

## Вариант 4 (условия и решения)

**Задача 1 (8 баллов).** Перевести десятичное число  $A_{10} = 5246,34765625$  в шестнадцатеричную систему счисления.

**Решение задачи 1.**

- 1)  $5246/16 = 327$  и 14 в остатке.  $327/16 = 20$  и 7 в остатке.  $20/16 = 1$  и 4 в остатке.  $5246_{10} = 147E_{16}$ .
- 2)  $0,34765625 \cdot 16 = 5,5625$ .  $0,5625 \cdot 16 = 9$ .  $0,34765625_{10} = 59_{16}$ .

**Ответ:**  $A_{16} = 147E,59$ .

**Задача 2 (8 баллов).** Найти разность шестнадцатеричных чисел  $A_{16} = 3E2$  и  $B_{16} = 6B1$ , используя 16-разрядный сумматор, старший разряд которого знаковый. Ответ дать в шестнадцатеричной форме. Числа со знаком, выражаемые с использованием 16 двоичных разрядов, должны находиться между  $-32768$  и  $32767$ . При переполнении разрядной сетки ответ сопроводить сообщением.

**Решение задачи 2.**

- 1)  $A - B = A + (-B)$ .
- 2)  $[A_2]_{пр} = 0,000\ 0011\ 1110\ 0010$        $[-B_2]_{пр} = 1,000\ 0110\ 1011\ 0001$
- 3)  $[A_2]_д = 0,000\ 0011\ 1110\ 0010$        $[-B_2]_д = 1,111\ 1001\ 0100\ 1111$
- 4)  $[A_2]_д^M = 00,000\ 0011\ 1110\ 0010$        $[-B_2]_д^M = 11,111\ 1001\ 0100\ 1111$
- 5)  $[A_2]_д^M + [-B_2]_д^M = 00,000\ 0011\ 1110\ 0010 + 11,111\ 1001\ 0100\ 1111 = 11,111\ 1101\ 0011\ 0001$
- 6)  $[C_2]_{пр} = 1,000\ 0010\ 1100\ 1110$

**Ответ:**  $C_{16} = 82CF$

**Задача 3 (8 баллов).** Дано выражение, в котором используются операции над булевскими величинами, принимающими значения 0 (ложь) и 1 (истина). Выражение может содержать круглые скобки и следующие знаки операций: отрицание ( $\neg$ ), конъюнкция ( $\wedge$ ), дизъюнкция ( $\vee$ ), импликация ( $\rightarrow$ ). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 ( $\neg$ ), уровень 2 ( $\wedge$ ), уровень 3 ( $\vee$ ), уровень 4 ( $\rightarrow$ ). Построить таблицу истинности для выражения  $((p \vee r) \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))$ .

**Решение задачи 3.**

p	q	r	$p \vee r$	$(p \vee r) \rightarrow q$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$	$((p \vee r) \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

**Задача 4 (8 баллов).** Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ ( $\sim$ ), поразрядное И ( $\&$ ), поразрядное ИЛИ ( $\mid$ ), поразрядный сдвиг влево ( $\ll$ ), поразрядный сдвиг вправо ( $\gg$ ). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 ( $\sim$ ), уровень 2 ( $\ll$  и  $\gg$ ), уровень 3 ( $\&$ ), уровень 4 ( $\mid$ ). Вычислить значение следующего выражения:  $(a \& \sim(b \ll 1)) \gg 2 \mid \sim(a \ll 1) \& b \gg 2$  для  $a = 204$  и  $b = 170$ . Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

**Решение задачи 4.**

- 1)  $a = cc_{16} = 11001100_2$
- 2)  $b = aa_{16} = 10101010_2$
- 3)  $b \ll 1 = 54_{16} = 01010100_2$
- 4)  $\sim(b \ll 1) = ab_{16} = 10101011_2$
- 5)  $a \& \sim(b \ll 1) = 88_{16} = 10001000_2$
- 6)  $(a \& \sim(b \ll 1)) \gg 2 = 22_{16} = 00100010_2$
- 7)  $a \ll 1 = 98_{16} = 10011000_2$
- 8)  $\sim(a \ll 1) = 67_{16} = 01100111_2$
- 9)  $b \gg 2 = 2a_{16} = 00101010_2$

$$10) \sim(a \ll 1) \& b \gg 2 = 22_{16} = 00100010_2$$

$$11) (a \& \sim(b \ll 1)) \gg 2 | \sim(a \ll 1) \& b \gg 2 = 22_{16} = 00100010_2$$

