Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+12

212513

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету Математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Ипин Валентин Вячеславович

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Москва, ГБОУ „лицей 1580", 11 класс

Регистрационный номер ШМ 4868

Вариант задания 28

Дата проведения "12" марта 2017 г.

Подпись участника ______________

семьдесят один

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
7	8	8	4	6	2	—	12	12	12	71

212513

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 28

1. Дано:

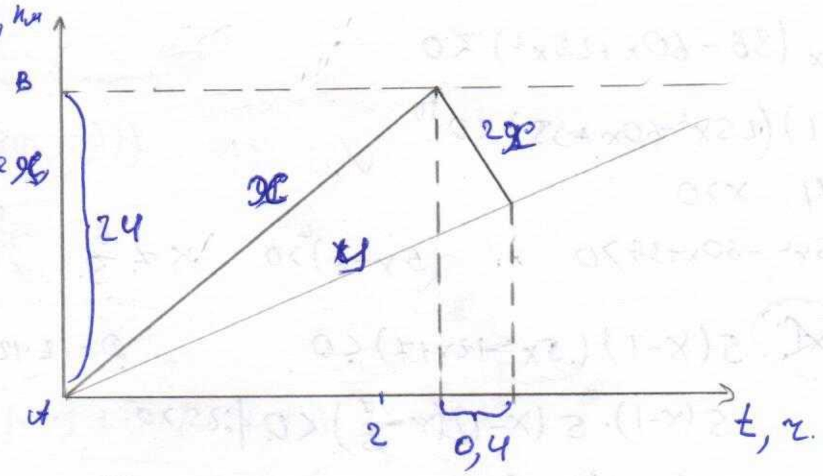
$AB = 24$ км;

Пусть скорость велосипедиста x,

скорость пешехода y;

24 мин $= 0,4$ ч.

$\max y = ?$



По условию:

$$\begin{cases} \frac{24}{x} \geq 2; \Rightarrow \cancel{y \leq 12}. \; x \leq 12 \\ y \cdot \left(\frac{24}{x} + 0,4\right) = 24 - \cancel{0,8x} \; 0,4 \cdot 2x \quad (1) \end{cases}$$

(1) $y\left(\frac{24}{x} + 0,4\right) = 24 - 0,8x \;\Big|\; : \left(\frac{24}{x} + 0,4\right) \neq 0$, т.к. $x > 0$.

$$y = \frac{(24 - 0,8x) \cdot x}{24 + 0,4x} = \frac{(60 - 2x)x}{60 + x} = \frac{-2x^2 + 60x}{60 + x} =$$

$$\begin{array}{r|l} -2x^2 + 60x & x + 60 \\ -\;2x^2 - 120x & \overline{-2x + 180} \\ \hline 180x & \\ 180x + 180 \cdot 60 & \\ \hline -180 \cdot 60 & \end{array}$$

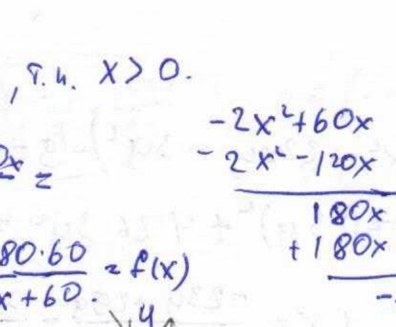
$$= -2x + 180 - \frac{180 \cdot 60}{x + 60} = f(x)$$

$y = -2x + 180$ – наклонная ас-та

$x = -60$ – верт. ас-та.

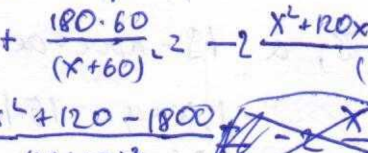
$$y' = -2 + \frac{180 \cdot 60}{(x+60)^2} = -2\,\frac{x^2 + 120x + 3600 - \overset{180 \cdot 20}{180 \cdot 30}}{(x+60)^2} =$$

$$= -2\,\frac{x^2 + 120 - 1800}{(x+60)^2} \; \cancel{\neq 0} \; \cancel{-2x}$$



$D = 120 \cdot 120 + 4 \cdot 1800 = 100 \cdot 4 \cdot 9(4+2) = 100 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 6.$

$x = -60 \pm 30\sqrt{6}.$



$2 < \sqrt{6} < 3$

$60 < 30\sqrt{6} < 90$

$0 < 30\sqrt{6} - 60 < 30$

$30\sqrt{6} - 60 > 0.$

$30\sqrt{6}-60 \vee 12$

$30\sqrt{6} \vee 72$

$900 \cdot 6 \vee 72^2$

$5400 \vee 5184$

$\Downarrow$

$30\sqrt{6}-60 > 12 \Rightarrow \max y = f(12)$

$y_{max} = \frac{12(60-24)}{60+12} = \frac{12 \cdot 36}{72} = 6.$

Ответ: 6. Скорость вело.-?! (7)

