

**Второй (заключительный этап) академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету
«Математика», весна 2016 г.**

Вариант № 15

1. Друзья Вася, Петя и Коля живут в одном доме. Однажды Вася и Петя пешком отправились на рыбалку на озеро. Коля остался дома, пообещав приятелям встретить их на велосипеде на обратной дороге. Первым домой отправился Вася, одновременно с ним навстречу на велосипеде выехал Коля. Петя с той же скоростью, что и Вася, отправился с озера домой в момент встречи Коли и Васи. Коля, встретив Васю, сразу же развернулся и довез его домой, а затем тотчас же снова на велосипеде двинулся по дороге к озеру. Встретив Петю, Коля вновь развернулся и довез приятеля до дома. В результате, время, затраченное Петей на дорогу с озера домой, составило $\frac{5}{4}$ от времени, затраченного Васей на тот же путь. Во сколько раз медленнее Вася добрался бы до дома, если бы весь путь он прошел бы пешком? (8 баллов)

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2-5}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} < \frac{5}{6}$. (8 баллов)

3. Все члены бесконечной геометрической прогрессии являются натуральными числами. Сумма третьего, пятого и седьмого членов этой прогрессии равна $819 \cdot 6^{2016}$. Найдите знаменатель прогрессии. (8 баллов)

4. Решите неравенство $(\log_x^2(7x-6) - 4)(\cos \pi x - 1) \leq 0$. (8 баллов)

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 4 \cos^2 2x \cdot \sin^2 \frac{x}{3} + 4 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^2 2x \cdot \sin \frac{x}{3} + 1 = 0, \\ \sin \frac{x}{2} + \sqrt{\cos y} = 0. \end{cases}$$
 (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{6 \log_{0,25}^{-1} \left(\frac{\sin x}{\sin x + 15} \right)}. \quad (10 \text{ баллов})$$

7. На диагонали AC ромба $ABCD$ выбрана точка K , удаленная от прямых AB и BC на расстояния 8 и 2 соответственно. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 3. Найдите сторону ромба $ABCD$ и радиус окружности, вписанной в этот ромб. (12 баллов)

8. На оси Ox найдите точку M , через которую проходят две касательные к графику функции $y = 0,5(x - (1/2))^2$, угол между которыми равен 45° . (12 баллов)

9. Определите все значения a , при которых уравнение

$$4x^2 - 16|x| + (2a + |x| - x)^2 = 16$$

имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a . (12 баллов)

10. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота относится к стороне основания, как $\sqrt{2}:\sqrt{3}$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану боковой грани? Найдите отношение объёмов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду в этом случае. (12 баллов)

Решение варианта № 15

1. Друзья Вася, Петя и Коля живут в одном доме. Однажды Вася и Петя пешком отправились на рыбалку на озеро. Коля остался дома, пообещав приятелям встретить их на велосипеде на обратной дороге. Первым домой отправился Вася, одновременно с ним навстречу на велосипеде выехал Коля. Петя с той же скоростью, что и Вася, отправился с озера домой в момент встречи Коли и Васи. Коля, встретив Васю, сразу же развернулся и довез его домой, а затем тотчас же снова на велосипеде двинулся по дороге к озеру. Встретив Петю, Коля вновь развернулся и довез приятеля до дома. В результате, время, затраченное Петей на дорогу с озера домой, составило $\frac{5}{4}$ от времени, затраченного Васей на тот же путь. Во сколько раз медленнее Вася добрался бы до дома, если бы весь путь он прошел бы пешком? (8 баллов)

Решение: Пусть x — скорость Васи и Пети, v — скорость велосипедиста Коли, S — длина пути от дома до озера. Тогда Вася и Коля встретились через время $t = \frac{S}{x+v}$ после начала

движения. После второго выезда Коли из дома встреча Пети и Коли произошла спустя время $t_1 = \frac{S-xt}{x+v}$. От озера до дома Вася был в пути $2t$, а Петя — $t+2t_1$. По условию

$$t+2t_1 = \frac{5t}{2}. \text{ Следовательно, } \frac{2S-2xt}{x+v} = \frac{3S}{2(x+v)} \Rightarrow 4S - \frac{4xS}{x+v} = 3S \Rightarrow \frac{4x}{x+v} = 1 \Rightarrow v = 3x.$$

