

Олимпиада по информатике. Типовой вариант

Задача 1. Перевести десятичное число $A = 161,78125$ в шестнадцатеричную систему счисления.

Ответ: $A_{16} = A1, C8$.

Задача 2. Найти разность шестнадцатеричных чисел $A_{16} = 1CA0$ и $B_{16} = E1E$, используя 16-разрядный сумматор, старший разряд которого знаковый. Ответ дать в шестнадцатеричной форме. Числа со знаком, выражаемые с использованием 16 двоичных разрядов, должны находиться между -32768 и 32767 . При переполнении разрядной сетки ответ сопроводить сообщением.

Ответ: $C_{16} = E82$.

Задача 3. Дано выражение, в котором используются операции над булевыми величинами, принимающими значения Т (истина) и F (ложь). Выражение может содержать круглые скобки и следующие знаки операций: отрицание (\neg), конъюнкция (\wedge), дизъюнкция (\vee), импликация (\rightarrow). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (\neg), уровень 2 (\wedge), уровень 3 (\vee), уровень 4 (\rightarrow). Построить таблицу истинности для выражения $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$.

Ответ:

Переменные			Выражение
p	q	r	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	T

Задача 4. Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ (\sim), поразрядное И ($\&$), поразрядное ИЛИ (\mid), поразрядный сдвиг влево (\ll), поразрядный сдвиг вправо (\gg). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (\sim), уровень 2 (\ll и \gg), уровень 3 ($\&$), уровень 4 (\mid). Вычислить значение следующего выражения: $(\sim a \mid a \ll 1 \& a \gg 1) \& ((a \mid b) \gg 1 \mid (a \& b) \ll 1)$ для $a = 15$ и $b = 136$. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Ответ: $01010110_2 = 86_{10}$.

Задача 5. Пусть $\{a_n\}$ ($n \geq 1$) – последовательность, для которой $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$. Вычислить a_{10} , зная, что $a_1 = 2$, $a_2 = 2$.

Ответ: $a_{10} = 2$.

Задача 6. Заменить префиксное арифметическое выражение $/ * + a b c + c d$ инфиксным. Инфиксное выражение может содержать лишние круглые скобки.

Ответ: $((a + b) * c) / (c + d)$.

Задача 7. Сколько существует способов разбиения выпуклого пятиугольника на треугольники, путем соединения вершин пятиугольника с использованием двух непересекающихся отрезков.

Ответ: 5.

Задача 8. По результатам одного социологического исследования было установлено, что из 200 людей, смотрящих телевизор, 110 человек смотрят спортивную передачу, 120 – комедии, 85 предпочитают драмы, 50 смотрят драмы и спорт, 70 – комедии и спорт, 55 смотрят комедии и драмы и 30 человек смотрят все три вида передач.

- Сколько человек смотрят спорт или комедии или драмы?
- Сколько человек не смотрят ничего из вышеперечисленного?

Ответ: а) 170; б) 30.

Задача 9. Будем обозначать через $M(a, b, c, \dots, k)$ наименьшее общее кратное, а через $D(a, b, c, \dots, k)$ – наибольший общий делитель целых чисел a, b, c, \dots, k . Написать программу для вычисления следующего выражения: $M(a, b, c) \cdot D(a, b) \cdot D(a \cdot b / D(a, b), c)$.

Входные данные. Стандартный входной поток содержит одну строку, в которой записаны три целых числа a , b и c ($1 \leq a, b, c \leq 10^3$).

Выходные данные. В стандартный выходной поток вывести одно целое число – значение вычисленного произведения.

