

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «физика»,

осень 2015 г.

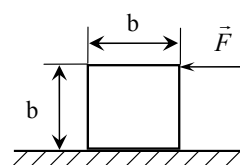
Вариант № 1

ЗАДАЧА 1.

Первую половину времени тело движется со скоростью $v_1 = 20 \text{ м/с}$ под углом $\alpha_1 = 60^\circ$ к координатной оси x , а вторую половину времени – под углом $\alpha_2 = 120^\circ$ к тому же направлению со скоростью $v_2 = 40 \text{ м/с}$. Найдите модуль средней скорости движения тела $|\vec{v}_{CP}|$.

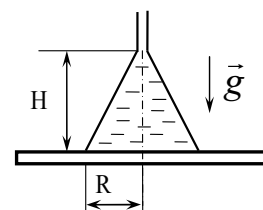
ЗАДАЧА 2.

Какую минимальную горизонтальную силу F нужно приложить к однородному кубику со стороной b и массой $m = 1 \text{ кг}$, чтобы его опрокинуть? При каком коэффициенте трения μ между кубиком и столом это возможно?

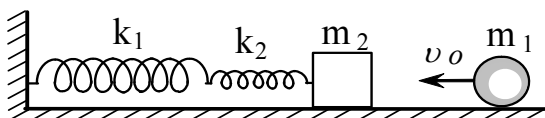


ЗАДАЧА 3.

Тонкостенная коническая воронка плотно лежит на горизонтальном столе. Через отверстие в тонкой трубке в воронку наливают жидкость плотности ρ . Когда жидкость заполнит всю коническую полость воронки, она приподнимает воронку и начинает вытекать из под неё. Определите массу воронки, если радиус её основания равен R , а высота конической части H .



ЗАДАЧА 4.



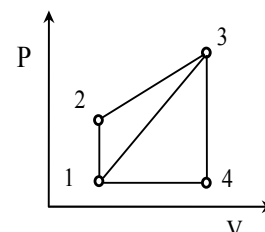
На гладкой горизонтальной поверхности расположен неподвижный брусок массы $m_2 = 2m$, соединённый с двумя пружинами, как показано на рисунке.

Коэффициенты упругости пружин $k_1 = 2k$ и $k_2 = k$. По

плоскости движется шарик массы $m_1 = m$ и сталкивается с бруском. Скорость шарика v_0 перед ударом направлена вдоль оси пружины. Считая удар абсолютно упругим, определите максимальную энергию упругой деформации пружины k_1 после удара. Силами трения и массами пружин пренебречь.

ЗАДАЧА 5.

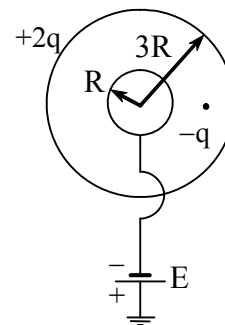
На $P - V$ диаграмме изображены 2 цикла тепловой машины, рабочим телом которой является идеальный газ. Определите коэффициент



полезного действия цикла 1-2-3-4-1, если КПД цикла 1-2-3-1 равен $\eta_1 = 8,7\%$, а цикла 1-3-4-1, $\eta_2 = 9,5\%$.

ЗАДАЧА 6.

В системе, состоящей из двух concentрических проводящих сфер радиусами R и $3R$, внутренняя сфера соединена с землей через источник ЭДС, равной E . Заряд внешней сферы равен $+2q$. На расстоянии $2R$ от центра системы находится точечный заряд $-q$. Зная величины q , E , R , определите заряд внутренней сферы. Потенциал земли принять равным нулю.



ЗАДАЧА 7.

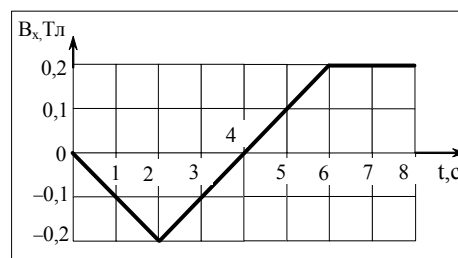
Горизонтальная платформа совершает гармонические колебания в вертикальном направлении вместе с лежащим на ней грузом. Силы, с которыми груз давит на платформу в крайних нижнем и верхнем положениях, отличаются в $n = 2$ раза. Найдите частоту колебаний, если их амплитуда равна $A = 6,8$ см. Принять $g = 10$ м/с².

ЗАДАЧА 8.

Смешали $V_1 = 1$ м³ воздуха с относительной влажностью $\alpha_1 = 20\%$ и $V_2 = 2$ м³ воздуха с относительной влажностью $\alpha_2 = 30\%$. Обе порции влажного воздуха были взяты при одинаковой температуре. Смесь занимает объем $V = 3$ м³. Определите относительную влажность α получившейся смеси.