Необходимо найти отношение $\frac{S}{x}$ к $2t$. Таким образом, искомая величина

$$\frac{S}{2xt} = \frac{x+v}{2x} = \frac{x+3x}{2x} = 2. \text{ Ответ: в 2 раза медленнее.}$$

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2-5}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} < \frac{5}{6}$. (8 баллов)

Решение: ОДЗ: $|x| > \sqrt{5}$. $\frac{\sqrt{x^2-5}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} < \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{-1}{x\sqrt{x^2-5}} < \frac{1}{6}$.

1) При $x > \sqrt{5}$ неравенство верно.

2) При $x < -\sqrt{5}$ приходим к неравенству $-x\sqrt{x^2-5} > 6$, или $(-x\sqrt{x^2-5})^2 > 36$,

$$x^4 - 5x^2 - 36 > 0, (x^2 + 4)(x^2 - 9) > 0, (x+3)(x-3) > 0. \text{ Поскольку } x < -\sqrt{5}, \text{ то}$$

$$x < -3.$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -3) \cup (\sqrt{5}; +\infty).$$

3. Все члены бесконечной геометрической прогрессии являются натуральными числами. Сумма третьего, пятого и седьмого членов этой прогрессии равна $819 \cdot 6^{2016}$. Найдите знаменатель прогрессии. (8 баллов)

Решение: Имеем геометрическую прогрессию $b_1, b_1q, b_1q^2, \dots, b_1q^{n-1}, \dots$, причем $b_1q^{n-1} \in N$ для любого номера $n \in N$. Таким образом, b_1 и q являются натуральными числами. По условию $b_3 + b_5 + b_7 = 819 \cdot 6^{2016}$, или $b_1q^2 + b_1q^4 + b_1q^6 = 2^{2016} \cdot 3^{2018} \cdot 7 \cdot 13$, $b_1q^2(1 + q^2 + q^4) = 2^{2016} \cdot 3^{2018} \cdot 7 \cdot 13$. Натуральное число $1 + q^2 + q^4$ при любом $q \in N$ есть нечетное число, следовательно, $1 + q^2 + q^4 = 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m$, где $k \in \{0, 1, \dots, 2018\}$, $l, m \in \{0, 1\}$.

1) Если $k = 0$, то $1 + q^2 + q^4 = 7^l \cdot 13^m$, $l \in \{0, 1\}$.

а) При $l = 0$ получаем уравнение $q^2 + q^4 = 13^m$, которое не имеет натуральных решений (дискриминант $D = 1 + 4 \cdot 13^m$ равен 5 при $m = 0$, и равен 53 при $m = 1$).

б) При $l = 1$, $m = 0$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 7 = 0$, которое не имеет натуральных решений ($D = 29$).

в) При $l = 1$, $m = 1$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 90 = 0$, $q^2 = 9$, $q = 3$. При этом $b_1 = 6^{2016}$.

2) Если $k = 1$, то $1 + q^2 + q^4 = 3 \cdot 7^l \cdot 13^m$, $l, m \in \{0, 1\}$.

а) При $l = 0$, $m = 0$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 2 = 0$, $q^2 = 1$, $q = 1$. При этом $b_1 = 6^{2016} \cdot 3 \cdot 91$.

б) При $l = 0$, $m = 1$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 38 = 0$, которое не имеет натуральных решений ($D = 153$).

в) При $l = 1$, $m = 0$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 20 = 0$, $q^2 = 4$, $q = 2$. При этом $b_1 = 2^{2014} \cdot 3^{2017} \cdot 13$.

г) При $l = 1$, $m = 1$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 272 = 0$, $q^2 = 16$, $q = 4$. При этом $b_1 = 2^{2012} \cdot 3^{2017}$.