Пример входных данных	Пример выходных данных
9 18 45	7290

Решение:

Можно показать, что $M(a, b, c) = M(M(a, b), c)$ и $a \cdot b / D(a, b) = M(a, b)$.

```
#include "stdafx.h"

typedef long long int lli;

// Наибольший общий делитель (рекурсивная функция)
lli gcd(lli a, lli b)
{
    return (!b) ? a : gcd(b, a % b);
}

// Наименьшее общее кратное (рекурсивная функция)
lli lcm(lli a, lli b)
{
    return a / gcd(a, b) * b;
}

int main()
{
    lli a, b, c;
    scanf("%lld %lld %lld", &a, &b, &c);
    printf("%lld\n", lcm(lcm(a, b), c)*gcd(a, b)*gcd(lcm(a, b), c));
    return 0;
}
```

Задача 10. На плоскости дан простой многоугольник (т. е. без самокасаний и самопересечений, но не обязательно выпуклый). Написать программу вычисления площади многоугольника.

Входные данные. Стандартный входной поток содержит целое число N ($3 \leq N \leq 1000$) – количество вершин многоугольника и последовательность из N пар действительных координат вершин многоугольника. Все координаты по модулю не больше 10^6 . Вершины многоугольника заданы в порядке их обхода против часовой стрелки.

Выходные данные. В стандартный выходной поток вывести одно действительное число – площадь многоугольника. Результат вывести с точностью 0,0001.

Пример входных данных	Пример выходных данных
4 0 0 3 0 1 1 0 3	3.0000

Решение:

```
#include "stdafx.h"
#include <math.h>

int main()
{
    int N;
    double x_curr, x_next, y_curr, y_next, x_start, y_start;
    double area = 0;
    scanf( "%d", &N );
    scanf( "%lf %lf", &x_next, &y_next );
    x_start = x_next;
    y_start = y_next;
    for (int i = 2; i <= N; i++)
    {
        x_curr = x_next;
        y_curr = y_next;
        scanf( "%lf %lf", &x_next, &y_next );
        area += 0.5*(y_next + y_curr)*(x_next - x_curr);
    }
    x_curr = x_next;
    y_curr = y_next;
}
```

```
x_next = x_start;
y_next = y_start;
area += 0.5*(y_next + y_curr)*(x_next - x_curr);
printf( "%12.4lf\n", abs( area ) );
return 0;
}
```

Олимпиада по информатике. Решения типового варианта

Решение задачи 1.

Перевод смешанных чисел из одной системы счисления в другую производится так: отдельно целой части – по правилу перевода целых чисел, и отдельно дробной части – по правилу перевода дробных чисел.

Переводим целую часть 161.

Вычисляем частное от целочисленного деления числа 161 на 16: $161 / 16 = 10$.

Вычисляем остаток от целочисленного деления числа 161 на 16: $161 \% 16 = 1$.

Так как частное меньше 16, процесс деления завершается.

Переводим частные и остаток в шестнадцатеричную систему счисления: A1.

Переводим дробную часть 0,78125.

Вычисляем произведение дробной части 0,78125 на 16: $0,78125 * 16 = 12,5$. Целая часть равна 12, запоминаем ее.

Вычисляем произведение дробной части 0,5 на 16: $0,5 * 16 = 8,0$.

Так как дробная часть равна 0, процесс умножения завершается.

Переводим целые части в шестнадцатеричную систему счисления: C8.

Ответ: A1,C8

Решение задачи 2.

Переводим числа из шестнадцатеричной системы счисления в двоичную систему:

$$A = 1CA_{16} = 0001\ 1100\ 1010\ 0000_2$$

$$B = 0E1E_{16} = 0000\ 1110\ 0001\ 1110_2$$

Учитывая, что старший разряд числа знаковый, отделяем его от цифровой части числа:

$$A = 0,001\ 1100\ 1010\ 0000_2$$

$$B = 0,000\ 1110\ 0001\ 1110_2$$

Заменяем операцию вычитания $A - B$ на операцию алгебраического сложения $A + (-B)$ путем замены знака вычитаемого на противоположный и прибавлением его к уменьшаемому:

$$A - B = A + (-B) = 0,001\ 1100\ 1010\ 0000_2 + 1,000\ 1110\ 0001\ 1110_2$$

Для машинного представления отрицательного числа будем использовать дополнительный код. Дополнительный код положительного числа совпадает с прямым кодом. Дополнительный код отрицательного числа образуется так: разряды цифровой части числа заменяются на противоположные ("1" на "0", "0" на "1") и к младшему разряду добавляется единица. После преобразования будем иметь:

$$A - B = A + (-B) = 0,001\ 1100\ 1010\ 0000_2 + 1,111\ 0001\ 1110\ 0010_2$$

При сложении чисел может возникнуть переполнение разрядной сетки. Для обнаружения переполнения вводим вспомогательный разряд в знаковую часть изображения числа: "00" соответствует знаку "+", "11" – знаку "-". Любая другая комбинация ("01" или "10"), получившаяся в знаковых разрядах служит признаком переполнения разрядной сетки. Сложение чисел в модифицированном коде ничем не отличается от обычного дополнительного кода. Выполняем операцию алгебраического сложения:

$$\begin{array}{r} 00,001\ 1100\ 1010\ 0000_2 \\ + 11,111\ 0001\ 1110\ 0010_2 \\ \hline 00,000\ 1110\ 1000\ 0010_2 \end{array}$$

Переполнения нет (в знаковых разрядах "00"), поэтому полученный результат – верный. Переводим результат в шестнадцатеричную систему счисления.

Ответ: 0E82₁₆ = E82₁₆.

Решение задачи 3.

Строим таблицу истинности для подвыражений и окончательного выражения:

Переменные	Выражения
------------	-----------

p	q	r	p → q	q → r	(p → q) ∧ (q → r)
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

Ответ:

p	q	r	(p → q) ∧ (q → r)
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	T

Решение задачи 4.

Переводим числа из десятичной системы счисления в двоичную систему:

$$a = 15_{10} = 00001111_2$$

$$b = 136_{10} = 10001000_2$$

Вычисляем значения подвыражений и значение окончательного выражения:

$$\sim a = \sim 00001111_2 = 11110000_2$$

$$a \ll 1 = 00001111_2 \ll 1 = 00011110_2$$

$$a \gg 1 = 00001111_2 \gg 1 = 00000111_2$$

$$a \ll 1 \& a \gg 1 = 00011110_2 \& 00000111_2 = 00000110_2$$

$$(\sim a \mid a \ll 1 \& a \gg 1) = 11110000_2 \mid 00000110_2 = 11110110_2$$

$$a \mid b = 00001111_2 \mid 10001000_2 = 10001111_2$$

$$(a \mid b) \gg 1 = 10001111_2 \gg 1 = 01000111_2$$

$$a \& b = 00001111_2 \& 10001000_2 = 00001000_2$$

$$(a \& b) \ll 1 = 00001000_2 \ll 1 = 00010000_2$$

$$((a \mid b) \gg 1 \mid (a \& b) \ll 1) = 01000111_2 \mid 00010000_2 = 01010111_2$$

$$(\sim a \mid a \ll 1 \& a \gg 1) \& ((a \mid b) \gg 1 \mid (a \& b) \ll 1) = 11110110_2 \& 01010111_2 = 01010110_2$$

Ответ: 01010110₂ = 86₁₀.

Решение задачи 5.

Полагая в данном соотношении $n = 1, 2, 3, \dots, 8$, получим:

$$a_3 - 4a_2 + 3a_1 = 0$$

$$a_4 - 4a_3 + 3a_2 = 0$$

$$a_5 - 4a_4 + 3a_3 = 0$$

$$\dots$$

$$a_{10} - 4a_9 + 3a_8 = 0$$

после всех вычислений получим:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = 2$$

$$a_4 = 2$$

$$a_5 = 2$$

$$a_6 = 2$$

$$a_7 = 2$$

$$a_8 = 2$$

$$a_9 = 2$$

$$a_{10} = 2$$

Ответ: $a_{10} = 2$.