**Ответ:**  $00100010_2 = 34_{10}$ .

**Задача 5 (8 баллов).** Пусть  $\{a_n\}$  ( $n \geq 1$ ) – последовательность, для которой  $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ . Вычислить  $a_{10}$ , зная, что  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -4$ .

**Решение задачи 5.**

**Первый способ.**  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -4$ ,  $a_3 = -16$ ,  $a_4 = -48$ ,  $a_5 = -128$ ,  $a_6 = -320$ ,  $a_7 = -768$ ,  $a_8 = -1792$ ,  $a_9 = -4096$ ,  $a_{10} = -9216$ .

**Второй способ.** Можно найти выражение для  $a_n$  через  $n$ , считая, что  $a_1$  и  $a_2$  заданы. Выражение будет таким:  $a_n = (1 - n) \cdot 2^n$ . Для  $n = 10$  будем иметь:  $a_{10} = (1 - 10) \cdot 2^{10} = -9 \cdot 1024 = -9216$ .

**Ответ:**  $a_{10} = -9216$ .

**Задача 6 (8 баллов).** Дана постфиксная запись арифметического выражения  $a b + c * d + e * f + g * h + i *$ . Найти инфиксную запись этого выражения, не содержащую лишних круглых скобок.

**Решение задачи 6**

Сначала надо построить бинарное дерево, изображающее арифметическое выражение. Корень дерева и все внутренние вершины дерева являются бинарными операторами, а листья дерева – операндами. При построении дерева постфиксная запись выражения читается слева направо один раз, а дерево строится снизу вверх (от листьев к корню). Затем надо обойти дерево в центрированном порядке (in-ordered): левое поддерево – вершина – правое поддерево.

**Ответ:**  $((((a + b) * c + d) * e + f) * g + h) * i$ .

**Задача 7 (8 баллов).** Сколько существует целых чисел между 0 и 1000, содержащих ровно одну цифру 6?

**Решение задачи 7.**

Пусть  $S$  – множество целых чисел между 0 и 1000. Пусть  $S_1$  – подмножество множества  $S$ , которое содержит число, состоящее из одной цифры, и эта цифра равна 6. Пусть  $S_2$  – подмножество множества  $S$ , которое содержит двузначные числа ровно с одной цифрой, равной 6. Пусть  $S_3$  – подмножество множества  $S$ , которое содержит трехзначные числа ровно с одной цифрой, равной 6. Множество  $S_1$  содержит только один элемент – число 6. В  $S_2$  каждый элемент, содержащий 6, имеет ее либо первой, либо второй цифрой. Если 6 – вторая цифра, то существует 8 различных чисел, поскольку первое число не может быть 0 или 6. Если 6 – первая цифра, то таких чисел 9, поскольку вторая цифра не может 6. Таким образом,  $S_2$  содержит  $8 + 9 = 17$  элементов. Элемент из  $S_3$  содержит 6 как первую, вторую или третью цифру. Элемент из  $S_3$  содержит 6 как первую, вторую или третью цифру. Если 6 – первая цифра, то существуют 9 вариантов выбора второй цифры и 9 вариантов выбора третьей цифры. Согласно комбинаторному принципу умножения,  $S_3$  содержит  $9 * 9 = 81$  число с 6 как первой цифрой. Если 6 – вторая цифра, то имеются 9 вариантов выбора третьей цифры и 8 вариантов выбора первой цифры, поскольку первая цифра не может быть нулем. Следовательно,  $S_3$  содержит  $9 * 8 = 72$  числа, у которых 6 – вторая цифра. Аналогично,  $S_3$  содержит 72 числа, у которых 6 – третья цифра. Следовательно, всего  $S_3$  содержит  $81 + 72 + 72 = 225$  элементов. Поскольку  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ , то  $S$  содержит  $1 + 17 + 225 = 243$  элемента.