2. $\log_x (36-60x+25x^2) < 0$

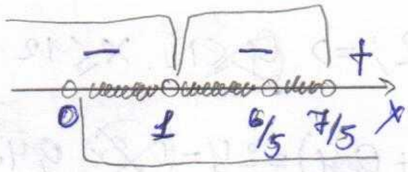
$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(25x^2-60x+35) < 0 \ ^{(1)} \\ x \neq 1;\ x>0 \\ 25x^2-60x+36>0 \end{cases} \quad (5x-6)^2>0 \quad x \neq \frac{6}{5}.$

(1) $\cancel{(x-1)}$ $5(x-1)(5x^2-12x+7)<0$ $\quad D=12\cdot12-4\cdot5\cdot7=4(36-35)=4$

$5(x-1)\cdot5(x-1)(x-\frac{7}{5})<0 \ |:25>0$ $\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{12-2}{10}=1 \\ x=\frac{12+2}{10}=\frac{7}{5}. \end{array}\right.$

$(x-1)^2(x-\frac{7}{5})<0.$

$\begin{cases} (x-1)^2(x-\frac{7}{5})<0; \\ x>0,\ x\neq1; \\ x\neq\frac{6}{5}; \end{cases}$



(8)

Ответ: $(0;1)\cup(1;6/5)\cup(6/5;7/5).$

3. $(26x^2+23xy-3y^2)-19=0.$

$D=(23y)^2+4\cdot26\cdot3y^2=529y^2+312y^2=841y^2=(29y)^2.$

$\begin{cases} x=\frac{-23y+29y}{2\cdot26}=\frac{3}{26}y \\ x=\frac{-23y-29y}{2\cdot26}=-y. \end{cases}$

$26(x+y)(x-\frac{3}{26}y)=19.$, т.к. $x,y\in\mathbb{Z}$, а 19 - простое число т...

$\begin{cases} x+y=1 \ |\cdot3 \\ 26x-\frac{3}{26}y=19 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x+y=19 \ |\cdot3 \\ 26x-\frac{3}{26}y=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x+y=-1 \ |\cdot3 \\ 26x-3y=19 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x+y=-19 \ |\cdot3 \\ 26x-3y=-1. \end{cases}$

$29x=23\notin\mathbb{Z}.$ $\quad 29x=58$ $\quad 29x=-23\notin\mathbb{Z}.$ $\quad 29x=-58$

$x=2;\ y=17$ $\quad x=-2;\ y=-17.$

не возр. убыв. прогрессия

$\begin{cases} a_1+5d=-2 \ |\cdot(-1) \\ a_1+10d=-17 \end{cases}$

$5d=-15;\quad d=-3.$

Ответ: -3. ⑧

4. $$\frac{2\operatorname{tg}^4 6x + 4\sin 4x \sin 8x - \cos 8x - \cos 16x + 2}{\sqrt{\cos x - \sqrt{3}\sin x}} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sqrt{3}\sin x > 0 \ ^{**} \\ 2\operatorname{tg}^4 6x + 4\sin 4x \sin 8x - \cos 8x - \cos 16x + 2 = 0. \ ^{*} \end{cases}$$ ✓

* $$2\operatorname{tg}^4 6x + 8\sin^2 4x \cos 4x - \cos^2 4x + \sin^2 4x - \cos^2 8x + \sin^2 8x + \overset{1+1}{2} = 0.$$

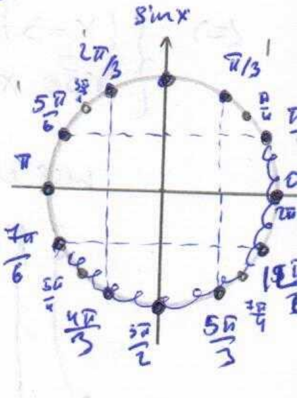
$$2\operatorname{tg}^4 6x + 2\sin^2 4x(4\cos 4x + 1) + 2\sin^2 8x = 0.$$

$$\operatorname{tg}^4 6x + \sin^2 4x(4\cos 4x + 1) + 4\cos^2 4x \sin^2 4x = 0.$$

$$\underbrace{\operatorname{tg}^4 6x}_{\geq 0} + \underbrace{\sin^2 4x(2\cos 4x + 1)^2}_{\geq 0} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^4 6x = 0 \\ \sin^2 4x(2\cos 4x + 1)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} 6x = 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0, \\ \cos 4x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \end{cases}$$ ✓

$$\begin{cases} 6x = \pi k, \\ \left[\begin{array}{l} 4x = \pi l, \\ 4x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi k}{6}, \ \bullet 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi l}{4}, \ \bullet 2 \\ x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; \end{array}\right. \end{cases}$$