ЗАДАЧА 9.

К источнику тока с внутренним сопротивлением $r = 1,5$ Ом подключен реостат, сопротивление которого можно изменять в пределах от 1 Ом до 10 Ом. Максимальная мощность, выделяемая на реостате, $P = 37,5$ Вт. Чему равна ЭДС источника тока?



ЗАДАЧА 10.

Тонкое проволочное кольцо площади $S = 100$ см², имеющее сопротивление $R = 0,01$ Ом, помещено в однородное магнитное поле. Изменение проекции вектора магнитной индукции этого поля (B_x) на ось x , перпендикулярную плоскости кольца, от времени представлено на графике. Какое количество теплоты выделится в кольце за интервал времени от $t = 0$ до $t = 8$ с? Индуктивностью кольца пренебречь.

**Решение первого (отборочного) этапа академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «физика»,
осень 2015 г.
Вариант № 1**

З А Д А Ч А 1. (8 баллов)

Ответ:

$$|\vec{v}_{CP}| = \frac{1}{2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} = 26,45 \text{ м/с}.$$

По определению вектор средней скорости

$$\vec{v}_{CP} = \frac{\Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \quad (1) \text{ где } \Delta\vec{r}_1 \text{ и } \Delta\vec{r}_2 \text{ - перемещения}$$

тела на первом и втором участках пути,

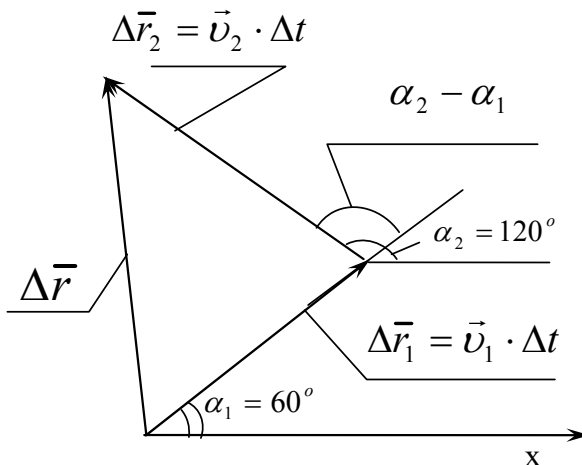
Δt_1 и Δt_2 - время соответствующих перемещений.

$\Delta\vec{r}_1 = \vec{v}_1 \cdot \Delta t$ и $\Delta\vec{r}_2 = \vec{v}_2 \cdot \Delta t$ и учитывая, что по условию задачи $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t$ равенство (1)

примет вид
$$\vec{v}_{CP} = \frac{\vec{v}_1 \Delta t + \vec{v}_2 \Delta t}{2\Delta t} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} \quad (2)$$

Модуль

$$|\vec{v}_{CP}| = \frac{1}{2} |\vec{v}_1 + \vec{v}_2| = \frac{1}{2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{1}{2} \sqrt{20^2 + 40^2 + 2 \cdot 20 \cdot 40 \cos(120^\circ - 60^\circ)} = 26,45 \text{ м/с}$$

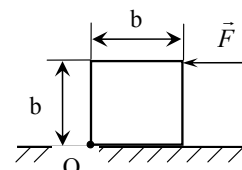


З А Д А Ч А 2. (8 баллов)

Ответ:
$$F_{\min} = \frac{mg}{2} = 5 \text{ Н} ; \mu \geq 0,5$$

Чтобы опрокинуть кубик, необходимо, чтобы момент силы F относительно оси, проходящей вдоль ребра O, был больше момента силы тяжести:

$Fb > mg \frac{b}{2}$. Минимальная величина силы находится из условия:



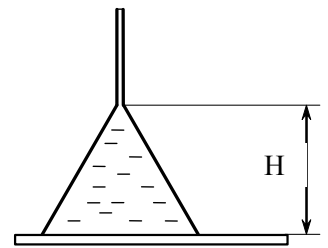
$F_{\min} = \frac{mg}{2} = 5 \text{ Н}$. Условием отсутствия скольжения кубика по горизонтальной плоскости

является неравенство: $F_{TP} \geq F_{\min}$, то есть $\mu mg \geq \frac{mg}{2}$; $\mu \geq 0,5$.

З А Д А Ч А 3. (10 баллов)

Ответ: $m = \frac{2}{3} \pi \rho R^2 H$.

Воронку приподнимает результирующая вертикальных составляющих сил давления жидкости на стенки воронки. В тот момент, когда жидкость начинает вытекать из-под воронки, нижний край воронки перестаёт давить на стол. А это значит, что в этот момент вся сила, действующая на стол, - это сила давления столба воды высотой H на площадь нижнего края воронки.