3) Если $k \in \{2, \dots, 2018\}$, $l, m \in \{0, 1\}$, то $1 + q^2 + q^4 = 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m$. Для полученного биквадратного уравнения $q^2 + q^4 + 1 - 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m = 0$ вычислим дискриминант

$D = 1 - 4(1 - 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m) = 3(4 \cdot 3^{k-1} \cdot 7^l \cdot 13^m - 1)$. Поскольку при $k \in \{2, \dots, 2018\}$, $l, m \in \{0, 1\}$, число $4 \cdot 3^{k-1} \cdot 7^l \cdot 13^m$ делится на 3, то $4 \cdot 3^{k-1} \cdot 7^l \cdot 13^m - 1$ не делится на 3, и \sqrt{D} является иррациональным числом. Следовательно, уравнение $q^2 + q^4 + 1 - 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m = 0$ натуральных корней не имеет.

Ответ: задача имеет четыре решения: 1) $q = 1$; 2) $q = 2$; 3) $q = 3$; 4) $q = 4$.

4. Решите неравенство $(\log_x^2(7x-6) - 4)(\cos \pi x - 1) \leq 0$. (8 баллов)

Решение:

$$(\log_x^2(7x-6) - 4)(\cos \pi x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow (\log_x(7x-6) - 2)(\log_x(7x-6) + 2)(\cos \pi x - 1) \leq 0$$

$$\text{ОДЗ: } x \in (6/7, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\begin{cases} \cos \pi x - 1 \leq 0, \\ (\log_x(7x-6) - 2)(\log_x(7x-6) + 2) \geq 0; \\ \cos \pi x - 1 \geq 0, \\ (\log_x(7x-6) - 2)(\log_x(7x-6) + 2) \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ (\log_x(7x-6) - \log_x x^2)(\log_x x^2(7x-6) - \log_x 1) \geq 0; \\ x = 2n, n \in \mathbb{Z}, \\ (\log_x(7x-6) - \log_x x^2)(\log_x x^2(7x-6) - \log_x 1) \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (6/7, 1) \cup (1, +\infty), \\ (x^2 - 7x + 6)(7x^3 - 6x^2 - 1) \leq 0; \\ x = 2n, n \in \mathbb{Z}, \quad x \in (6/7, 1) \cup (1, +\infty), \\ (x^2 - 7x + 6)(7x^3 - 6x^2 - 1) \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (6/7, 1) \cup (1, +\infty), \\ (x-1)^2(x-6)(7x^2+x+1) \leq 0; \\ x = 2n, n \in \mathbb{Z}, \quad x \in (6/7, 1) \cup (1, +\infty), \\ (x-1)^2(x-6)(7x^2+x+1) \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (6/7, 1) \cup (1, 6], \\ x = 2n, n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (6/7, 1) \cup (1, 6] \cup \{x = 2n, n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}\}$.

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 4 \cos^2 2x \cdot \sin^2 \frac{x}{3} + 4 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^2 2x \cdot \sin \frac{x}{3} + 1 = 0, \\ \sin \frac{x}{2} + \sqrt{\cos y} = 0. \end{cases}$$

(10 баллов)

Решение: Решим 1-е уравнение системы:

$$4 \cos^2 2x \cdot \sin^2 \frac{x}{3} + 4 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^2 2x \cdot \sin \frac{x}{3} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4 \cos^2 2x \cdot \sin^2 \frac{x}{3} + 4 \cos^2 2x \cdot \sin \frac{x}{3} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow (2 \cos 2x \sin \frac{x}{3} + \cos 2x)^2 + \sin^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos 2x \left(\sin \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \right) = 0, \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}, \\ \sin 2x = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \right), k \in Z, \\ x = 3 \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right), k \in Z, \\ x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z, \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 6\pi k, k \in Z, \\ x = -\frac{5\pi}{2} + 6\pi k, k \in Z, \\ x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 6\pi k, k \in Z, \\ x = -\frac{5\pi}{2} + 6\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходной системе уравнений, получаем равносильную ей систему