** $$\cos x - \sqrt{3}\sin x > 0$$

$$2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) > 0.$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi m < x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} + 2\pi m.$$

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi m.$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi k}{6}; \\ x \in \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m; \frac{\pi}{6} + 2\pi m\right); \end{cases}$$ ✓ с учетом $\cos x - \sqrt{3}\sin x > 0$

$x = 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

Ответ: $\left\{ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi m; \frac{11\pi}{6} + 2\pi l; 2\pi + 2\pi h \right.$

$k, l, n, m, h \in \mathbb{Z}$.

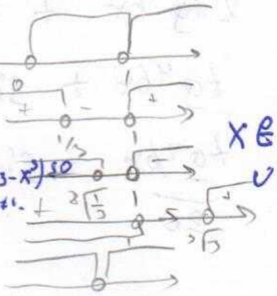
④

5. ~~$5\cdot 2\log^{-20}$~~

$$\frac{\left(5\cdot 2^{-\log_x 3}-2{,}5\right)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}}{1+\sqrt{\log_x 3+8}} > \frac{\left(2^{-\log_x 3}-0{,}5\right)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}}{\sqrt{\log_x 3+8}-3}$$

$$\left(2^{-\log_x 3}-2^{-1}\right)\cdot\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}\cdot\frac{4\left(\sqrt{\log_x 3+8}-4\right)}{\left(\sqrt{\log_x 3+8}+1\right)\left(\sqrt{\log_x 3+8}-3\right)} > 0. \quad \Leftrightarrow$$

$f(x)$



$$D_f:\ \begin{cases} x>0;\ x\neq 1; \\ \log_x 3+1\geq 0 \\ 2-\sqrt{\log_x 3+1}\geq 0 \\ \log_x 3+8\geq 0 \\ \sqrt{\log_x 3+8}\neq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x>0,\ x\neq 1 \\ \log_x 3x\geq 0 \quad (x-1)(3x-1)\geq 0. \\ \sqrt{\log_x 3+1}\leq 2 \quad \log_x 3-3\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(3-x^3)\leq 0 \\ x>0, x\neq 1.\end{cases} \\ (x-1)(3x^8-1)\geq 0 \\ \log_x 3-1\neq 0 \quad x\neq 3. \end{cases}$$

$x \in (0;$ ... $\cup\ [$ ...

$$\Leftrightarrow \left(-\log_x 3-(-1)\right)(2-1)\cdot\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}\cdot\frac{\sqrt{\log_x 3+8}-4}{\sqrt{\log_x 3+8}-3} > 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-1)\cdot\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{\log_x 3+8}-4}{\sqrt{\log_x 3+8}-3} > 0. \\ x>0,\ x\neq 1. \end{cases}$$

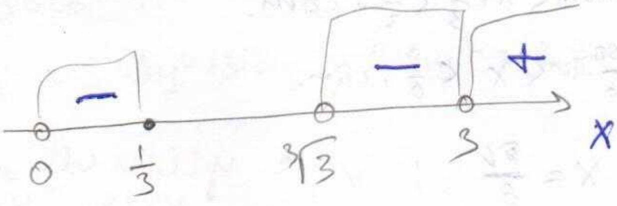
нули:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \\ 2-\sqrt{\log_x 3+1}=0;\ x=\sqrt[3]{3} \\ \log_x 3+8=16;\ \log_x 3-8=0 \quad x^8=3;\ x=\sqrt[8]{3} \end{array}\right. \\ x\in D_f \end{cases} \quad \Leftrightarrow \left[\, x=\sqrt[3]{3}. \right.$$

$$\begin{cases} \log_x 3\geq -1 \\ \log_x 3<3 \\ \log_x 3\neq 1 \end{cases}$$

$f(9)=\oplus\cdot\frac{\oplus}{\ominus}$ ...

$f(\frac{1}{9})=\ominus\ominus\oplus$ ...



Ответ: $(3;+\infty)$.

6

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

212513

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 28.

6. $f = \dfrac{1}{g\left(\frac{64}{5}g(16g(\log_2 x))\right)}$

$g(x) = \sqrt[5]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$.

