log_2 x$, то $x>0$, то $t>0$.

~~$E(g)$~~ $k=\log_5\log_2 t$

$E(k)=R$

$D(k)=(0;+\infty)$





$r=\log(k) \quad D(r)=R/\{0\}$

$E(r)=(-\infty;-32]\cup[32;+\infty)$.

$n=64g(r) \quad D(n)=(-\infty;-32]\cup[32;+\infty)$

$E(n)=(-\infty;64\cdot(-\frac{5}{2}))\cup(64\cdot\frac{5}{2};+\infty)$

$p=\frac{g(n)}{5}$ ~~$D(p)=(-\infty;-64\cdot 32-2]\cup(64\cdot 32+2;+\infty)$~~, $D(p)=(-\infty;-32\cdot 5)\cup(5\cdot 32;+\infty)$.

$E(p)=(-\infty;\frac{-2(2^{10}+1)}{32})\cup(\frac{2(2^{10}+1)}{32};+\infty)$

9

$f=\frac{1}{g(p)} \quad D(f)=(-\infty;-32)\cup(32;+\infty)$, $E(g(p))=(-\infty;-\frac{5}{2})\cup(\frac{5}{2};+\infty)$, $E(f)=(-\frac{2}{5};0)\cup(0;\frac{2}{5})$

Ответ: $E(f)=[-\frac{2}{5};0)\cup(0;\frac{2}{5}]$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

212450

Шифр ____________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 28

№10

Дано: $TA \perp TB \perp TC$.

α: C, сер AB, $TA = 6$, $TB = 12$, $TC = 2$.

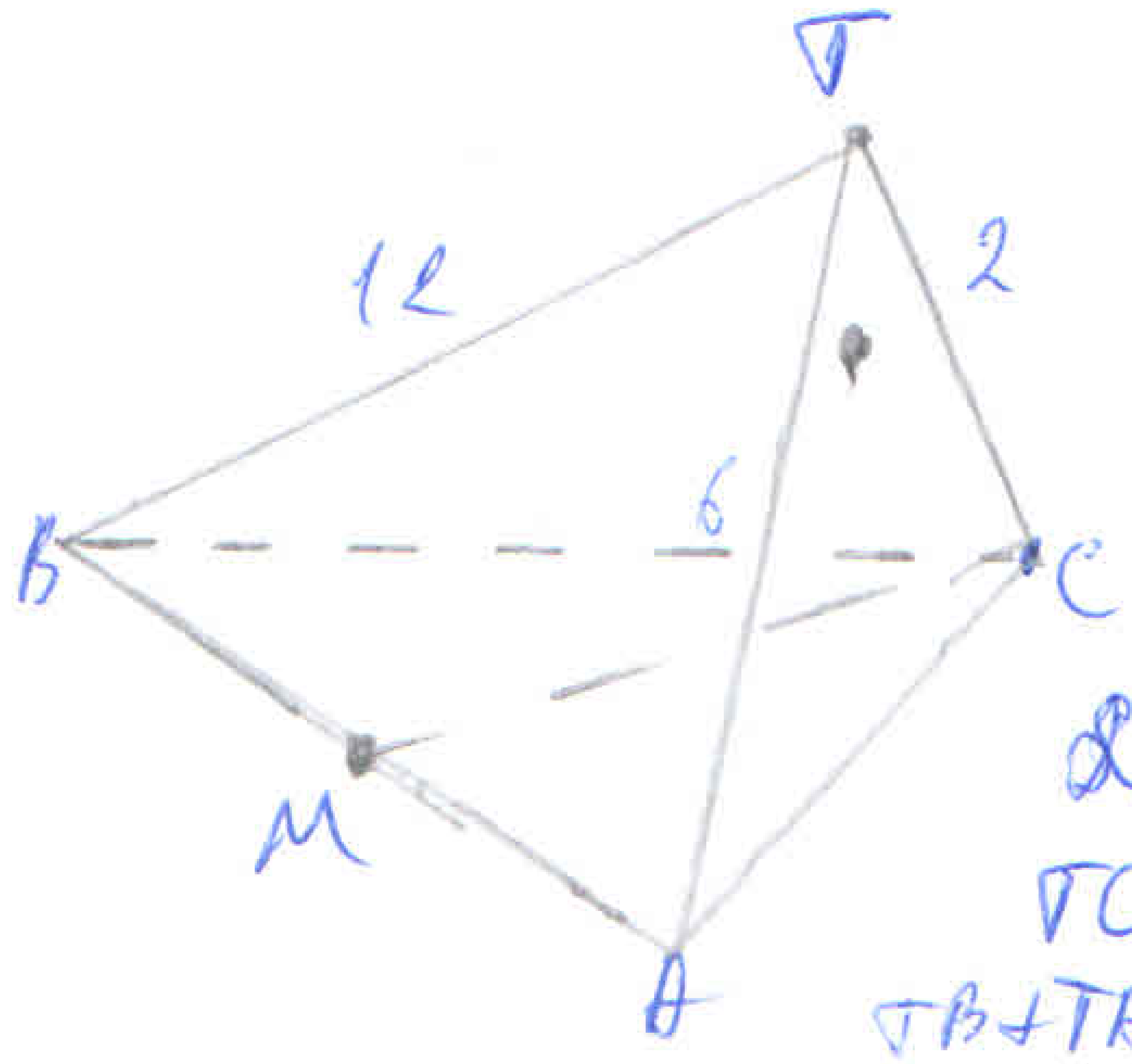
Найти: S_{min} - ?

