Вариант 18 (условия, решения, ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите десятичное число A_{10} = 349,796875 в шестнадцатеричную систему счисления.

Ответ: 15D,CC.

Задача 2 (8 баллов). Шесть мальчиков и шесть девочек идут на концерт вместе. Сколькими способами они могут занять места, если а) все девочки сядут вместе? б) две девочки сядут в середине? в) ни мальчики, ни девочки не будут сидеть все вместе?

Решение.

1) Пусть универсум **U** будет множеством всех размещений мальчиков и девочек. Следовательно, |**U**| = 12!.
2) Пусть D – множество всех размещений мальчиков и девочек, когда девочки будут сидеть вместе. Тогда |D| = 6!*7!.
3) Пусть M – множество всех размещений мальчиков и девочек, когда мальчики будут сидеть вместе. Тогда |M| = 6!*7!.
4) Двух девочек можно посадить в середине 6!/(6-2)! = 6!/4! = 6*5 = 30 способами. Количество размещений мальчиков и девочек, когда две девочки будут сидеть в середине равно 30*10!.
5) Количество размещений мальчиков и девочек, когда ни мальчики, ни девочки не будут сидеть все вместе, равно |**U**| - (|D| + |M| - |D $\cap$ M|) = 12! – (6!*7! + 6!*7! – 2*6!*6!).

Ответ: а) 6!*7!; б) 30*10!; в) 12! – (6!*7! + 6!*7! – 2*6!*6!).

Задача 3 (8 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\neg(x_1 \equiv x_2) \wedge \neg(x_1 \equiv x_3) \wedge (x_2 \equiv x_3) = 0$$
$$\neg(x_3 \equiv x_4) \wedge \neg(x_3 \equiv x_5) \wedge (x_4 \equiv x_5) = 0$$
$$\neg(x_5 \equiv x_6) \wedge \neg(x_5 \equiv x_7) \wedge (x_6 \equiv x_7) = 0$$
$$\neg(x_7 \equiv x_8) \wedge \neg(x_7 \equiv x_9) \wedge (x_8 \equiv x_9) = 0$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_9$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

1) заметим два важных момента:
   а) все 4 уравнения – однотипные
   б) первое связано со вторым только через переменную $\mathbf{x_3}$, второе с третьим – только через $\mathbf{x_5}$, третье с четвертым – только через $\mathbf{x_7}$
2) разберем подробно одно первое уравнение; поскольку в нем используется операция И (конъюнкция) и правая часть равна нулю (ложное значение), имеет смысл проверить ситуации, когда первое уравнение истинно: это будет тогда, когда $\mathbf{x_2 \equiv x_3}$, а $\mathbf{x_1}$ не равно этому значению, то есть в двух случаях: $(\mathbf{x_1,x_2,x_3})=(1,0,0)$ и $(\mathbf{x_1,x_2,x_3})=(0,1,1)$
3) поскольку логическое уравнение с тремя переменными может иметь не более $8 = 2^3$ решений, вычитаем два решения из этого количества и находим, что первое уравнение имеет 8 – 2 = 6 решений, причем в трёх из них $\mathbf{x_3} = 0$, а в трёх других $\mathbf{x_3} = 1$.
4) подключаем второе уравнение: для каждого из трёх решений первого при $\mathbf{x_3} = 0$ получаем три решения второго, и для каждого из трёх решений первого при $\mathbf{x_3} = 1$ получаем ещё три решения второго, всего система из двух уравнений имеет 3*3 + 3*3 = 18 решений
5) далее продолжаем таблицу:

число уравнений	решений
1	$3_{(\text{при } \mathbf{x3}=0)} + 3_{(\text{при } \mathbf{x3}=1)} = 6$
2	$3*3 + 3*3 = 9_{(\text{при } \mathbf{x5}=0)} + 9_{(\text{при } \mathbf{x5}=1)} = 18$
3	$9*3 + 9*3 = 27_{(\text{при } \mathbf{x7}=0)} + 27_{(\text{при } \mathbf{x7}=1)} = 54$
4	27*3 + 27*3 = 81 + 81 = 162

Ответ: 162.

Задача 4 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + k*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, 1) = 1 при n > 0; S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(7, 4).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 8x8. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

Ответ: S(7, 4) = 350.

Задача 5 (10 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:
a b d e f + - + * g h + i j + * /. Найдите бинарное дерево, задающее это выражение, и вручную вычислите значение этого выражения для a=5, b=4, d=30, e=3, f=6, g=0, h=1, i=2, j=3.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: ((a*(b+(d-(e+f))))/((g+h)*(i+j))).
Подставляя значения, получим ((5*(4+(30-(3+6))))/((0+1)*(2+3))) = 25.

Ответ: 25.

Задача 6 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
var a: byte=22; b: byte=220;
begin
writeln(
byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and
(byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1)));
end.
```

C

```
typedef unsigned char byte;
int main() {
byte a=22, b=220;
printf( "%d\n",
(byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) &
((byte)((a | b) >> 1) | (byte)((a & b) << 1)) );
return 0;
}
```

Ответ: 71.

Задача 7 (16 баллов). Изобразите вид матрицы **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее побочной диагонали:

Pascal

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 = 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
D[i,j]:=max(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

C

```
#define MAX(X,Y) ((X) > (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=--k;
else D[i][j]=++l;
for (k=0; k<2; k++)
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
D[i][j]=MAX(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
return 0;
}
```

Побочной диагональю матрицы называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

Решение.

Исходная матрица:

```
 -1   1  -2   2  -3
  3  -4   4  -5   5
 -6   6  -7   7  -8
  8  -9   9 -10  10
-11  11 -12  12 -13
```

Матрица для k=0:

```
  -1   1  -2   2  -3
   3   4   4   5   5
  -6   6  -7   7  -8
   8   9   9  10  10
 -11  11 -12  12 -13
```

Матрица для k=1:

```
   4   5   9  10  10
   7   8  12  13  13
  13  14  26  27  27
  16  17  29  30  30
  18  19  31  32  32
```

Ответ: **18 17 26 13 10**