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 6\pi k, k \in Z, \\ x = -\frac{5\pi}{2} + 6\pi k, k \in Z, \\ \sin \frac{x}{2} + \sqrt{\cos y} = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 12\pi m, m \in Z, \\ \cos y = 1/2; \\ x = -\frac{5\pi}{2} + 6\pi(2m+1), m \in Z, \\ \cos y = 1/2. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 12\pi m, m \in Z \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; \\ x = \frac{7\pi}{2} + 12\pi m, m \in Z, \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + 12\pi m, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), \left(\frac{7\pi}{2} + 12\pi m, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), m, n \in Z.$

6. Найдите множество значений функции $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{6 \log_{0,25}^{-1} \left(\frac{\sin x}{\sin x + 15} \right)}$. (10

баллов)

Решение:

Пусть $t = \sin x, t \in [-1; 1] \Rightarrow u = \log_{0,25}(z), z = \frac{t}{t+15} = 1 - \frac{15}{t+15}$ (функция $z(t)$

возрастает). При $t \in [-1; 1]$ имеем $z \in \left[-\frac{1}{14}; \frac{1}{16} \right]$, но по свойствам логарифмов $z > 0$,

следовательно, $z \in \left(0; \frac{1}{16} \right]$. Функция $u = \log_{0,25} z$ убывает, и при $z \in \left(0; \frac{1}{16} \right]$ имеем

$u \in [2; +\infty)$. Далее имеем $u^{-1} \in (0; 0,5]$, $\sqrt{6u^{-1}} \in (0; \sqrt{3}]$, $\operatorname{arctg} \sqrt{6u^{-1}} \in (0; \pi/3]$.

Таким образом, множеством значений функции $y = f(x)$ является промежуток $(0; \pi/3]$.

Ответ: $E(y) = (0; \pi/3]$.

7. На диагонали AC ромба $ABCD$ выбрана точка K , удаленная от прямых AB и BC на расстояния 8 и 2 соответственно. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 3. Найдите сторону ромба $ABCD$ и радиус окружности, вписанной в этот ромб.

Решение:

По условию: $KN = a = 2$ - расстояние от точки K до прямой BC , $KM = b = 8$ - расстояние от точки K до прямой AB , $r = 3$ - радиус вписанной в

треугольник ABC окружности. Пусть O - точка

пересечения диагоналей ромба, E - центр

окружности, вписанной в треугольник ABC .

Обозначим $BO = h$, $OQ = r_1$ - радиус окружности,

вписанной в ромб $ABCD$, $AP = h_1$ - высота

треугольника ABC , проведенная из вершины A к

стороне BC .

$$1) h_1 = a + b = 10;$$

$$2) S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot h, S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h_1, S_{ABC} = pr;$$

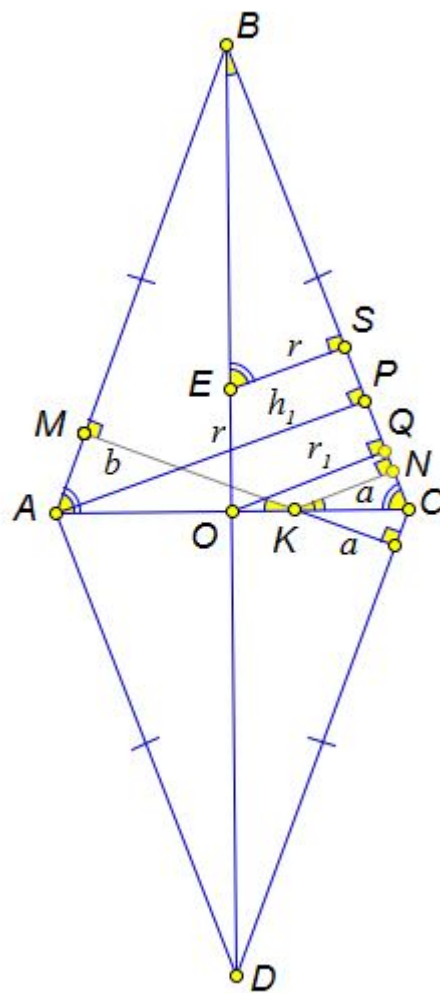
$$3) BC \cdot h_1 = (AC + 2BC) \cdot r \Rightarrow 10BC = 3(AC + 2BC) \Rightarrow 4BC = 3AC;$$