**Ответ:** 243.

**Задача 8 (12 баллов).** Сколько существует положительных пятизначных целых чисел, которые

- Начинаются с 3?
- Заканчиваются на 5?
- Содержат цифру 7?
- Начинаются с 3 и заканчиваются на 5 или содержат цифру 7?

**Решение задачи 8.**

Пусть  $S$  – множество положительных пятизначных целых чисел, т. е. целых чисел между 10000 и 99999. Пусть  $S_3$  – подмножество множества  $S$ , которое содержит положительные пятизначные целые числа, начинающиеся с 3. Пусть  $S_5$  – подмножество множества  $S$ , которое содержит положительные пятизначные целые числа, заканчивающиеся на 5. Пусть  $S_7$  – подмножество множества  $S$ , которое содержит положительные пятизначные целые числа, включающие цифру 7. Пусть  $S_7'$  – подмножество множества  $S$ , которое содержит положительные пятизначные целые числа, не включающие цифру 7. Тогда имеем

$$|S| = 99999 - 10000 + 1 = 90000.$$

$$|S_3| = 39999 - 30000 + 1 = 10000.$$

$$|S_5| = [89999/5] - [89999/10] = 17999 - 8999 = 9000.$$

Для  $S_7$  существует 8 вариантов выбора первой цифры (поскольку цифры 0 и 7 исключены) и 9 вариантов выбора каждой из четырех оставшихся цифр (поскольку цифра 7 исключена). Поэтому  $|S_7'| = 8 \cdot 9^4 = 8 \cdot 6561 = 52488$ . Тогда  $|S_7| = |S| - |S_7'| = 90000 - 52488 = 37512$ .

Для чисел, начинающихся с 3 и заканчивающихся на 5, существует 10 вариантов выбора каждой из трех промежуточных цифр. Следовательно,  $|S_3 \cap S_5| = 10^3 = 1000$ . Среди этих чисел имеется  $9^3 = 729$  чисел, **не** включающих цифру 7. Тогда количество положительных пятизначных целых чисел, которые начинаются с 3 и заканчиваются на 5 или содержат цифру 7, равно  $729 + 37512 = 38241$ .

**Ответ: а) 10000; б) 9000; в) 37512; г) 38241**

**Задача 9 (16 баллов).** Факторизацией натурального числа называется его разложение в произведение простых множителей. Существование и единственность (с точностью до порядка следования множителей) такого разложения следует из основной теоремы арифметики. Выполнить факторизацию натурального числа  $N$  ( $1 \leq N \leq 10^6$ ).

**Входные данные.** Входной файл содержит произвольное количество натуральных чисел, по одному числу в строке.

**Выходные данные.** В выходной файл для каждого числа во входном файле вывести строку, содержащую исходное число  $N$ , знак '=' и разложение в произведение простых множителей. Множители должны разделяться знаком '\*'.

Пример входных данных	Пример выходных данных
2	2 = 2
3571	3571 = 3571
380570190	380570190 = 2*3*5*7*11*13*19*23*29

**Решение задачи 9.**

**Язык Си.**

```
#include "stdafx.h"
#include <math.h>
FILE *ifs, *ofs;
void solve( int n ) {
    int divider, upper_limit;
    bool flag = false;
    fprintf( ofs, "%d =", n );
    if ( n <= 1 ) fprintf( ofs, "%d\n", n );
    else {
        divider = 2;
        upper_limit = int(sqrt( (double)n ) + 0.5 );
        while ( divider <= upper_limit ) {
            if ( n % divider == 0 ) {
                n = n / divider;
                if (!flag) { flag = true; fprintf( ofs, " %d", divider ); }
                else fprintf( ofs, " *%d", divider );
                while ( n % divider == 0 ) { n = n / divider; fprintf( ofs, " *%d", divider ); }
                upper_limit = int(sqrt( (double)n ) + 0.5 );
            }
            divider++;
        }
        if ( n == 0 ) fprintf( ofs, "\n" );
        else { if (flag) fprintf( ofs, " *%d\n", n ); else fprintf( ofs, " %d\n", n ); }
    }
}
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[]) {
    int n;
    if( (ifs = fopen( "input.txt", "r" )) == NULL ) return 1;
    if( (ofs = fopen( "output.txt", "w" )) == NULL ) return 2;
    while ( !feof( ifs ) ) { fscanf( ifs, "%d", &n ); if ( feof( ifs ) ) break; solve( n ); }
    fclose( ifs );
    fclose( ofs );
    return 0;
}
```

