x 1
[illegible]

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 217128
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Чеканов Кирилл Юрьевич

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Тамбов, МАОУ „Лицей №14 им. А.М. Кузьмина" класс 11

Регистрационный номер ЦМ 6097

Вариант задания 24

Дата проведения "17" февраля 20 17 г.

Подпись участника [illegible]

семьдесят девять

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
8	8	8	10	5	10	9	12	9	—	
										79

Шифр 217128

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 24

№1.

~~Пусть x – объем который тратит автомобиль на 1 км~~

Пусть x – расстояние, которое проходит. авт. ~~за~~ 1 используя 1 л.

	S/V	S	V
I	x	120	$\frac{120}{x}$
II	x+3	120	$\frac{120}{x+3}$

$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+3} = 2$

$\frac{\cancel{120x} + 360 - \cancel{120x}}{x^2+3x} = 2$

$2x^2 + 6x - 360 = 0$

$D_1 = 9 + 720 = (27)^2$

$x_1 = \frac{-3+27}{2} = 12$

x_2 – не подх.

8

Ответ: 12 км; 15 км.

№2.

$1 + \log_x(6-5x) < 0$

ОДЗ: $\begin{cases} x < \frac{6}{5} \\ x \in (0;1) \cup (1;+\infty) \end{cases}$ $x \in (0;1) \cup (1;1,2)$

$\log_x x + \log_x(6-5x) < 0$

$\log_x(6x-5x^2) < \log_x 1$

1) $x \in (0;1)$

$6x - 5x^2 > 1$

$5x^2 - 6x + 1 < 0$

$D_1 = 9 - 5 = 4$

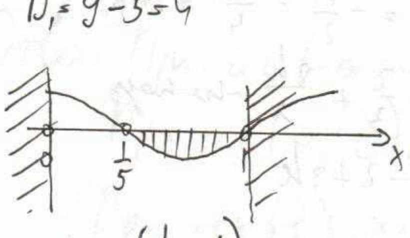
$x = \frac{3+2}{5} = 1$

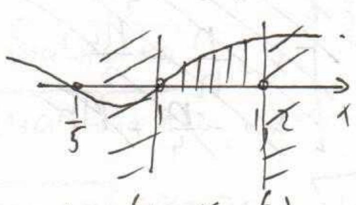
$x = \frac{1}{5}$

2) $x \in (1; 1,2)$

$6x - 5x^2 < 1$

$5x^2 - 6x + 1 > 0$





$x \in \left(\frac{1}{5}; 1\right)$

$x \in \left(1; \frac{6}{5}\right)$

8

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{5}; 1\right) \cup \left(1; \frac{6}{5}\right)$

№3. Составим систему из условия

$$\begin{cases} b_1\cdot 32 + b_1\cdot q^2\cdot 12 + b_1\cdot q^3\cdot 4 + b_1\cdot q^4\cdot 3 = 0 \\ b_1\cdot q = 16 \end{cases}$$

$b_1(3q^4+4q^3-12q^2+32)=0$; но из (2) $b_1 \neq 0$

$\Downarrow$

$3q^4+4q^3-12q^2+32=0$

Используем схему Горнера

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 4 & -12 & 0 & 32 \\ -2 & 3 & -2 & -8 & 16 & 0 \end{array}$$

$(q+2)(3q^3-2q^2-8q+16)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -2 & -8 & 16 \\ -2 & 3 & -8 & 8 & 0 \end{array}$$

$(q+2)^2(3q^2-8q+8)=0$

$D_1 = 16-24<0$

$q=-2$ единственный

$b_1=-8$

8

Ответ: $b_1=-8$; $q=-2$ (b_1 - первый член, q - знаменатель)

№4. $2\cos16x + 4\cos4x\sin2x = 4+\cos8x-\cos4x$

$2\cos16x = 4+2\cos^2 4x-1+2\sin^2 2x-1-4\cos4x\cdot\sin2x$

$2\cos16x = 2+2\cos^2 4x-2\cos4x\cdot\sin2x+2\sin^2 2x$

$\cos16x = 1+(\cos4x-\sin2x)^2$

$$\begin{cases} 1+(\cos4x-\sin2x)^2 \geq 1 \\ \cos16x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos16x = 1 \\ \cos4x = \sin2x \end{cases}$$