Итак, в момент

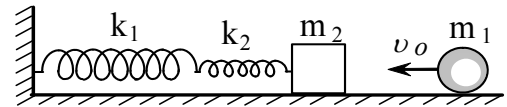
отрыва

$$mg + \rho g V = \rho g H \pi R^2 \quad (1),$$

где $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$. И из (1) находим $m = \frac{2}{3} \pi \rho R^2 H$

З А Д А Ч А 4. (10 баллов)

Ответ: $E_1 = \frac{4}{27} m v_0^2$.



1. Используя законы сохранения импульса, получим

$$\text{скорость бруска после удара } v = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{2m}{m + 2m} v_0 = \frac{2}{3} v_0$$

2. Кинетическая энергия бруска $E = \frac{m_2 v^2}{2} = \frac{2m}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} v_0\right)^2 = \frac{4}{9} m v_0^2$. (1)

3. Обозначим максимальную энергию деформации пружин $E_1 = \frac{k_1 x_1^2}{2}$ и $E_2 = \frac{k_2 x_2^2}{2}$.

Тогда $E = E_1 + E_2$ (2)

4. Т.к. массами пружин пренебрегаем, то сила упругих деформаций в произвольном сечении

пружины остается постоянной: $k_1 x_1 = k_2 x_2$, следовательно, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{k_2}{k_1}$ (3).

5. Найдём отношение $\frac{E_1}{E_2} = \frac{k_1 x_1^2}{k_2 x_2^2}$; используя (2), получим $\frac{E_1}{E_2} = \frac{k_1 k_2^2}{k_2 k_1^2} = \frac{k_2}{k_1}$, откуда

$$E_1 = E_2 \frac{k_2}{k_1}. \text{ Подставляя } E \text{ из (1), получим } E_1 = E \frac{k_2}{k_1 + k_2} = \frac{4}{9} m v_0^2 \frac{k_2}{2k_2 + k_1} = \frac{4}{27} m v_0^2.$$

$$E_1 = \frac{4}{27} m v_0^2$$

З А Д А Ч А 5. (10 баллов)

Ответ: $\eta = \eta_1 + \eta_2(1 - \eta_1) = 0,17 = 17\%$.

1) Для цикла 1-2-3-1: $\eta_1 = \frac{A_1}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$;

где A_1 - полезная работа цикла 1-2-3-1, Q_1 и Q_2 - теплота, подводимая и отводимая в этом цикле. откуда $A_1 = \eta_1 Q_1$; и $Q_2 = Q_1(1 - \eta_1)$.

2) Для цикла 1-3-4-1: $\eta_2 = \frac{A_2}{Q_2}$;

откуда $A_2 = \eta_2 Q_2 = \eta_2 Q_1(1 - \eta_1)$; и $Q_2 = Q_1(1 - \eta_1)$,

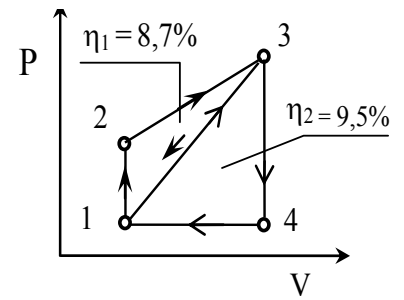
где A_2 - полезная работа цикла 1-3-4-1, а Q_2 - теплота, подводимая в этом цикле.

3) Для цикла 1-2-3-4-1: $\eta = \frac{A_1 + A_2}{Q_1} = \frac{\eta_1 Q_1 + \eta_2 Q_1(1 - \eta_1)}{Q_1}$; $\eta = \eta_1 + \eta_2(1 - \eta_1)$.

Либо $\eta = \eta_2 + \eta_1(1 - \eta_2)$.

Подставив числовые значения, получим

$\eta = \eta_1 + \eta_2(1 - \eta_1) = 0,087 + 0,095(1 - 0,087) = 0,17 = 17\%$.



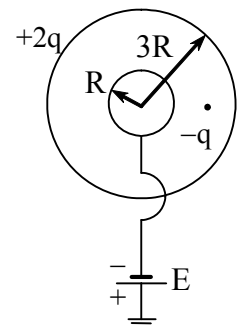
З А Д А Ч А 6. (10 баллов)

Ответ: $Q = -\left(4\pi\epsilon_0 RE + \frac{1}{6}q\right)$.

Согласно принципу суперпозиции, потенциал внутренней сферы равен

$\varphi = -E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2R} + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 3R}$, откуда находим искомый заряд

внутренней сферы $Q = -\left(4\pi\epsilon_0 RE + \frac{1}{6}q\right)$.



