

**Второй (заключительный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету
«Математика», весна 2016 г.**

Вариант № 11

1. Друзья Вася, Петя и Коля живут в одном доме. Однажды Вася и Петя пешком отправились на рыбалку на озеро. Коля остался дома, пообещав приятелям встретить их на велосипеде на обратной дороге. Первым домой отправился Вася, одновременно с ним навстречу на велосипеде выехал Коля. Петя с той же скоростью, что и Вася, отправился с озера домой в момент встречи Коли и Васи. Коля, встретив Васю, сразу же развернулся и довез его домой, а затем тотчас же снова на велосипеде двинулся по дороге к озеру. Встретив Петю, Коля вновь развернулся и довез приятеля до дома. В результате, время, затраченное Петей на дорогу с озера домой, составило $\frac{4}{3}$ от времени, затраченного Васей на тот же путь. Во сколько раз медленнее Вася добрался бы до дома, если бы весь путь он прошел бы пешком? (8 баллов)

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2-16}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2-16}} < \frac{16}{15}$. (8 баллов)

3. Все члены бесконечной геометрической прогрессии являются натуральными числами. Сумма третьего, пятого и седьмого членов этой прогрессии равна $7371 \cdot 2^{2016}$. Найдите знаменатель прогрессии. (8 баллов)

4. Решите неравенство $(\log_x^2(3x-2) - 4)(\sin \pi x - 1) \leq 0$. (8 баллов)

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 4 \cos^2 x \cdot \sin^2 \frac{x}{6} + 4 \sin \frac{x}{6} - 4 \sin^2 x \cdot \sin \frac{x}{6} + 1 = 0, \\ \sin \frac{x}{4} = \sqrt{\cos y}. \end{cases}$$
 (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\log_{0,5}^{-1} \left(\frac{\sin x}{\sin x + 7} \right)}$. (10 баллов)

7. На диагонали AC ромба $ABCD$ выбрана точка K , удаленная от прямых AB и BC на расстояния 12 и 2 соответственно. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 5. Найдите сторону ромба $ABCD$ и радиус окружности, вписанной в этот ромб. (12 баллов)

8. На оси Oy найдите точку M , через которую проходят две касательные к графику функции $y = 0,5\left(x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2$, угол между которыми равен 60° . (12 баллов)

9. Определите все значения a , при которых уравнение

$$4x^2 - 8|x| + (2a + |x| + x)^2 = 4$$

имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a . (12 баллов)

10. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота равна $4R/3$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану основания? Найдите отношение объёмов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду в этом случае. (12 баллов)

Решение варианта № 11

1. Друзья Вася, Петя и Коля живут в одном доме. Однажды Вася и Петя пешком отправились на рыбалку на озеро. Коля остался дома, пообещав приятелям встретить их на велосипеде на обратной дороге. Первым домой отправился Вася, одновременно с ним навстречу на велосипеде выехал Коля. Петя с той же скоростью, что и Вася, отправился с озера домой в момент встречи Коли и Васи. Коля, встретив Васю, сразу же развернулся и довез его домой, а затем тотчас же снова на велосипеде двинулся по дороге к озеру. Встретив Петю, Коля вновь развернулся и довез приятеля до дома. В результате, время, затраченное Петей на дорогу с озера домой, составило $\frac{4}{3}$ от времени, затраченного Васей на тот же путь. Во сколько раз медленнее Вася добрался бы до дома, если бы весь путь он прошел бы пешком? (8 баллов)

Решение: Пусть x — скорость Васи и Пети, v — скорость велосипедиста Коли, S — длина пути от дома до озера. Тогда Вася и Коля встретились через время $t = \frac{S}{x+v}$ после начала

движения. После второго выезда Коли из дома встреча Пети и Коли произошла спустя

время $t_1 = \frac{S-xt}{x+v}$. От озера до дома Вася был в пути $2t$, а Петя — $t+2t_1$. По условию

$$t+2t_1 = \frac{8t}{3}. \text{ Следовательно, } \frac{2S-2xt}{x+v} = \frac{5S}{3(x+v)} \Rightarrow 6S - \frac{6xS}{x+v} = 5S \Rightarrow \frac{6x}{x+v} = 1 \Rightarrow v = 5x.$$