**Язык Паскаль.**

program Project\_4\_9;

```

{$APPTYPE CONSOLE}
uses SysUtils;
var f, g: TextFile;
    N: Integer; // High(Integer) = 2147483647
procedure Solve(N: Integer);
var Divider, UpperLimit: Integer;
    Flag: Boolean;
begin
    Flag := False;
    Write(g, N, ' =');
    if N <= 1 then Writeln(g, ' ', N)
    else
    begin
        Divider := 2;
        UpperLimit := Round(Sqrt(N));
        while (Divider <= UpperLimit) do
        begin
            if N mod Divider = 0 then
            begin
                N := N div Divider;
                if not Flag then
                begin
                    Flag := True;
                    Write(g, ' ', Divider);
                end
                else Write(g, '*', Divider);
                while N mod Divider = 0 do
                begin
                    N := N div Divider;
                    Write(g, '*', Divider);
                end;
                UpperLimit := Round(Sqrt(N));
            end;
            Inc(Divider);
        end;
        if N = 0 then Writeln(g)
        else
        begin
            if Flag then Writeln(g, '*', N)
            else Writeln(g, ' ', N);
        end;
    end;
end;
begin
    AssignFile(f, 'input.txt');
    AssignFile(g, 'output.txt');
    try
        Reset(f);
        Rewrite(g);
        try
            while not Eof(f) do
            begin
                Readln(f, N);
                Solve(N);
            end;
        finally
            CloseFile(f);
            CloseFile(g);
        end;
    except
        on EInOutError do Writeln('EInOutError!');
    end;
end.

```

**Задача 10 (16 баллов).** В первом квадранте декартовой системы координат на плоскости заданы два прямоугольных треугольника. Катеты треугольников параллельны осям координат, прямые углы треугольников размещены слева внизу. Найти площадь пересечения треугольников.

**Входные данные.** Каждый треугольник задается четырьмя действительными числами:  $x_{\min}$ ,  $y_{\min}$ ,  $x_{\max}$ ,  $y_{\max}$ , где  $x_{\min}$ ,  $y_{\min}$  – координаты вершины прямого угла треугольника,  $x_{\max}$ ,  $y_{\max}$  – координаты правого верхнего угла описанного прямоугольника. Каждая строка входного файла содержит данные об одном треугольнике. Все координаты не больше  $10^6$ .

**Выходные данные.** В выходной файл вывести одно действительное число – площадь пересечения треугольников. Результат вывести с точностью 0,001.