З А Д А Ч А 7. (10 баллов)

Ответ: $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{A} \cdot \frac{n-1}{n+1}} = 1,1 \text{ Гц}$

Груз совершает колебания в вертикальном направлении. Запишем второй закон Ньютона для груза в крайнем верхнем и нижнем положениях с учетом того, что ускорение груза направлено к положению равновесия

$-ma = N_1 - mg$ (1) $ma = N_2 - mg$ (2), где $a = a_{\max} = A\omega^2$

Найдем отношение N_2 к N_1 .

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{a + g}{a - g} = n. \text{ Следовательно, } a = \frac{n-1}{n+1}g, \text{ т.е. } A\omega^2 = \frac{n-1}{n+1}g \quad (3)$$

Из (3) находим циклическую частоту колебаний $\omega = \sqrt{\frac{g}{A} \cdot \frac{n-1}{n+1}}$

Искомая частота колебаний при $n = 2$ $A = 6,8$ см.

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{A} \cdot \frac{n-1}{n+1}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10}{0,068} \cdot \frac{2-1}{2+1}} = 1,1 \text{ Гц}$$

З А Д А Ч А 8. (10 баллов)

Ответ: $\alpha = \frac{\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2}{V_1 + V_2} = 0,27; \alpha = 27\%$.

1) Для каждой порции воздуха: $\alpha = \frac{P_1}{P_H}$, следовательно $P_1 = \alpha_1 P_H$

Так как пары воды описываются уравнением Менделеева-Клапейрона, $P_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu} RT$

2) Находим массу воды в 1-ой порции воздуха

$$m_1 = \frac{\mu V_1 P_1}{RT} = \frac{\alpha_1 \mu V_1 P_H}{RT} \quad m_2 = \frac{\mu V_2 P_2}{RT} = \frac{\alpha_2 \mu V_2 P_H}{RT}$$

3) $m_1 + m_2 = \frac{\mu P_H}{RT} (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2)$

4) для смеси $P_{\Sigma} (V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{\mu} RT = (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2) P_H$

5) $\alpha = \frac{P_{\Sigma}}{P_H} = \frac{\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{0,2 \cdot 1 + 0,3 \cdot 2}{1 + 2} = 0,27$.

З А Д А Ч А 9. (12 баллов).

Ответ: $E = \sqrt{4rP_{\max}} = 15 \text{ В}$.

Мощность, выделяемая на реостате, равна произведению напряжения на реостате и силы тока $P = I \cdot U$. Напряжение на реостате $U = I \cdot R = E - I \cdot r$, где E – ЭДС источника тока, r – внутреннее сопротивление источника.

$P = I \cdot (E - I \cdot r)$. Мощность зависит от силы тока, которая, в свою очередь, зависит от сопротивления реостата. Чтобы определить максимальное значение функции, найдём

производную мощности по силе тока и приравняем её нулю: $P' = (IE - I^2 r)' = E - 2Ir = 0$, откуда значение силы тока, соответствующее максимальной мощности $I_{\max} = \frac{E}{2r}$. Сравним полученное выражение с формулой закона Ома для замкнутой цепи $I = \frac{E}{R+r}$. То есть $\frac{E}{2r} = \frac{E}{R+r}$, значит $2r = R+r$, откуда $R = r$. Таким образом, максимальная мощность достигается при равенстве внешнего сопротивления сопротивлению внутреннему.

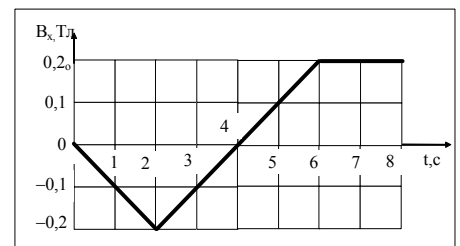
Максимальная мощность $P_{\max} = \frac{E}{2r} \left(E - \frac{E}{2r} r \right) = \frac{E^2}{4r}$. Отсюда ЭДС источника

$$E = \sqrt{4rP_{\max}} = 15 \text{ В}.$$

З А Д А Ч А 10. (12баллов)

Ответ:
$$Q = \frac{S^2}{R} \cdot \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \cdot \Delta t = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$$

1) Из рисунка видно, что ЭДС индукции, действующая в контуре, а, следовательно, и ток, текущий в нем, остаются постоянными по модулю в течение времени от 0 до 6 с (в момент времени $t = 4$ с ЭДС и ток изменяют направление).



2) Найдем теплоту Q, выделяющуюся в контуре

$$Q = I^2 R \Delta t = \left(\frac{E}{R} \right)^2 \cdot R \Delta t = \frac{1}{R} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \Delta t = \frac{S^2}{R} \cdot \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \cdot \Delta t = \frac{(10^{-2})^2}{10^{-2}} \cdot (10^{-1})^2 \cdot 6 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$$

,

$$Q = \frac{S^2}{R} \cdot \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \cdot \Delta t = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$$