Необходимо найти отношение $\frac{S}{x}$ к $2t$. Таким образом, искомая величина

$$\frac{S}{2xt} = \frac{x+v}{2x} = \frac{x+5x}{2x} = 3. \text{ Ответ: в 3 раза медленнее.}$$

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2-16}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2-16}} < \frac{16}{15}$. (8 баллов)

Решение: ОДЗ: $|x| > 4$.
$$\frac{\sqrt{x^2-16}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2-16}} < \frac{16}{15} \Leftrightarrow \frac{-1}{x\sqrt{x^2-16}} < \frac{1}{15}.$$

1) При $x > 4$ неравенство верно.

2) При $x < -4$ приходим к неравенству $-x\sqrt{x^2-16} > 15$, или $(-x\sqrt{x^2-16})^2 > 225$,

$$x^4 - 16x^2 - 225 > 0, (x^2 + 9)(x^2 - 25) > 0, (x+5)(x-5) > 0. \text{ Поскольку } x < -4, \text{ то}$$

$$x < -5.$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -5) \cup (4; +\infty).$$

3. Все члены бесконечной геометрической прогрессии являются натуральными числами. Сумма третьего, пятого и седьмого членов этой прогрессии равна $7371 \cdot 2^{2016}$. Найдите знаменатель прогрессии. (8 баллов)

Решение: Имеем геометрическую прогрессию $b_1, b_1q, b_1q^2, \dots, b_1q^{n-1}, \dots$, причем $b_1q^{n-1} \in N$ для любого номера $n \in N$. Таким образом, b_1 и q являются натуральными числами. По условию $b_3 + b_5 + b_7 = 7371 \cdot 2^{2016}$, или $b_1q^2 + b_1q^4 + b_1q^6 = 2^{2016} \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 13$, $b_1q^2(1 + q^2 + q^4) = 2^{2016} \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 13$. Натуральное число $1 + q^2 + q^4$ при любом $q \in N$ есть нечетное число, следовательно, $1 + q^2 + q^4 = 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m$, где $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $l, m \in \{0, 1\}$.

1) Если $k = 0$, то $1 + q^2 + q^4 = 7^l \cdot 13^m$, $l \in \{0, 1\}$.

а) При $l = 0$ получаем уравнение $q^2 + q^4 = 13^m$, которое не имеет натуральных решений (дискриминант $D = 1 + 4 \cdot 13^m$ равен 5 при $m = 0$, и равен 53 при $m = 1$).

б) При $l = 1$, $m = 0$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 7 = 0$, которое не имеет натуральных решений ($D = 29$).

в) При $l = 1$, $m = 1$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 90 = 0$, $q^2 = 9$, $q = 3$. При этом $b_1 = 2^{2016} \cdot 3^2$.

2) Если $k = 1$, то $1 + q^2 + q^4 = 3 \cdot 7^l \cdot 13^m$, $l, m \in \{0, 1\}$.

а) При $l = 0$, $m = 0$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 2 = 0$, $q^2 = 1$, $q = 1$. При этом $b_1 = 2^{2016} \cdot 3^3 \cdot 91$.

б) При $l = 0$, $m = 1$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 38 = 0$, которое не имеет натуральных решений ($D = 153$).

в) При $l = 1$, $m = 0$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 20 = 0$, $q^2 = 4$, $q = 2$. При этом $b_1 = 2^{2014} \cdot 3^3 \cdot 13$.

г) При $l = 1$, $m = 1$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 272 = 0$, $q^2 = 16$, $q = 4$. При этом $b_1 = 2^{2012} \cdot 3^3$.

3) Если $k \in \{2, 3, 4\}$, $l, m \in \{0, 1\}$, то $1 + q^2 + q^4 = 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m$. Для полученного

биквадратного уравнения $q^2 + q^4 + 1 - 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m = 0$ вычислим дискриминант

$D = 1 - 4(1 - 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m) = 3(4 \cdot 3^{k-1} \cdot 7^l \cdot 13^m - 1)$. Поскольку при $k \in \{2, 3, 4\}$, $l, m \in \{0, 1\}$, число $4 \cdot 3^{k-1} \cdot 7^l \cdot 13^m$ делится на 3, то $4 \cdot 3^{k-1} \cdot 7^l \cdot 13^m - 1$ не делится на 3, и \sqrt{D} является иррациональным числом. Следовательно, уравнение $q^2 + q^4 + 1 - 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m = 0$ натуральных корней не имеет.