Р-е: 1) по т. Пиф.

$AC = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$.

$AB = \sqrt{144+36} = 6\sqrt{5}$

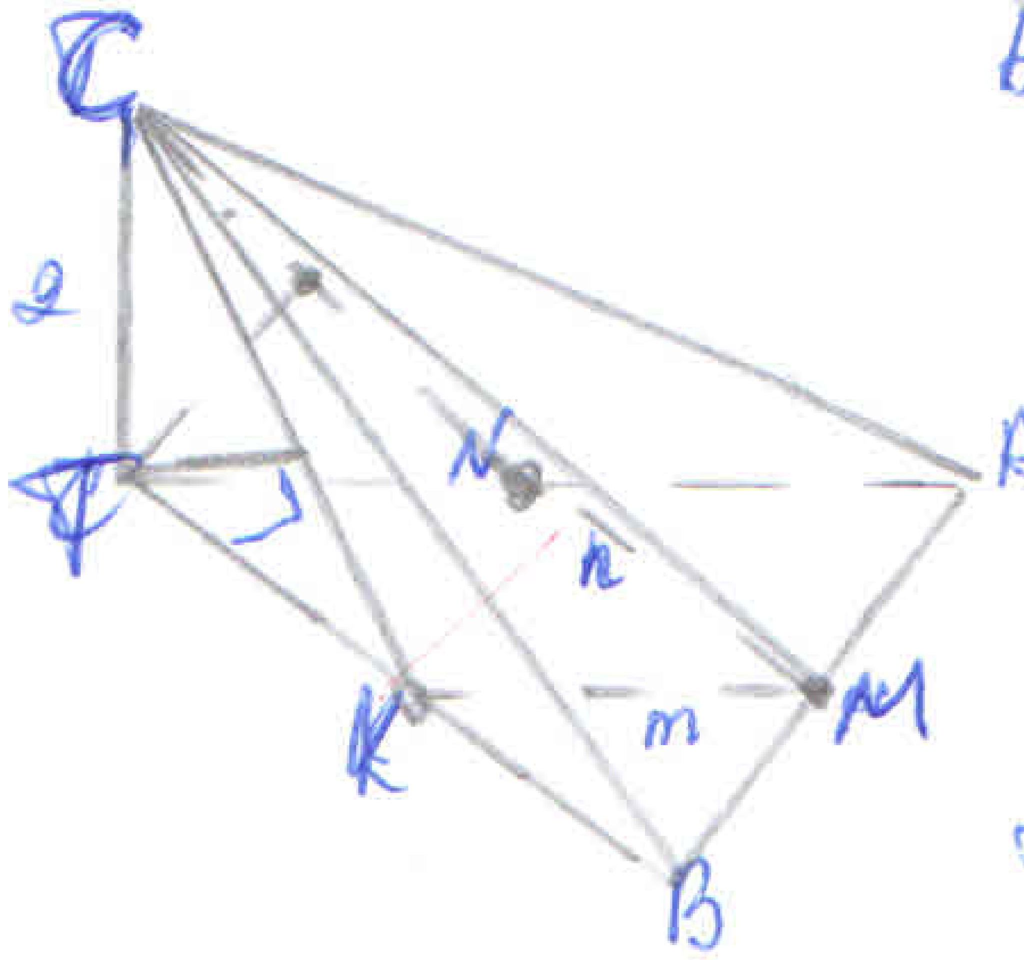
$BC = \sqrt{144+4} = 2\sqrt{37}$



Плоскость идёт через TA или TB

$TC \perp TB$ и $TC \perp TA$, $TB \cap TA = T$, то $TC \perp (TAB)$

$TB \perp TA$



1) S_{min}, если $\min h_{CM}$, то $h_{CM} = \rho(TB, CM)$

$n \mid n \parallel TB \wedge M \in n$, то $MN \perp TA$ (т.к. $TB \perp TA$)

T - пр$_{ATB}$ C, то $TN \perp MN$, по т. о 3 перп. $CN \perp NM$, то $(TNC) \perp (ATB)$ и $(TNC) \perp (CMN)$, $\rho(TB, CM) = \rho(T, CN)$,

$TN = \frac{1}{2} TA = 3$, (MN - ср. лин.) то $\rho = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{4+9}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$)

$m \mid M \in m$ и $m \parallel TA$, то $KM \perp TB$ (т.к. $TA \perp TB$), то. T - пр$_{(ATB)}$ C, $TK \perp KM$, $CK \perp KM$ по т. о 3 перп., то $(TCK) \perp (TAB)$; $(TCK) \perp (CMK)$, $\Rightarrow \rho(CM, TA) = \rho(T, CK)$.

$TK = \frac{1}{2} TB = 6$ (MK - ср. лин.), то $\rho(T, CK) = \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{4+36}} = \frac{6}{\sqrt{40}}$, $\frac{6}{\sqrt{40}} \geq \frac{6}{\sqrt{13}} \Rightarrow S_{min}$ когда $\alpha \cap TA$.

$S_{min} = \frac{1}{2} CM \cdot \frac{6}{\sqrt{13}}$; $CM = \sqrt{\frac{CB^2 + CA^2 - 0,5 AB^2}{2}} = \sqrt{\frac{148 + 40 - 90}{2}} = 7$ ✓