$$4) AC \cdot h = BC \cdot h_1 \Rightarrow AC \cdot h = 0,75AC \cdot h_1 \Rightarrow$$

$$h = 7,5;$$

$$5) BE = h - r = 4,5, \sin(\angle OBC) = \frac{ES}{BE} = \frac{r}{BE} = \frac{3}{4,5} = \frac{2}{3}, \cos(\angle OBC) = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$BC = \frac{h}{\cos(\angle OBC)} = \frac{7,5 \cdot 3}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{2}.$$



б) $r_1 = 0,5h_1 = 5$.

Ответ: $\frac{9\sqrt{5}}{2}, 5$.

8. На оси Oy найдите точку M , через которую проходят две касательные к графику функции $y = 0,5(x - (1/2))^2$, угол между которыми равен 45° . (12 баллов)

Решение:

На оси Oy найдите точку M , через которую проходят две касательные к графику функции $y = 0,5 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, угол между которыми равен 45° .

Решение (без применения производной).

$y = 0,5 \cdot (x - 1/2)^2$, $M(0; y_0)$. Уравнение $0,5 \cdot (x - 1/2)^2 = y_0 + kx$, или

$x^2 - 2\left(k + \frac{1}{2}\right)x - 2y_0 + \frac{1}{4} = 0$, имеет единственное решение, если $\frac{D}{4} = k^2 + k + 2y_0 = 0$.

Найденные из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условиям

$k_1 + k_2 = -1$ (1), $k_1 \cdot k_2 = 2y_0$ (2). Из условия $\alpha_2 - \alpha_1 = 45^\circ$, $\text{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = 1$ следует

$\frac{\text{tg}\alpha_2 - \text{tg}\alpha_1}{1 + \text{tg}\alpha_2 \cdot \text{tg}\alpha_1} = 1$, или $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} = 1$. Отсюда, $k_2 - k_1 = 1 + k_2k_1$, $k_2 - k_1 = 1 + 2y_0$, (3). Решая

систему $\begin{cases} k_2 - k_1 = 1 + 2y_0, \\ k_1 + k_2 = -1, \end{cases}$ находим $\begin{cases} k_2 = y_0, \\ k_1 = -y_0 - 1 \end{cases}$ и $k_1k_2 = -y_0^2 - y_0$. Учитывая (2), получаем

условие $2y_0 = -y_0^2 - y_0$, или $y_0^2 + 3y_0 = 0$. Возможны два решения. 1)

$y_0 = 0$, $M(0; 0)$, $k_1 = -1$, $k_2 = 0$. Уравнения касательных: $y_1 = -x$; $y_2 = 0$.

2) $y_0 = -3$, $M(0; -3)$, $k_1 = 2$, $k_2 = -3$. Уравнения касательных: $y_1 = 2x - 3$; $y_2 = -3x - 3$.

Ответ: $M(0; 0)$ или $M(0; -3)$.

9. Определите все значения a , при которых уравнение $4x^2 - 16|x| + (2a + |x| - x)^2 = 16$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a .

Решение:

I. $x \leq 0$, $x^2 + 4x + (a - x)^2 = 4$; $2x^2 - 2(a - 2)x + a^2 - 4 = 0$;

$D/4 = a^2 - 4a + 4 - 2a^2 + 8 = 12 - 4a - a^2$.