Ответ: задача имеет четыре решения: 1) $q = 1$; 2) $q = 2$; 3) $q = 3$; 4) $q = 4$.

4. Решите неравенство $(\log_x^2(3x-2) - 4)(\sin \pi x - 1) \leq 0$. (8 баллов)

Решение:

$$(\log_x^2(3x-2) - 4)(\sin \pi x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow (\log_x(3x-2) - 2)(\log_x(3x-2) + 2)(\sin \pi x - 1) \leq 0$$

$$\text{ОДЗ: } x \in (2/3, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\begin{cases} \sin \pi x - 1 \leq 0, \\ (\log_x(3x-2) - 2)(\log_x(3x-2) + 2) \geq 0; \\ \sin \pi x - 1 \geq 0, \\ (\log_x(3x-2) - 2)(\log_x(3x-2) + 2) \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in R, \\ (\log_x(3x-2) - \log_x x^2)(\log_x x^2(3x-2) - \log_x 1) \geq 0; \\ x = 1/2 + 2n, n \in Z, \\ (\log_x(3x-2) - \log_x x^2)(\log_x x^2(3x-2) - \log_x 1) \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (2/3, 1) \cup (1, +\infty), \\ (x^2 - 3x + 2)(3x^3 - 2x^2 - 1) \leq 0; \\ x = 1/2 + 2n, n \in Z, \quad x \in (2/3, 1) \cup (1, +\infty), \\ (x^2 - 3x + 2)(3x^3 - 2x^2 - 1) \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (2/3, 1) \cup (1, +\infty), \\ (x-1)^2(x-2)(3x^2+x+1) \leq 0; \\ x = 1/2 + 2n, n \in Z, \quad x \in (2/3, 1) \cup (1, +\infty), \\ (x-1)^2(x-2)(3x^2+x+1) \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (2/3, 1) \cup (1, 2], \\ x = 1/2 + 2n, n \in N. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (2/3, 1) \cup (1, 2] \cup \{x = 1/2 + 2n, n \in N\}$.

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 4 \cos^2 x \cdot \sin^2 \frac{x}{6} + 4 \sin \frac{x}{6} - 4 \sin^2 x \cdot \sin \frac{x}{6} + 1 = 0, \\ \sin \frac{x}{4} = \sqrt{\cos y}. \end{cases}$$

(10 баллов)

Решение:

Решим 1-е уравнение системы:

$$4 \cos^2 x \cdot \sin^2 \frac{x}{6} + 4 \sin \frac{x}{6} - 4 \sin^2 x \cdot \sin \frac{x}{6} + 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^2 x \cdot \sin^2 \frac{x}{6} + 4 \cos^2 x \cdot \sin \frac{x}{6} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos x \sin \frac{x}{6} + \cos x)^2 + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x \left(\sin \frac{x}{6} + \frac{1}{2} \right) = 0, \\ \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{x}{6} = -\frac{1}{2}, \\ \sin x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 6 \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \right), k \in Z, \\ x = 6 \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right), k \in Z, \\ x = \pi n, n \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\pi + 12\pi k, k \in Z, \\ x = -5\pi + 12\pi k, k \in Z, \\ x = \pi n, n \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\pi + 12\pi k, k \in Z, \\ x = -5\pi + 12\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходной системе уравнений, получаем равносильную ей систему

$$\begin{cases} x = -\pi + 12\pi k, k \in Z, \\ x = -5\pi + 12\pi k, k \in Z, \\ \sin \frac{x}{4} = \sqrt{\cos y}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\pi + 12\pi(2m+1), m \in Z, \\ \cos y = 1/2; \\ x = -5\pi + 24\pi m, m \in Z, \\ \cos y = 1/2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11\pi + 24\pi m, m \in Z \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; \\ x = -5\pi + 24\pi m, m \in Z, \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left(11\pi + 24\pi m, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), \left(-5\pi + 24\pi m, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), m, n \in Z.$

Задача 6. Найдите множество значений функции $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\log_{0,5}^{-1} \left(\frac{\sin x}{\sin x + 7} \right)}$.