Решение задачи 6.

1. Строим бинарное дерево, задающее префиксную запись выражения $/ * + a b c + c d$. Корень и узлы дерева помечены знаками операций, листья дерева помечены символами операндов.
2. Применяем алгоритм обхода дерева в центрированном порядке и получаем выражение в инфиксной записи. При переходе от узла потомка, помеченного знаком операции, к узлу предку, помеченному знаком операции, полученное ранее подвыражение заключаем в круглые скобки. В результате может быть получено инфиксное выражение, содержащее лишние скобки.

Ответ: $((a + b) * c) / (c + d)$.

Решение задачи 7.

Задачу можно решить методом полного перебора. Но можно показать, что число разбиений выпуклого пятиугольника на треугольники, путем соединения вершин пятиугольника с использованием двух непересекающихся отрезков, определяется третьим числом Каталана. Само число Каталана выражается формулой $C(n) = (2n)!/n!/(n+1)!$. $C(3) = (2 \cdot 3)!/3!/(3+1)! = (6)!/3!/(4)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 / (1 \cdot 2 \cdot 3 / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = 5$.

Ответ: 5.

Решение задачи 8.

Пусть U – множество 200 людей, среди которых проводился опрос. Пусть S – множество людей, которые смотрят спорт, D – множество людей, которые смотрят драмы, и C – множество людей, предпочитающих комедии.

Тогда первое задание – найти $|S \cup D \cup C|$. Это можно сделать, используя непосредственно следующую формулу:

$$|S \cup D \cup C| = |S| + |D| + |C| - |S \cap D| - |D \cap C| - |S \cap C| + |S \cap D \cap C| = 110 + 85 + 120 - 50 - 55 - 70 + 30 = 170,$$

Так что 170 человек смотрят спорт или комедии или драмы.

Второе задание требует найти

$$U \setminus (S \cup D \cup C) = 200 - 170 = 30.$$

Итак, 30 человек не смотрят по телевидению ни спорт, ни драмы, ни комедии.

Ответ: а) 170; б) 30.

Решение задачи 9.

Можно показать, что $M(a, b, c) = M(M(a, b), c)$ и $a \cdot b / D(a, b) = M(a, b)$. В этом случае программа на языке C, включающая две рекурсивные функции вычисления наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного, будет иметь вид:

```
#include "stdafx.h"

typedef long long int lli;

// Наибольший общий делитель (рекурсивная функция)
lli gcd(lli a, lli b)
{
    return (!b) ? a : gcd(b, a % b);
}

// Наименьшее общее кратное (рекурсивная функция)
lli lcm(lli a, lli b)
{
    return a / gcd(a, b) * b;
}

int main()
{
    lli a, b, c;
    scanf("%lld %lld %lld", &a, &b, &c);
    printf("%lld\n", lcm(lcm(a, b), c) * gcd(a, b) * gcd(lcm(a, b), c));
}
```

```
    return 0;
}
```

Решение задачи 10.

```
#include "stdafx.h"
#include <math.h>

int main()
{
    int N;
    double x_curr, x_next, y_curr, y_next, x_start, y_start;
    double area = 0;
    scanf( "%d", &N );
    scanf( "%lf %lf", &x_next, &y_next );
    x_start = x_next;
    y_start = y_next;
    for (int i = 2; i <= N; i++)
    {
        x_curr = x_next;
        y_curr = y_next;
        scanf( "%lf %lf", &x_next, &y_next );
        area += 0.5*(y_next + y_curr)*(x_next - x_curr);
    }
    x_curr = x_next;
    y_curr = y_next;
    x_next = x_start;
    y_next = y_start;
    area += 0.5*(y_next + y_curr)*(x_next - x_curr);
    printf( "%12.4lf\n", abs( area ) );
    return 0;
}
```