Уравнение имеет два различных неположительных корня $x_{1,2} = (a - 2 \pm \sqrt{12 - 4a - a^2})/2$,

$$\text{если } \begin{cases} 12 - 4a - a^2 > 0, \\ a - 2 < 0, \\ a^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < a < 2, \\ a < 2, \\ a \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -6 < a \leq -2.$$

Уравнение имеет ровно один неположительный корень $x = (a - 2 - \sqrt{12 - 4a - a^2})/2$, если

$$\left[\begin{cases} D = 0, \\ a - 2 \leq 0, \\ a^2 - 4 < 0, \\ a^2 - 4 = 0, \\ a - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = -6, \\ a = 2, \\ a \leq 2, \end{cases} \\ -2 < a < 2, \\ \begin{cases} a = -2, \\ a = 2, \\ a > 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6, \\ -2 < a \leq 2. \end{cases}$$

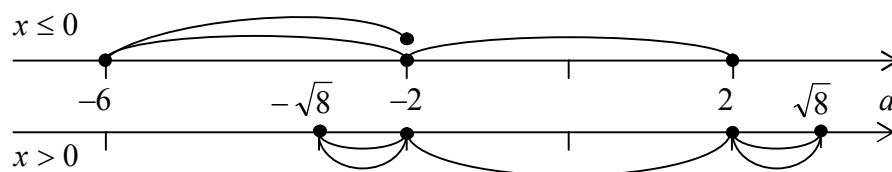
II. $x > 0$, $x^2 - 4x + a^2 - 4 = 0$; $D/4 = 8 - a^2$.

Уравнение имеет два различных положительных корня $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{8 - a^2}$, если

$$\begin{cases} 8 - a^2 > 0, \\ a^2 - 4 > 0, \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{8} < a < -2, \\ 2 < a < \sqrt{8}. \end{cases}$$

Уравнение имеет ровно один положительный корень $x = 2 + \sqrt{8 - a^2}$, если

$$\left[\begin{cases} 8 - a^2 = 0, \\ 2 > 0, \\ a^2 - 4 < 0, \\ a^2 - 4 = 0, \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\sqrt{8}, \\ a = \sqrt{8}, \\ -2 \leq a \leq 2. \end{cases}$$



Ответ: $a \in (-6; -\sqrt{8})$, $x_{1,2} = (a - 2 \pm \sqrt{12 - 4a - a^2})/2$;

$a \in (-2; 2]$, $x_1 = (a - 2 - \sqrt{12 - 4a - a^2})/2$, $x_2 = 2 + \sqrt{8 - a^2}$;

$a \in (2; \sqrt{8})$, $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{8 - a^2}$.

10. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота равна $4R/3$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану основания? Найдите отношение объёмов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду в этом случае. (12 баллов)

Решение:

Так как $TK = 4R/3$, $OK = R/3$, $BK = \sqrt{1 - (1/3)^2} R = \sqrt{8}R/3$; $AB = AK\sqrt{3} = \sqrt{8/3}R$,
 $AT = \sqrt{(4R/3)^2 + (\sqrt{8}R/3)^2} = \sqrt{8/3}R$. Следовательно, $AB = AT$, все ребра пирамиды равны.

Будем считать, что секущая плоскость проходит через медиану TG и пересекает ребро BC в точке M . Проведем $GF \parallel BC, F \in AD$, затем $DE \perp TF, E \in TF$,

$EP \parallel BC, P \in TG$, и $PM \parallel DE, M \in BC$. PM – общий перпендикуляр к BC и TG .

Обозначим $a = AB = AT$. Тогда $FK = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$, $TK = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} a$,