(10 баллов)

Решение:

Пусть $t = \sin x, t \in [-1; 1] \Rightarrow u = \log_{0,5}(z), z = \frac{t}{t+7} = 1 - \frac{7}{t+7}$ (функция $z(t)$

возрастает). При $t \in [-1; 1]$ имеем $z \in \left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{8} \right]$, но по свойствам логарифмов $z > 0$,

следовательно, $z \in \left(0; \frac{1}{8} \right]$. Функция $u = \log_{0,5} z$ убывает, и при $z \in \left(0; \frac{1}{8} \right]$ имеем

$$u \in [3; +\infty). \text{ Далее имеем } u^{-1} \in (0; 1/3], \sqrt{u^{-1}} \in (0; 1/\sqrt{3}], \operatorname{arctg} \sqrt{u^{-1}} \in (0; \pi/6].$$

Таким образом, множеством значений функции $y = f(x)$ является промежуток $(0; \pi/6]$.

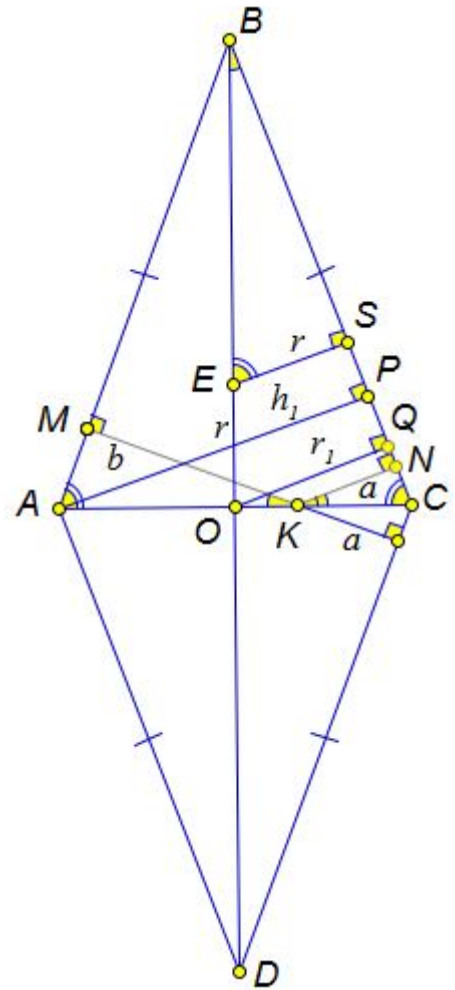
Ответ: $E(y) = (0; \pi/6]$.

7. На диагонали AC ромба $ABCD$ выбрана точка K , удаленная от прямых AB и BC на расстояния 12 и 2 соответственно. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 5. Найдите сторону ромба $ABCD$ и радиус окружности, вписанной в этот ромб.

(12 баллов)

Решение:

По условию: $KN = a = 2$ - расстояние от точки K до прямой BC , $KM = b = 12$ - расстояние от точки K до прямой AB , $r = 5$ - радиус вписанной в треугольник ABC окружности. Пусть O - точка пересечения диагоналей ромба, E - центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Обозначим $BO = h$, $OQ = r_1$ - радиус окружности, вписанной в ромб $ABCD$, $AP = h_1$ - высота треугольника ABC , проведенная из вершины A к стороне BC .



1) $h_1 = a + b = 14$;

2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot h$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h_1$, $S_{ABC} = pr$;

3) $BC \cdot h_1 = (AC + 2BC) \cdot r \Rightarrow$
 $14BC = 5(AC + 2BC) \Rightarrow 4BC = 5AC$;

4) $AC \cdot h = BC \cdot h_1 \Rightarrow AC \cdot h = 1,25AC \cdot h_1 \Rightarrow$

$h = 17,5$;

5) $BE = h - r = 12,5$, $\sin(\angle OBC) = \frac{ES}{BE} = \frac{r}{BE} = \frac{5}{12,5} = \frac{2}{5}$, $\cos(\angle OBC) = \frac{\sqrt{21}}{5}$,

$$BC = \frac{h}{\cos(\angle OBC)} = \frac{17,5 \cdot 5}{\sqrt{21}} = \frac{25\sqrt{21}}{6}.$$

6) $r_1 = 0,5h_1 = 7$.