~~$a = \sqrt[5]{x}$; $a \in \mathbb{R}$~~

~~$b = a + \frac{1}{a}$; $b \in (-\infty; 2] \cup [2; +\infty)$~~ ✓

$a = \log_2 x$; $a \in \mathbb{R}$.

$b = \sqrt[5]{a}$; $b \in \mathbb{R}$.

$c = b + \frac{1}{b}$; $c \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

$d = 16c$; $d \in (-\infty; -32] \cup [32; +\infty)$ ✓

$e = \frac{64}{5}\left(d + \frac{1}{d}\right)$; ~~$e \in \left[\frac{64}{5}\cdot\left(-\frac{1025}{32}\right); \frac{64}{5}\cdot\frac{1025}{32}\right]$~~ ; $e \in (-\infty; -410] \cup [410; +\infty)$.

$m = \frac{1}{e} + e$; $m \in \left(-\infty; -\frac{168101}{410}\right] \cup \left[\frac{168101}{410}; +\infty\right)$

$f = \frac{1}{m}$; $f \in \left[-\frac{410}{168101}; 0\right) \cup \left(0; \frac{410}{168101}\right]$

~~**Ответ**: $\left[-\frac{410}{168101}; 0\right) \cup \left(0; \frac{410}{168101}\right]$.~~

$[-2/5; 0) \cup (0; 2/5]$

2

8.

$M(1; y_0)$

$f(x) = \frac{x^2}{4}$.

$tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = 1;$

$f'(x) = \frac{x}{2}$.

$$\begin{cases} y_0 = \frac{x_1}{2}(1-x_1) + \frac{x_1^2}{4} & (1) \\ y_0 = \frac{x_2}{2}(1-x_2) + \frac{x_2^2}{4} & (2) \\ 1 = \frac{\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}}{1 + \frac{x_1 x_2}{4}} \end{cases}$$

(1)-(2): $0 = \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^2}{4} - \frac{x_1^2}{4} \,|\cdot 4.$

$(x_2 - x_1)(x_1 + x_2) = (x_2 - x_1)\cdot 2 \,|:(x_2 - x_1) \neq 0.$

$x_1 + x_2 = 2.$

$x_2 = 2 - x_1.$

$4 x_1 x_2 = 2(x_1 - x_2)$

$4 + 2x_1 - x_1^2 = 4x_1 - 4.$

$x_1^2 + 2x_1 - 8 = 0.$

$x_1 = -4$ $\quad$ $x_1 = 2.$

$x_2 = 2$ $\quad$ $x_2 = 0.$

$y_0 = -6$ $\quad$ $y_0 = 0.$

Ответ: $(1; -6)$ или $(1; 0)$. 12

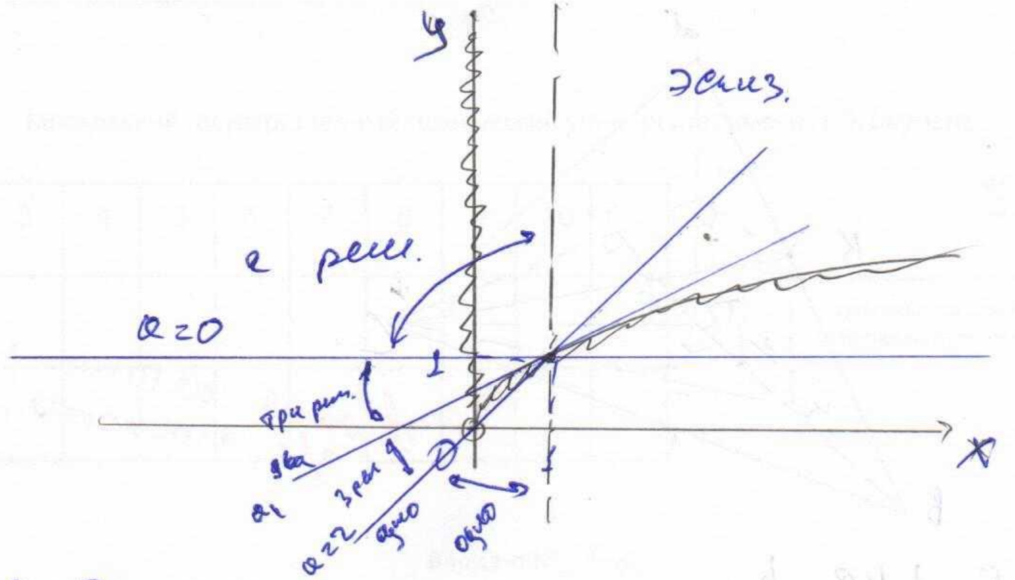
9. $\begin{cases} 2y - 2 = a(x-1) \\ \frac{2x}{|y| + y} = \sqrt{x} \end{cases}$

$y > 0$, т.к. при $y < 0$ деление на 0.