Пример входных данных	Пример выходных данных
0 0 4 3 2 1 5 2	0.167

## Решение задачи 10.

### Язык Си.

```
#include "stdafx.h"
FILE *ifs, *ofs;
double x_min_1, y_min_1, x_max_1, y_max_1;
double x_min_2, y_min_2, x_max_2, y_max_2;
double max_x_min, max_y_min;
double x_1, y_1, x_2, y_2;
double t, x_cross, y_cross, k1, k2, s;
void cut_left( double &x_min, double &y_min, double &x_max, double &y_max, double max_x_min ) {
    if (x_min < max_x_min) {
        if (x_max <= max_x_min) { x_min = max_x_min; x_max = max_x_min; y_max = y_min; }
        else { y_max = y_min + (y_max - y_min) * (x_max - max_x_min) / (x_max - x_min); x_min = max_x_min; }
    }
}
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[]) {
    if( (ifs = fopen( "input.txt", "r" )) == NULL ) return 1;
    if( (ofs = fopen( "output.txt", "w" )) == NULL ) return 2;
    fscanf( ifs, "%lf %lf %lf %lf", &x_min_1, &y_min_1, &x_max_1, &y_max_1 );
    fscanf( ifs, "%lf %lf %lf %lf", &x_min_2, &y_min_2, &x_max_2, &y_max_2 );
    if (x_min_1 > x_min_2) max_x_min = x_min_1;
    else max_x_min = x_min_2;
    if (y_min_1 > y_min_2) max_y_min = y_min_1;
    else max_y_min = y_min_2;
    cut_left( x_min_1, y_min_1, x_max_1, y_max_1, max_x_min );
    cut_left( y_min_1, x_min_1, y_max_1, x_max_1, max_y_min );
    cut_left( x_min_2, y_min_2, x_max_2, y_max_2, max_x_min );
    cut_left( y_min_2, x_min_2, y_max_2, x_max_2, max_y_min );
    x_1 = x_max_1 - max_x_min; y_1 = y_max_1 - max_y_min;
    x_2 = x_max_2 - max_x_min; y_2 = y_max_2 - max_y_min;
    if (x_1 > x_2) { t = x_1; x_1 = x_2; x_2 = t; t = y_1; y_1 = y_2; y_2 = t; }
    if (y_1 <= y_2) s = 0.5 * x_1 * y_1;
    else {
        k1 = y_1 / x_1; k2 = y_2 / x_2;
        x_cross = (y_1 - y_2) / (k1 - k2); y_cross = y_1 - k1 * x_cross;
        s = 0.5 * x_cross * (y_2 + y_cross) + 0.5 * (x_1 - x_cross) * y_cross;
    }
    fprintf( ofs, "%lf\n", s );
    return 0;
}
```

### Язык Паскаль.

```
program Project_4_10;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses SysUtils;
var f, g: TextFile;
    x_min_1, y_min_1, x_max_1, y_max_1,
    x_min_2, y_min_2, x_max_2, y_max_2,
    max_x_min, max_y_min,
    x_1, y_1, x_2, y_2,
    t, x_cross, y_cross, k1, k2, s: double;
procedure cut_left(var x_min, y_min, x_max, y_max: double; const max_x_min: double);
begin
    if (x_min < max_x_min) then
        begin
            if (x_max <= max_x_min) then
                begin
```

```

    x_min := max_x_min;
    x_max := max_x_min;
    y_max := y_min;
end
else
begin
    y_max := y_min + (y_max - y_min) * (x_max - max_x_min) / (x_max - x_min);
    x_min := max_x_min;
end;
end;
end;
begin
AssignFile(f, 'input.txt');
AssignFile(g, 'output.txt');
try
Reset(f);
Rewrite(g);
try
Readln(f, x_min_1, y_min_1, x_max_1, y_max_1);
Readln(f, x_min_2, y_min_2, x_max_2, y_max_2);
if (x_min_1 > x_min_2) then max_x_min := x_min_1
else max_x_min := x_min_2;
if (y_min_1 > y_min_2) then max_y_min := y_min_1
else max_y_min := y_min_2;
cut_left( x_min_1, y_min_1, x_max_1, y_max_1, max_x_min );
cut_left( y_min_1, x_min_1, y_max_1, x_max_1, max_y_min );
cut_left( x_min_2, y_min_2, x_max_2, y_max_2, max_x_min );
cut_left( y_min_2, x_min_2, y_max_2, x_max_2, max_y_min );
x_1 := x_max_1 - max_x_min;
y_1 := y_max_1 - max_y_min;
x_2 := x_max_2 - max_x_min;
y_2 := y_max_2 - max_y_min;
if (x_1 > x_2) then
begin
t := x_1; x_1 := x_2; x_2 := t;
t := y_1; y_1 := y_2; y_2 := t;
end;
if (y_1 <= y_2) then s := 0.5 * x_1 * y_1
else
begin
k1 := y_1 / x_1;
k2 := y_2 / x_2;
x_cross := (y_1 - y_2) / (k1 - k2);
y_cross := y_1 - k1 * x_cross;
s := 0.5 * x_cross * (y_2 + y_cross) + 0.5 * (x_1 - x_cross) * y_cross;
end;
writeln(g, s:0:3) ;
finally
CloseFile(f);
CloseFile(g);
end;
except
on EInOutError do Writeln('EInOutError!');
end;
end.

```