Ответ: $\frac{25\sqrt{21}}{6}$, 7.

8. На оси Oy найдите точку M , через которую проходят две касательные к графику функции $y = 0,5\left(x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2$, угол между которыми равен 60° . (12 баллов)

Решение:

На оси Oy найдите точку M , через которую проходят две касательные к графику функции $y = 0,5 \cdot (x - \sqrt{3}/2)^2$, угол между которыми равен 60° .

Решение (без применения производной).

$y = 0,5 \cdot (x - \sqrt{3}/2)^2$, $M(0; y_0)$. Уравнение $0,5 \cdot (x - \sqrt{3}/2)^2 = y_0 + kx$, или

$x^2 - 2\left(k + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x - 2y_0 + \frac{3}{4} = 0$, имеет единственное решение, если $\frac{D}{4} = k^2 + \sqrt{3}k + 2y_0 = 0$.

Найденные из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условиям

$k_1 + k_2 = -\sqrt{3}$ (1), $k_1 \cdot k_2 = 2y_0$ (2). Из условия $\alpha_2 - \alpha_1 = 60^\circ$, $\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \sqrt{3}$ следует

$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} = \sqrt{3}$, или $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \sqrt{3}$. Отсюда, $k_2 - k_1 = \sqrt{3}(1 + k_2 k_1)$, $k_2 - k_1 = \sqrt{3}(1 + 2y_0)$,

(3). Решая систему $\begin{cases} k_2 - k_1 = \sqrt{3}(1 + 2y_0), \\ k_1 + k_2 = -\sqrt{3}, \end{cases}$ находим $\begin{cases} k_2 = \sqrt{3}y_0, \\ k_1 = -\sqrt{3}(y_0 + 1) \end{cases}$ и $k_1 k_2 = -3y_0^2 - 3y_0$.

Учитывая (2), получаем условие $2y_0 = -3y_0^2 - 3y_0$, или $3y_0^2 + 5y_0 = 0$. Возможны два решения. 1) $y_0 = 0$, $M(0; 0)$, $k_1 = -\sqrt{3}$, $k_2 = 0$. Уравнения касательных: $y_1 = -\sqrt{3}x$; $y_2 = 0$.

2) $y_0 = -\frac{5}{3}$, $M\left(0; -\frac{5}{3}\right)$, $k_1 = -\sqrt{3} + \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $k_2 = -\frac{5}{\sqrt{3}}$. Уравнения касательных:

$y_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{5}{3}$; $y_2 = -\frac{5}{\sqrt{3}}x - \frac{5}{3}$. Ответ: $M(0; 0)$ или $M\left(0; -\frac{5}{3}\right)$.

9. Определите все значения a , при которых уравнение

$$4x^2 - 8|x| + (2a + |x| + x)^2 = 4$$

имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a . (12 баллов)

Решение:

I. $x \geq 0$, $x^2 - 2x + (a + x)^2 = 1$; $2x^2 + 2(a - 1)x + a^2 - 1 = 0$;

$$D/4 = 1 - 2a + a^2 - 2a^2 + 2 = 3 - 2a - a^2.$$

Уравнение имеет два различных неотрицательных корня $x_{1,2} = (1 - a \pm \sqrt{3 - 2a - a^2})/2$,

$$\text{если } \begin{cases} 3 - 2a - a^2 > 0, \\ a - 1 < 0, \\ a^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a < 1, \\ a < 1, \\ a \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < a \leq -1.$$

Уравнение имеет ровно один неотрицательный корень $x = (1 - a + \sqrt{3 - 2a - a^2})/2$, если

$$\begin{cases} \begin{cases} D = 0, \\ a - 1 \leq 0, \\ a^2 - 1 < 0, \\ a^2 - 1 = 0, \\ a - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = -3, \\ a = 1, \\ a \leq 1, \end{cases} \\ -1 < a < 1, \\ \begin{cases} a = -1, \\ a = 1, \\ a > 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3, \\ -1 < a \leq 1. \end{cases} \end{cases}$$

