Первый (заочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

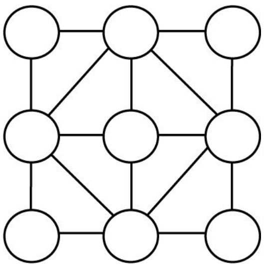
«Математика», осень 2015 г.

8 КЛАСС

1. Назовем десятичное число интересным, если оно делится на число *11111* и все его цифры различны. Сколько существует интересных чисел?

(15 баллов)

2. Числа от *1* до *9* необходимо разместить в кружках фигуры так, чтобы сумма четырех чисел, находящихся в кружках - вершинах всех квадратов (их *6*), была постоянной.



(15 баллов)

3. На доске записаны числа от *1* до *2015*. Двое по очереди стирают по одному числу. Игра заканчивается, когда на доске остаются два числа. Если их сумма делится на *3*, то побеждает то, кто делает первый ход. Если нет - то его партнер. Кто выиграет при правильной игре? Ответ обоснуйте.

(15 баллов)

4. Правильный *2015* - угольник разбит непересекающимися внутри него диагоналями на треугольники. Докажите, что среди них ровно один остроугольный.

(15 баллов)

5. В параллелограмме *ABCD* точки *M* и *H* середины сторон *BC* и *CD* соответственно. Могут ли лучи *AM* и *AH* делить угол *BAD* на три равные части? Ответ обоснуйте.

(20 баллов)

6. Среди 11 внешне одинаковых монет *10* настоящих, весящих по *20 грамм* и одна фальшивая, весящая *21 гра*мм. Имеются чашечные весы, которые оказываются в равновесии, если груз на правой чашке ровно вдвое тяжелее, чем на левой (если груз на правой чашке меньше, чем удвоенный груз на левой, то перевешивает левая чашка, если больше, то правая). Как за три взвешивания на этих весах найти фальшивую монету?

(20 баллов)

Решение задач заочного тура 9 класс.

Задача 1**. Ответ.** 3456.

Если все цифры десятизначного числа различны, то их сумма равна 45, и потому это число делится на 9. Значит, если оно делится на 11111, то оно делится и на 99999.

Рассмотрим десятизначное число $X = \overline{a_9 \dots ao}$ и заметим, что $X = 10^5 \cdot \overline{a_9 \dots a_0} + \overline{a_4 \dots a_0}$ $= 99999 \cdot \overline{a_9 \dots a_5} + \overline{a_9 \dots a_5} + \overline{a_4 \dots a_0}$.

Таким образом, число X делится на 99999 тогда и только тогда, когда делится на 99999 сумма $\overline{a_9 \dots a_5} + \overline{a_4 \dots a_0}$. Заметим, что эта сумма меньше, чем 2 • 99999. Поэтому она делится на 99999 тогда и только тогда, когда она равна 99999. А это равносильно тому, что $a_0 + a_5 = 9$, $a_1 + a_6 = 9$, $a_2 + a_7 = 9$, $a_3 + a_8 = 9$ и $a_4 + a_9 = 9$.

Таким образом, последние пять цифр интересного числа полностью определяются пятью его первыми цифрами, а первые пять цифр можно выбирать произвольно, следя только, чтобы никакие две из них не давали в сумме 9, и a_9 не равнялось нулю.

Учитывая сказанное, цифру a_9 можно выбрать девятью способами, цифру a_8, если a_9 уже выбрано, - восемью (нельзя выбирать a_9 и $9 - a_9$), после этого a_7 - шестью способами, a_6 - четырьмя и a_5 - двумя. Отсюда получаем 9 • 8 • 6 • 4 • 2 = 3456 возможностей.

Задача 2. Пример приведен на рис. 1.

Обозначим через x число из центрального кружочка, а через S - сумму четырех чисел в вершинах квадрата. Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2S = 45 \\ 145 = 45 + S + 3x \end{cases},$$

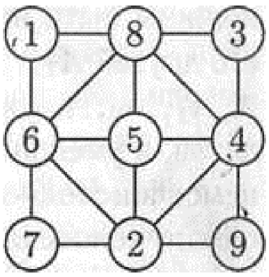


Рис.1.

На рисунках 2, 3 показано, как составлялись уравнения системы.

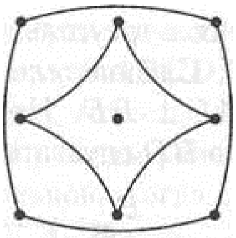


Рис.2.

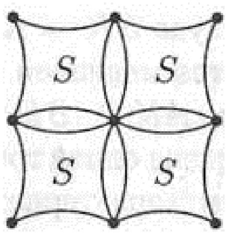


Рис.3.