$\frac{x}{y} = \sqrt{x} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y > 0 \\ \sqrt{x} = 0. \end{cases} \\ y = \sqrt{x}. \end{array}\right.$

$2y - 2 = a(x-1)$

$y = \frac{a}{2}(x-1) + 1.$ - вращ. сем-во прямых вокруг т. с коорд. $(1; 1)$.



для $\forall a$ $\exists$ хотебы одно решение

касание $\begin{cases} \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2} x_0^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{a_1}{2}(x_0-1)+1 = \sqrt{x_0} \end{cases}$; $x_0 = 1$; $a_1 = 1$.

при $a \in (-\infty; 0)$ 2 реш: $(1;1)$; $(0; (-\frac{a}{2}+1))$.

при $a=0$ два реш: $(1;1)$; $(0,1)$.

при $a \in (0;1)$ три реш. $(1;1)$; $(0; (1-\frac{a}{2}))$; $(\frac{1+\sqrt{1-2a(1}}{a}$

при $a=1$ два реш. $(1;1)$; $(0; 0{,}5)$

при $a \in (1;2)$ три реш. $(1;1)$; $(0; 1-\frac{a}{2})$; $(\frac{1-\sqrt{1-2a(1}}{a}$

при $a=2$ одно $(1;1)$

при $a \in (2;+\infty)$ одно $(1;1)$

12

смотри на ~~сл. страницу~~

$y = \frac{a}{2}(x-1)+1$

$y = \sqrt{x}$.

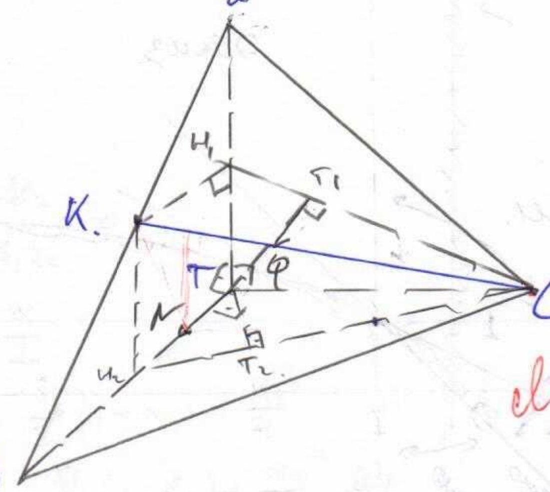
$\frac{a}{2}(x-1)+1 = \sqrt{x}$

$t = \sqrt{x}$, $t > 0$.

$\frac{a}{2}t^2 - \frac{a}{2} + 1 - t = 0$.

$D = 1 - 4 \cdot \frac{a}{2}(1-\frac{a}{2})$ $\quad \sqrt{x} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2a(1-\frac{a}{2})}}{a}$

10.



$S = \frac{1}{2} KC \cdot h.$

1) $\cancel{KC}\ \alpha \cap BT$ ✓

$S = \frac{1}{2} \cdot KC \cdot \rho(BT, KC)$

$KH_1 \parallel BT.$

$KCH_1 \parallel TB$

$\rho_{BT,KC} = \rho\ BT, KCH_1 = \rho\ T, KCH_1$

$TT_1 \perp H_1C;$

$KH_1 \perp TT_1\ (KH \perp ATC)$ $\Big| \Rightarrow TT_1 \perp CH_1$

$CH_1 = \sqrt{13}$

$TT_1 = \frac{6}{\sqrt{13}}.$

2) $\alpha \cap KT.$ ✓

$S = \frac{1}{2} KC \cdot \rho(\cancel{B}T, KC).$

аналогично

$TT_2\ \ CH_2$

$CH_2 = 2\sqrt{10}$

$TT_2 = \frac{6}{\sqrt{10}}.$

$TT_1 < TT_2.$

$KC = \sqrt{13+40} = 7.$

$S_{min} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{21}{\sqrt{13}}.$

пар. пер. $TT_1 \to NQ.$

$NT = T_1Q.$ NQ — общий $\perp$.

$H_1T_1 : T_1C = 9 : \cancel{4}.$

$T_1Q = \frac{4}{13} KH_1 = \frac{2}{13} BT.$; $NT = \frac{2}{13} BT.$

Ответ: $S = \frac{21}{\sqrt{13}}$ ✓; $\alpha \cap BT$; $BN : NT = 11 : 2.$ ✓