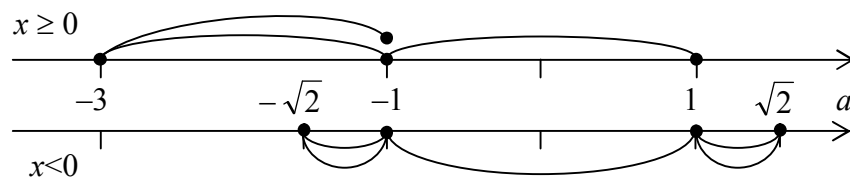
II. $x < 0$, $x^2 + 2x + a^2 - 1 = 0$; $D/4 = 2 - a^2$.

Уравнение имеет два различных отрицательных корня $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2 - a^2}$, если

$$\begin{cases} 2 - a^2 > 0, \\ a^2 - 1 > 0, \\ -1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < a < -1, \\ 1 < a < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Уравнение имеет ровно один отрицательный корень $x = -1 - \sqrt{2 - a^2}$, если

$$\begin{cases} \begin{cases} 2 - a^2 = 0, \\ -1 < 0, \\ a^2 - 1 < 0, \\ a^2 - 1 = 0, \\ -1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\sqrt{2}, \\ a = \sqrt{2}, \\ -1 \leq a \leq 1. \end{cases} \end{cases}$$



Ответ: $a \in (-3; -\sqrt{2})$, $x_{1,2} = (1 - a \pm \sqrt{3 - 2a - a^2})/2$;

$a \in (-1; 1]$, $x_1 = (1 - a + \sqrt{3 - 2a - a^2})/2$, $x_2 = -1 - \sqrt{2 - a^2}$;

$a \in (1; \sqrt{2})$, $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2 - a^2}$.

10. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота равна $4R/3$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану основания? Найдите отношение объёмов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду в этом случае. (12 баллов)

Решение:

Так как $TK = 4R/3$, $OK = R/3$, $BK = \sqrt{1 - (1/3)^2} R = \sqrt{8}R/3$; $AB = AK\sqrt{3} = \sqrt{8/3}R$,
 $AT = \sqrt{(4R/3)^2 + (\sqrt{8}R/3)^2} = \sqrt{8/3}R$. Следовательно, $AB = AT$, все ребра пирамиды равны.

Будем считать, что секущая плоскость проходит через медиану TG и пересекает ребро BC в точке M . Проведем $GF \parallel BC$, $F \in AD$, затем $DE \perp TF$, $E \in TF$,
 $EP \parallel BC$, $P \in TG$, и $PM \parallel DE$, $M \in BC$. PM – общий перпендикуляр к BC и TG .

Обозначим $a = AB = AT$. Тогда $FK = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$, $TK = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} a$,

