

Вариант 10 (условия и ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число $A_{16} = 147E,59$ в десятичную систему счисления.

Ответ: 5246,34765625.

Задача 2 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел, меньших 1001, которые а) делятся и на 2, и на 3, и на 5? б) делятся на 2, или на 3, или на 5? в) не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Ответ: а) 33; б) 734; в) 267.

Задача 3 (8 баллов). Укажите наибольшее целое число X , при котором логическое выражение $(10 < X \cdot (X+1)) \rightarrow (10 > (X+1) \cdot (X+2))$ истинно.

Решение.

- это операция импликации между двумя отношениями: $A_0 = (10 < X \cdot (X+1))$ и $B_0 = (10 > (X+1) \cdot (X+2))$;
- заметим, что по условию нас интересуют только целые числа, поэтому можно попытаться как-то преобразовать исходное выражение, получив равносильное высказывание (точные значения корней нас совершенно не интересуют!);
- рассмотрим неравенство $A_0 = (10 < X \cdot (X+1))$: очевидно, что X может быть как положительным, так и отрицательным числом;
- легко проверить, что в области $X \geq 0$ высказывание A_0 истинно при всех целых $X \geq 3$, а в области $X \leq 0$ – при всех целых $X \leq -4$ (чтобы не запутаться, удобнее использовать нестрогие неравенства);
- поэтому для целых X можно заменить A_0 на равносильное выражение $A = (X \leq -4) + (X \geq 3)$;
- область истинности выражения – объединение двух бесконечных интервалов;
- теперь рассмотрим второе неравенство $B_0 = (10 > (X+1) \cdot (X+2))$: очевидно, что X так же может быть как положительным, так и отрицательным числом;
- в области $X \geq 0$ высказывание B_0 истинно при всех целых $X \leq 1$, а в области $X \leq 0$ – при всех целых $X \geq -4$, поэтому для целых X можно заменить B_0 на равносильное выражение $B = (-4 \leq X \leq 0) + (0 \leq X \leq 1) = (-4 \leq X \leq 1)$;
- область истинности выражения – закрытый интервал;
- вспомним таблицу истинности операции «импликация»:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

согласно таблице, заданное выражение истинно везде, кроме областей, где $A = 1$ и $B = 0$.

- обратите внимание, что значение 3 уже не входит в эту область, потому что там $A = 1$ и $B = 0$, то есть импликация дает 0;
- максимальное целое число в этой области будет 2.

Ответ: 2.

Задача 4 (8 баллов). Сколько существует способов избрания президента, вице-президента, секретаря и казначея среди членов клуба, включающего 8 студентов последнего курса, 10 студентов предпоследнего курса, 15 второкурсников и 20 первокурсников, если а) отсутствуют какие-либо ограничения? б) президентом должен быть студент последнего курса? в) первокурсники могут быть избраны только на должность секретаря?

Ответ: а) $53 \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50 = 7027800$; б) $8 \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50 = 1060800$; в) $33 \cdot 32 \cdot 20 \cdot 31 + 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 = 1636800$.

Задача 5 (12 баллов). Функция E определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: $E(n, 0) = 1$ для $n \geq 0$; $E(n, k) = (2 \cdot n - 1 - k) \cdot E(n-1, k-1) + (k+1) \cdot E(n-1, k)$ для $0 < k < n$. Очевидно, что $E(n, n) = 0$ при $n > 0$; $E(n, k) = 0$ при $k > n$. Вычислить вручную $E(6, 3)$.

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7×7 . В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

0	1						
1	1	0					
2	1	2	0				
3	1	8	6	0			
4	1	22	58	24	0		
5	1	52	328	444	120	0	
6	1	114	1452	4400	3708	720	0

Ответ: 4400.

Задача 6 (12 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:
 $a b + c - d * e f g h + * - *$. Вычислить вручную значение этого выражения для $a=8, b=7, c=6, d=5, e=4, f=3, g=2, h=1$.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид $(((((a+b)-c)*d)*(e-(f*(g+h))))))$. Подставляя значения, получим $(((((8+7)-6)*5)*(4-(3*(2+1)))))) = -225$.

Ответ: -225.

Задача 7 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre>var a: byte=204; b: byte=170; begin writeln(byte((a and byte(not(byte(b shl 1)))) shr 2) or byte(not(byte(a shl 1)) and byte(b shr 2)); end.</pre>	<pre>typedef unsigned char byte; int main() { byte a=204, b=170; printf("%d\n", (byte)((a & (byte)(~(byte)(b << 1))) >> 2) (byte)(~(byte)(a << 1)) & (byte)(b >> 2)); return 0; }</pre>

Ответ: 34.

Задача 8 (8 баллов). Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre>function f(x: integer): integer; begin f:=(x*x-4)*(x*x-4)+6; end; var a, b, m, t: integer; begin a:=-10; b:=10; m:=0; for t:=a to b do if (f(t) < f(t-1)) and (f(t) < f(t+1)) then m:=m+1; writeln(m); end.</pre>	<pre>int f(int x) { return (x*x-4)*(x*x-4)+6; } int main() { int t, a=-10, b=10, m=0; for (t=a; t<=b; t++) if (f(t) < f(t-1) && f(t) < f(t+1)) m++; printf("%d\n", m); return 0; }</pre>

Ответ: 2.

Задача 9 (12 баллов). Чему будет равна сумма элементов матрицы **A** после выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre>const n=9; var A: array[0..n-1,0..n-1] of integer; i, k: integer; begin for i:=0 to n-1 do for k:=0 to n-1 do A[i,k]:=0; for k:=0 to n-1 do if (k < n div 2) then for i:=k to n-k-1 do A[i,k]:=1 else for i:=n-k-1 to k do A[i,k]:=1; end.</pre>	<pre>const int n=9; int main() { int A[n][n]={0}; for (int k=0; k<n; k++) if (k <= n/2) for (int i=k; i<n-k; i++) A[i][k]=1; else for (int i=n-k-1; i<=k; i++) A[i][k]=1; return 0; }</pre>

Решение.

Преобразованная матрица:

```

1  0  0  0  0  0  0  0  1
1  1  0  0  0  0  0  1  1
1  1  1  0  0  0  1  1  1
1  1  1  1  0  1  1  1  1
1  1  1  1  1  1  1  1  1
1  1  1  1  0  1  1  1  1
1  1  1  0  0  0  1  1  1
1  1  0  0  0  0  0  1  1
1  0  0  0  0  0  0  0  1

```

Ответ: 49.

Задача 10 (16 баллов). Выпишите элементы побочной диагонали матрицы **D** в конце выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre> const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 = 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do D[i,j]:=max(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end. </pre>	<pre> #define MAX(X,Y) ((X) > (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]--k; else D[i][j]++l; for (k=0; k<2; k++) for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) D[i][j]= MAX(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; } </pre>

Побочной диагональю матрицы называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

Исходная матрица:

```

-1  1  -2  2  -3
 3  -4  4  -5  5
-6  6  -7  7  -8
 8  -9  9 -10 10
-11 11 -12 12 -13

```

Матрица для k=0:

```

-1  1  -2  2  -3
 3  4  4  5  5
-6  6  -7  7  -8
 8  9  9 10 10
-11 11 -12 12 -13

```

Матрица для k=1:

```

 4  5  9 10 10
 7  8 12 13 13
13 14 26 27 27
16 17 29 30 30
18 19 31 32 32

```

Ответ: 18 17 26 13 10.