Решая систему, находим $x = 5$, $S = 20$. Далее короткий подбор дает указанное выше решение. Нетрудно убедиться также, что оно единственно.

Задача 3. Ответ. Выигрывает игрок, делающий первый ход.

Первым ходом первый игрок стирает число 1008. Затем он стирает число, которое в сумме с числом, стертым вторым игроком дает 2016. Итак, до конца игры.

Задача 4. **Ответ.** Для любого треугольника данного разбиения окружность, описанная около правильного 2015-угольника, является описанной. Так как центр окружности, описанной около правильного 2015-угольника, не лежит на диагонали, то он попадет внутрь какого-то одного треугольника. Треугольник остроугольный, если центр описанной окружности лежит внутри, и тупоугольный, если центр описанной окружности лежит вне. Следовательно, треугольник, в который попал центр описанной окружности - остроугольный, все остальные - тупоугольные.

Задача 5. **Ответ.** Не могут.

От противного. Предположим, что могут. Пусть *O* - точка пересечения диагоналей параллелограмма (см. рис. 4). В треугольнике *ABC BO* и *AM* - медианы. *K* - точка их пересечения, следовательно, $\frac{\text{ВК}}{\text{КО}} = \frac{2}{1}$, откуда $\text{КО} = \frac{\text{ВК}}{2}$. Аналогичные рассуждения для треугольника *ADC* показывают, что $LO = \frac{DL}{2}$. Из того, что *BO* = *OD*, следует, что BK=LD, откуда BK=KL=LD. Значит, в треугольнике BAL отрезок AK является медианой и биссектрисой. Следовательно, он является и высотой, т.е. AK $\perp$ BD. Но два различных перпендикуляра из одной точки A на прямую BD опустить нельзя.

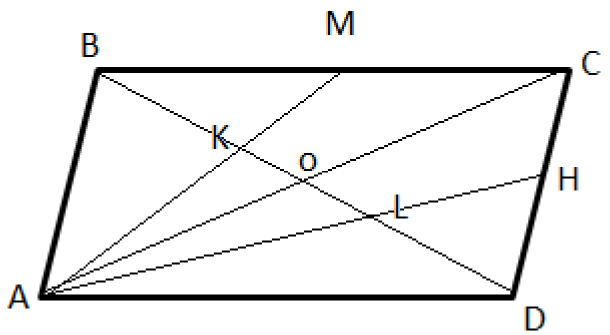


Рис.4

Задача 6. Ответ. Приведем один из возможных способов.

Сначала покажем, как за два взвешивания найти фальшивую монету среди пяти, четыре из которых настоящие. Положим на левую чашку одну монету, а на правую - две. Если перевесила левая чашка, то фальшивая монета на ней. Если перевесила правая чашка, то фальшивая монета - одна из двух на правой чашке; если весы в равновесии, фальшивая монета - одна из двух оставшихся. В любом случае у нас две «подозреваемых» монеты, и известны три настоящих. Положим на левую чашу одну из «подозреваемых», а на правую - две настоящих. Если левая чашка перевесила, то фальшивая монета на ней; если весы в равновесии, то фальшивая - оставшаяся из двух «подозреваемых».

Пусть теперь у нас 11 монет. Положим на правую чашку весов любые 4 из них, а на левую - любые две. Если весы в равновесии, фальшивая монета - среди пяти не лежащих на весах, и мы находим ее за оставшиеся два взвешивания. Если перевесила одна из чашек - фальшивая монета на ней, и мы сузили круг «подозреваемых» монет до двух или четырех. Добавляя к ним соответственно три или одну монету с другой чашки, снова сводим задачу к поиску одной фальшивой монеты среди пяти за два взвешивания.

Замечание. На самом деле, за три взвешивания на таких весах можно выявит монету даже из 21.

Критерии проверки

Задача 1.

Обоснованное и верное решение – 20 баллов

Недостаточно обоснован один из пунктов доказательства – 15 баллов

Доказано, что сумма $\overline{a_9 \ldots a_5} + \overline{a_4 \ldots a_0} = 99999$ – 10 баллов

Доказано, что число делится на 99999 – 5 баллов

Задача 2.

Приведен правильный ответ с обоснованным решением – 15 баллов

Приведен правильный ответ – 10 баллов

Задача 3.

Приведен обоснованный правильный ответ – 15 баллов

Приведен правильный ответ – 10 баллов

Задача 4.

Приведен обоснованный правильный ответ – 15 баллов

Приведено решение без доказательства промежуточных пунктов – 10 баллов

Задача 5.

Приведено верное доказательство - 20 баллов

Доказано равенство отрезков: BK = KL = LD – 10 баллов

Задача 6.

Указано правильное решение – 15 баллов

Указано, как найти фальшивую монету из пяти за два взвешивания -10 баллов