$\cos16x=1$

$16x = 2\pi n, n\in Z$

$x = \frac{\pi n}{8}; n\in Z$

$\cos4x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

$$\left[\begin{array}{l} \cancel{4x = \frac{\pi}{2}-2x+2\pi n} \\ \cancel{4x = -\frac{\pi}{2}+2x+2\pi n} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cancel{x = \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}} \\ \cancel{x = -\frac{\pi}{4}+\pi n} \end{array}\right.$$

Подставим x

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi m}{4}+2\pi k \\ \frac{\pi n}{2} = -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi n}{4}+2\pi k \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} nk = \frac{2}{3}+\frac{8k}{3} \text{ - не подх} \\ n = -2+8k \end{array}\right. \\ n \text{ - целое} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4}+\pi k \\ x = \frac{3\pi}{4}+\frac{\pi k}{3} \text{ - не подх} \end{array}\right.$$

10

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4}+\pi k; k\in Z$.

№5. $\dfrac{(\sqrt{x-4}-1)(4-x-\sqrt{x^2-21x+110})}{(\log_2(x-1)-1)\cdot(\log_3(12-x)-1)} \geq 0$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 4 \\ x^2-21x+110 \geq 0 \\ x < 12 \\ x \neq 3 \\ x \neq 9 \end{cases}$

$x^2-21x+110 \geq 0$
$D = 441-440 = 1$
$x = \frac{21+1}{2} = 11$
$x = 10$

$x \in [4; 9) \cup (9; 10] \cup [11; 12)$

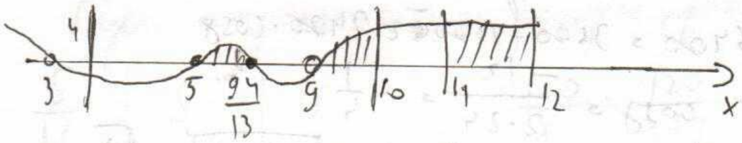
Введем $f(x) =$
$= \dfrac{(\sqrt{x-4}-1)(4-x-\sqrt{x^2-21x+110})}{(\log_2(x-1)-1)(\log_3(12-x)-1)} \geq 0$

1) $x = 5$ 2) $\cancel{x^2}-21x+110 = 16-8x+\cancel{x^2}$
$13x = 94$
$x = \frac{94}{13}$ посп. $\approx 7,..$

$f(10) > 0$

3) $x \neq 3$ 4) $x \neq 9$

5

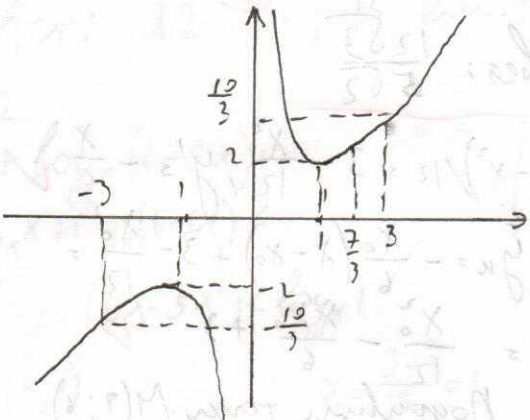


Ответ: $x \in [5; \frac{94}{13}] \cup (9; 10] \cup [11; 12)$

№6. $f(x) = 1/g(g(g(x)+1)-1)$; $g(x) = x+\frac{1}{x}$; $g'(x) = 1-\frac{1}{x^2} = 0$

+ −1 − 1 +

$f(-1) = -2$; $f(1) = 2$



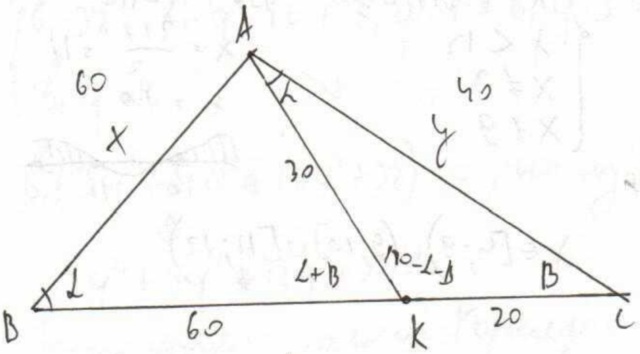
$g(x) \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$
$g(x)+1 \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$
$g(g(x)+1) \in (-\infty; -2] \cup [\frac{10}{3}; +\infty)$
$g(g(x)+1)-1 \in (-\infty; -3] \cup [\frac{7}{3}; +\infty)$
$g(g(g(x)+1)-1) \in (-\infty; -\frac{10}{3}] \cup [\frac{58}{21}; +\infty)$
$1/g(g(g(x)+1)-1) \in [-0,3; 0) \cup (0; \frac{21}{58}]$