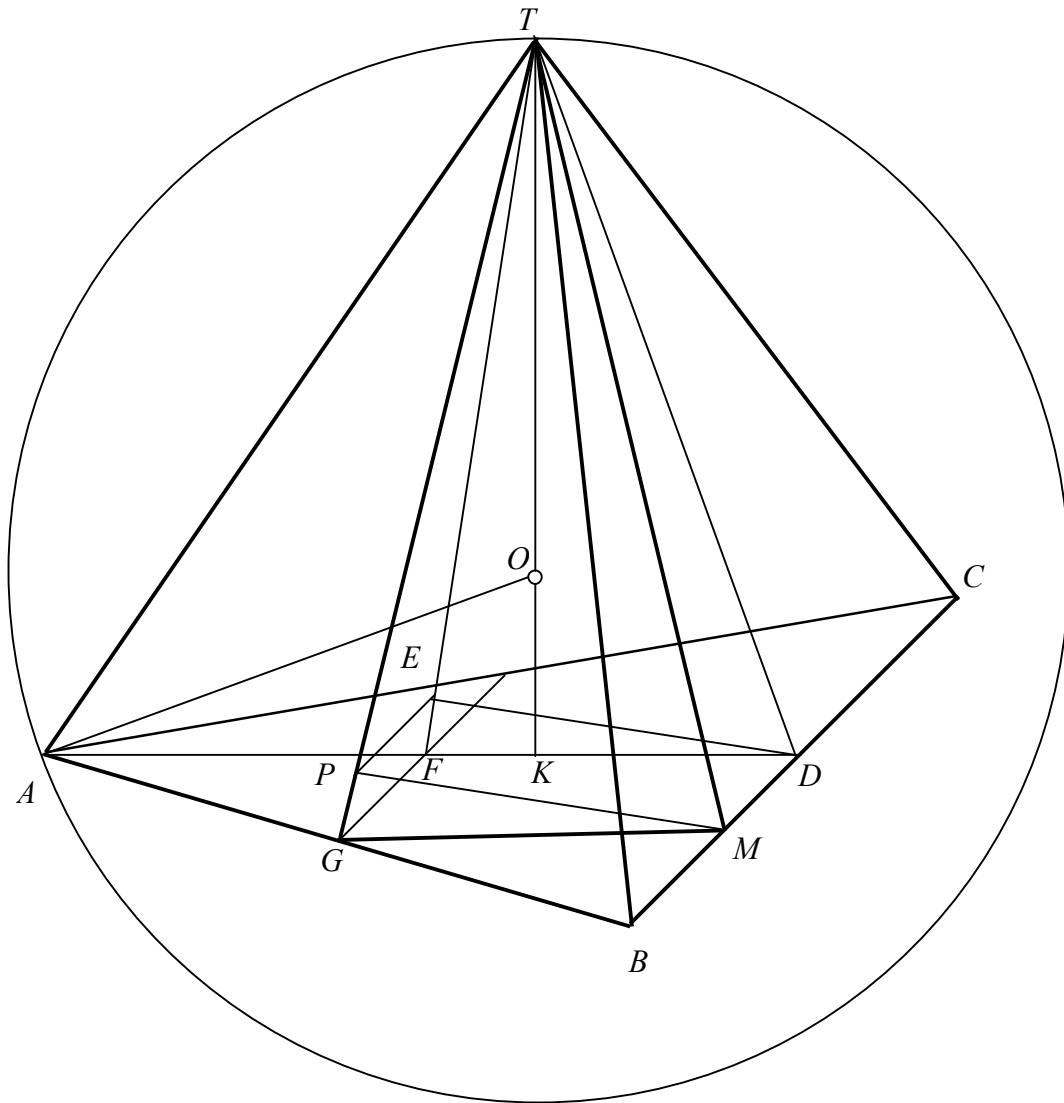
$FT = \sqrt{KT^2 + KF^2} = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{3}{12 \cdot 12}} a = \frac{\sqrt{11}}{4} a$, $ED = \frac{FD \cdot TK}{FT} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 4}{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{11}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{4R}{\sqrt{33}}$.

$S_{\Delta TGM} = \frac{1}{2} \cdot TG \cdot PM = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4\sqrt{11}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{11}} R^2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}} R^2$.

$ET = \sqrt{TD^2 - ED^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right)^2} = \frac{5a}{2\sqrt{11}}$; $\frac{ET}{FT} = \frac{5}{2\sqrt{11}} \cdot \frac{4}{\sqrt{11}} = \frac{10}{11}$;

$$PE = MD = \frac{10}{11}GF = \frac{10}{11} \cdot \frac{a}{4} = \frac{5a}{22}; \quad BM = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{22}\right)a = \frac{3}{11}a. \quad V_{TBMG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{11}V_{TABC} = \frac{3}{22}V_{TABC}.$$

Отношение объемов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду, равно 3:19.



Пирамида – правильный тетраэдр (все его ребра равны).

$$\frac{KD}{TD} = \frac{1}{3}, \quad TD = 3KD = AD, \quad AB = TB.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}}R^2$; 3:19.