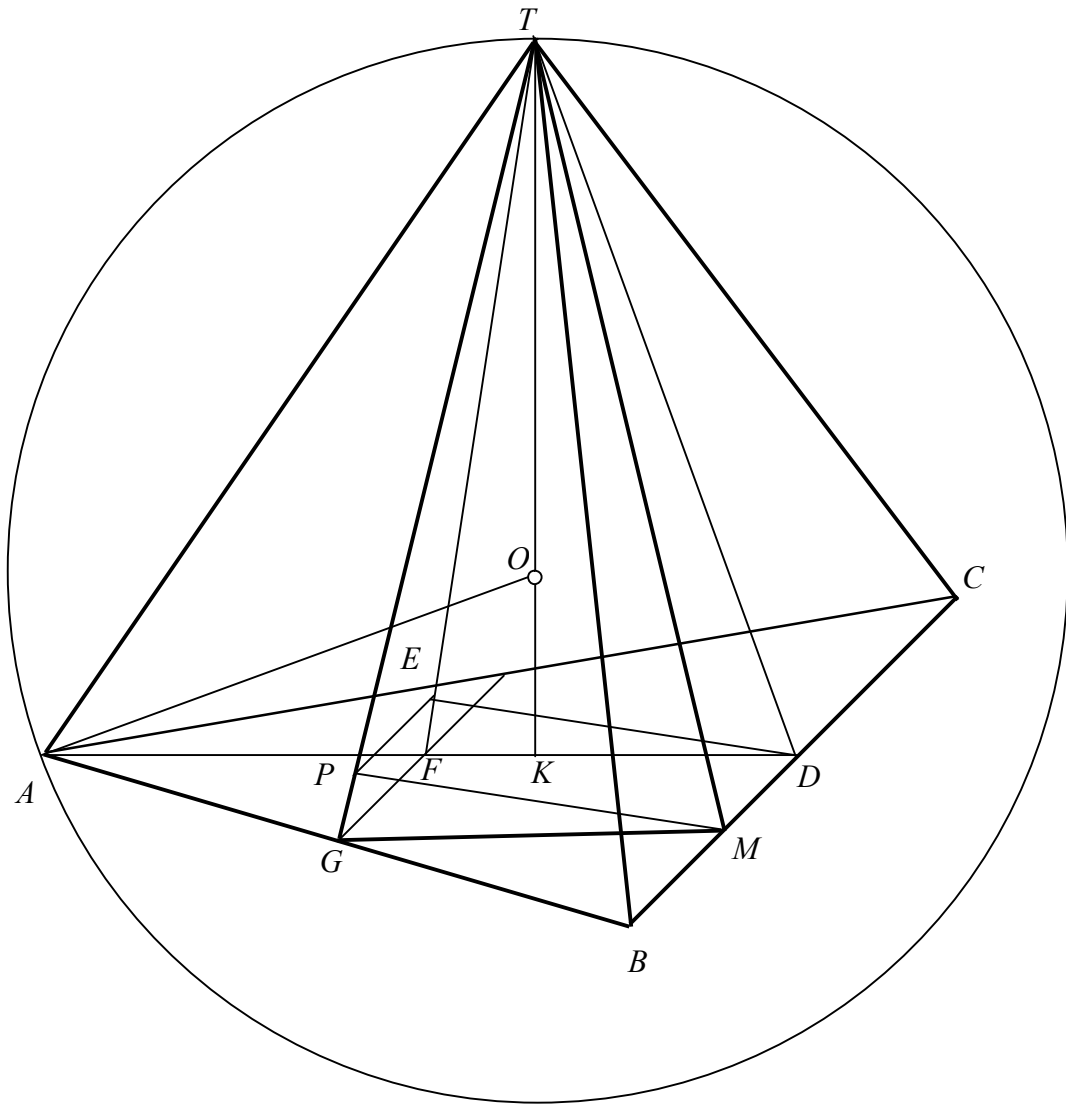
$FT = \sqrt{KT^2 + KF^2} = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{3}{12 \cdot 12}} a = \frac{\sqrt{11}}{4} a$, $ED = \frac{FD \cdot TK}{FT} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 4}{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{11}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{4R}{\sqrt{33}}$.

$S_{\Delta TGM} = \frac{1}{2} \cdot TG \cdot PM = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{a^2 \sqrt{6}}{4\sqrt{11}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{11}} R^2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}} R^2$.

$ET = \sqrt{TD^2 - ED^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right)^2} = \frac{5a}{2\sqrt{11}}$; $\frac{ET}{FT} = \frac{5}{2\sqrt{11}} \cdot \frac{4}{\sqrt{11}} = \frac{10}{11}$;

$$PE = MD = \frac{10}{11}GF = \frac{10}{11} \cdot \frac{a}{4} = \frac{5a}{22}; \quad BM = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{22}\right)a = \frac{3}{11}a. \quad V_{TBMG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{11}V_{TABC} = \frac{3}{22}V_{TABC}.$$

Отношение объемов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду, равно 3:19.



Пирамида – правильный тетраэдр (все его ребра равны).

$$TK = \frac{4R}{3}, \quad OK = \frac{R}{3}, \quad BK = \sqrt{1 - \frac{R}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}R, \quad AB = BK\sqrt{3} = \sqrt{\frac{8}{3}}R,$$

$$BT = \sqrt{\frac{16}{9}R^2 + \frac{8}{9}R^2} = \sqrt{\frac{8}{3}}R. \Rightarrow AB = BT. \quad \text{Ответ: } \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}}R^2; \quad 3:19.$$