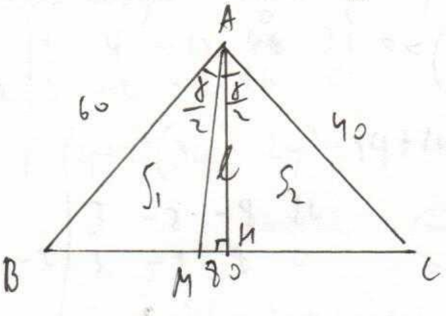
Ответ: $E(f)$: $f(x) \in [-0,3; 0) \cup (0; \frac{21}{58}]$

10

№7.

№7.





Дано: $\angle + B = \angle AKB$; $AK=30$; $BK=60$; $KC=20$ Найти l (биссект. из A)

~~из △BAK ∠BAK = 180~~

из $\triangle CAK$ $\angle CAK =$

$= 180 - 180 + \angle + B - B = \angle$

$\triangle AKC \sim \triangle ABC$ (по 2 углам)

$\begin{cases} \frac{y}{20} = \frac{80}{y} \\ \frac{x}{30} = \frac{80}{y} \end{cases}$ $y^2 = 1600$ ~~$y = 4\sqrt{10}$~~ ~~$x = \frac{2400}{4\sqrt{10}} = \frac{600}{\sqrt{10}} = 60\sqrt{}$~~

$\begin{cases} y = 40 \\ x = 60 \end{cases}$ ✓

по т. косинусов.

$6400 = 3600 + 1600 - 2 \cdot 2400 \cdot \cos\gamma$

$\cos\gamma = \frac{-12}{2 \cdot 24} = -\frac{1}{4}$

$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\cos\gamma + 1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$

$S = S_1 + S_2$

по т. синусов

$\frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 40 \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot l \cdot \sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot l \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$

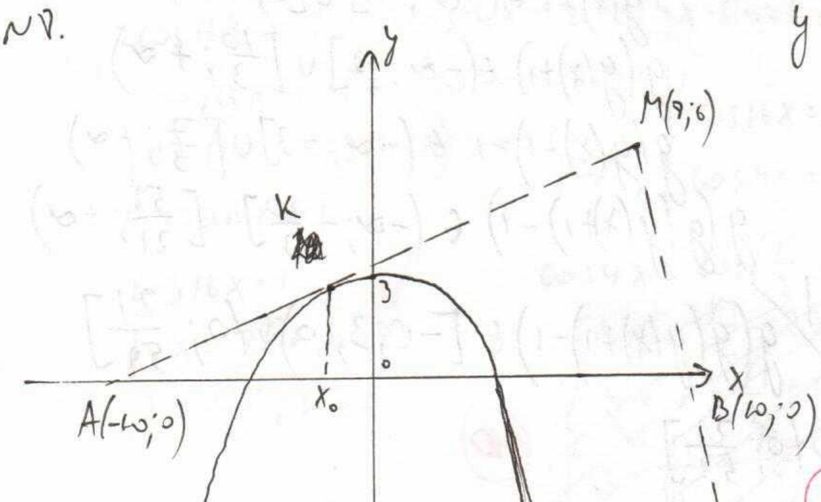
$\cancel{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot 60 \cdot 40 \cdot \cancel{\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot 60 \cdot l \cdot \cancel{\sin\frac{\gamma}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} \cdot 40\, l \cdot \cancel{\sin\frac{\gamma}{2}}$

$48 \cdot \cos\frac{\gamma}{2} = l(6+4)$ ·10

$l = \frac{48}{10} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{48}{10} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$ Ответ: $\frac{12\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$

9

№8.