$S_{min} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{21}{\sqrt{13}}$, ~~$TN : NA = 1:1$~~

Ответ: $S_{min} = \frac{21}{\sqrt{13}}$ ✓, ~~$TN : NA = 1:1$~~, $\alpha \cap TA$.

сечение с min S будет проходить через T

3

№ 4

$$\frac{2tg^2 6x + 4\sin 4x \cdot \sin 8x - \cos 8x - \cos 16x + 2}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{3}\cdot \sin x} = 0.$$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0. \\ \sqrt{\cos x} \neq \sqrt{3}\,\sin x \\ 2tg^2 6x + 4\sin 4x \cdot \sin 8x - \cos 8x - \cos 16x + 2 = 0 \end{cases}$$

$\varnothing$

№ 7 (продолж).

$$CD = 3\sqrt{\frac{90-32}{2}} = 3\sqrt{29}$$

$$\begin{cases} x(3\sqrt{29}+y) = 81 \\ y(3\sqrt{29}-x) = 144 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{81}{3\sqrt{29}+y}. \\ y\left(3\sqrt{29} - \frac{81}{3\sqrt{29}+y}\right) = 144 \end{cases}$$

$$y(9\cdot 29 - 9\cdot 9 + 3\sqrt{29}\,y) = 144(3\sqrt{29}+y).$$

$$180y + 3\sqrt{29}\,y^2 = 144\cdot 3\sqrt{29} + 144y.$$

$$3\sqrt{29}\,y^2 + 36y - 144\cdot 3\sqrt{29} = 0.$$

$$x_1 x_2 = -144$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{12}{\sqrt{29}}$$

$$y = \frac{-18 + 18\sqrt{117}}{3\sqrt{29}}$$

$$y = \frac{6\sqrt{117} - 6}{\sqrt{29}}$$

Ответ: $PD = \frac{6\sqrt{117} - 6}{\sqrt{29}}$ ✓ 12