(~~кривые~~ касательные длинноваты)

$y = (36 - x^2)/12 = 3 - \frac{x^2}{12}$; $y' = -\frac{x}{6}$ ✓

$y_к = -\frac{x_0}{6}(x - x_0) + 3 - \frac{x_0^2}{12} =$

$= \frac{x_0^2}{12} - \frac{x x_0}{6} + 3$ ✓

Подставим точку M(8; 6)

$6 = \frac{x_0^2}{12} - \frac{8}{6}x_0 + 3 \,|\cdot 12$

$x_0^2 - 16x_0 - 36 = 0$

$D_1 = 64 + 36 = 100$

$\left[\begin{array}{l} x_0 = 8 + 10 = 18 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$

$K(-2; \frac{8}{3})$ $L(18; -24)$

12

для 1-ой прямой:

$\frac{y - 6}{\frac{8}{3} - 6} = \frac{x - 8}{-2 - 8}$ $-10y + 60 = -\frac{10}{3}x + \frac{80}{3}$

$y = 0$

$\frac{10}{3}x = -\frac{100}{3}$ ~~$\frac{7}{3}x = -\frac{124}{3}$~~

$\underline{x = -10}$ ~~$x = -\frac{124}{7}$~~

для 2-ой прямой; $y = 0$

$\frac{x - 8}{18 - 8} = \frac{0 - 6}{-24 - 6}$

$\frac{x-8}{10} = \frac{1}{5}$

$x - 8 = 2$

$\underline{x = 10}$

$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 20 = 60$ ✓

Ответ: 60 ✓

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 217128

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 24

№9 $16a(x-4) = (x+|x|)^2$

1) $x<0$

$16a(x-4) = -48$

$a(x-4) = -3$

$x = 4 - \frac{3}{a}$

$4 - \frac{3}{a} < 0$

$a \in (0; \frac{3}{4})$

x_3 существ. при $a \in (0; \frac{3}{4})$

2) $x \geq 0$

$16ax - 64a + 48 = 4x^2$

$4x^2 - 16ax + 64a - 48 = 0$

$x^2 - 4ax + 16a - 12 = 0$

$D_1 = 4a^2 - 16a + 12$

$x_1 = 2a + \sqrt{4a^2-16a+12}$

$x_2 = 2a - \sqrt{4a^2-16a+12}$

1) $2a + \sqrt{4a^2-16a+12} \geq 0$ ✓

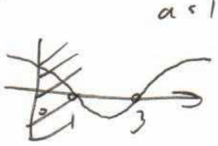
$\sqrt{4a^2-16a+12} \geq -2a$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \leq 0 \\ 4a^2-16a+12 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ 4a^2-16a+12 \geq 4a^2 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a \leq 0 \\ a \in (0; \frac{3}{4}] \end{array}\right.$

$a^2 - 4a + 3 \geq 0$ $a=3$ $a=1$

$D_1 = 1$



$16a \leq 12$

$a \leq \frac{3}{4}$ ✓

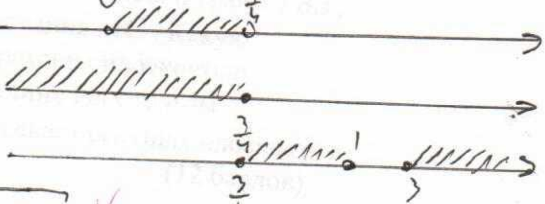
$a \in [-\infty; \frac{3}{4}]$ – x_1 сущ.

2) $\sqrt{4a^2-16a+12} \leq 2a$

$\begin{cases} 4a^2-16a+12 \geq 0 \\ a \geq 0 \\ 4a^2-16a+12 \leq 4a^2 \end{cases}$

$\begin{cases} a \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty) \\ a \geq 0 \\ a \geq \frac{3}{4} \end{cases}$ ✓

$a \in [\frac{3}{4}; 1] \cup [3; +\infty)$ – x_2 сущ.



Ответ: При $a \in (-\infty; 0]$ $x = 2a + \sqrt{4a^2-16a+12}$ ✓

При $a \in (0; \frac{3}{4})$ $x = 2a + \sqrt{4a^2-16a+12}$; $x = 4 - \frac{3}{a}$ ✓

При $a \in \{\frac{3}{4}\}$ $x = 2a + \sqrt{4a^2-16a+12}$, $x = 2a - \sqrt{4a^2-16a+12}$ ✓

При $a \in (\frac{3}{4}; 1] \cup [3; +\infty)$ $x = 2a \pm \sqrt{4a^2-16a+12}$

При $a \in (1; 3)$ $x - \varnothing$

9