+1

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

227445

Шифр ____________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету Математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Сохряков Илья Владиславович

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, лицей № 1580, 11-Е

Регистрационный номер ШМ-3812

Вариант задания 12

Дата проведения "27" февраля 2016 г.

Подпись участника ИВ

79 (семьдесят девять)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
8	8	8	8	8	9	10	8	12	–	79

445

Шифр 227445

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 12

№2.

$\frac{\sqrt{x^2-7}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2-7}} < \frac{7}{12}$ ОДЗ: $x^2 \geq 7 \Rightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; +\infty)$.

$\frac{x^2-7-x^2}{x\sqrt{x^2-7}} \leq \frac{7}{12} \Rightarrow \frac{-7}{x\sqrt{x^2-7}} < \frac{7}{12} \Rightarrow -\frac{1}{x\sqrt{x^2-7}} - \frac{1}{12} < 0$

$\Rightarrow \frac{1}{x\sqrt{x^2-7}} + \frac{1}{12} > 0 \Rightarrow \frac{12+x\sqrt{x^2-7}}{x\sqrt{x^2-7}} > 0$

$12 + x\sqrt{x^2-7} = 0 \Rightarrow 144 = x^2|x^2-7| \Rightarrow x^4 - 7x^2 - 144 = 0$

$D = 49 + 576 = 625 \Rightarrow x_1^2 = \frac{7-25}{2} = -9$ - не подх

$x_2^2 = \frac{7+25}{2} = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

Корень $x = -4$ ($x = 4$ не подходит)

$+ \quad - \quad\quad +$

$-4 \quad -\sqrt{7} \quad 0 \quad \sqrt{7}$

$\frac{12+x\sqrt{x^2-7}}{x\sqrt{x^2-7}} > 0$

ОДЗ:

$x \in (-\infty; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; +\infty)$

$\Rightarrow \boxed{x \in (-\infty; -4) \cup (\sqrt{7}; +\infty)}$

8

Ответ: ↗

№4.

$(\log_x^2(4x-3) - 4)(\sin \pi x - 1) \leq 0$

(1) $\begin{cases} \sin \pi x = 1 \\ 4x - 3 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ x > \frac{3}{4} \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\boxed{x = \frac{5}{2} + 2k, k \in N}$

(6) $\log_{x^2}^2(4x-3)>4$

$(\log_{x^2}(4x-3)-2)(\log_{x^2}(4x-3)+2)>0$

$$\begin{cases}(x-1)^2(4x-3-x^2)(4x-3-x^{-2})>0\\ x>0\\ 4x-3>0\\ x\neq 1\end{cases}$$

$\boxed{x\in(\frac{3}{4};1)\cup(1;3]}$

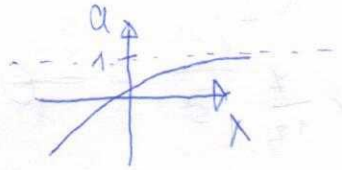
8

$\Rightarrow$ Ответ: $x\in(\frac{3}{4};1)\cup(1;3]\cup\{x=\frac{5}{2}+2k, k\in N\}$

№6.

$f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{4\log_{0,5}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\sin x+15}\right)}$

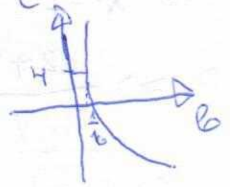
$a(x)=\frac{x}{x+15}=1-\frac{15}{x+15}$



$b(x)=a(\sin x)$

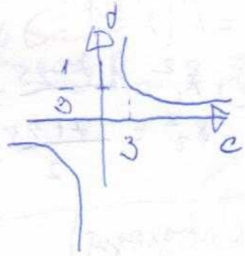
$E(b(x))=[-\frac{1}{14};\frac{1}{16}]$

$c(x)=\log_{0,5}(b(x))$



$E(c)=[4;+\infty)$

$d(c)=\frac{1}{c}$

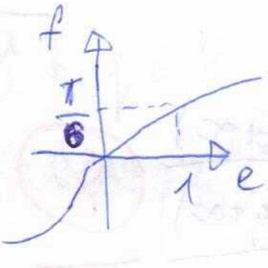


$E(d)=(0;\frac{1}{4}]$

$E(4d)=(0;1]$

$e(d)=\sqrt{d}$

$E(e)=(0;1]\Rightarrow f(e)=\operatorname{arctg}(e)$



$\Rightarrow E(f)=(0;\frac{\pi}{\cancel{6}}]$ 4

9

Ответ: $(0;\frac{\pi}{6}]$

№1.

Пусть x – скорость пешехода

y – мотоциклиста

Пусть весь путь $S=1$ и t_1 – время встречи Васи и Коли

$(x+y)t_1=1\Rightarrow t_1=\frac{1}{x+y}$

t_2 – время от встречи Васи и Коли до дома

$t_1 = \frac{1}{x+y}$, т.е все время Васи $t_1 = \frac{1}{x+y}$

За время t_1 Петя прошел $\frac{x}{x+y}$

~~За время t~~ Тогда до встречи с Колей осталось

$t_3 = \frac{1-\frac{x}{x+y}}{x+y} = \frac{y}{(x+y)^2} \Rightarrow$ все время Коли

$t_2 = \frac{1}{x+y} + \frac{2y}{(x+y)^2}$

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{(x+3y)(x+y)}{(x+y)^2 \cdot 2} = \frac{x+3y}{2(x+y)} = \frac{10}{7}$

$7x + 21y = 20x + 20y \Rightarrow y = 13x$

$t_3 = \frac{1}{x}$ (время пешехода)

$\frac{t_3}{t_1} = \frac{x+y}{x \cdot 2} = \frac{14x}{2x} = 7$

$\boxed{\text{Ответ: } 7}$ +

8

№8

$y = \frac{1}{4}(x+\sqrt{3})$

$f'(x_0) = \frac{1}{2}(x_0+\sqrt{3})$

$y = \frac{1}{2}(x_0+\sqrt{3})(x-x_0) + \frac{1}{4}(x_0+\sqrt{3})^2 = \frac{1}{2}(x_0+\sqrt{3})x - \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 + \frac{1}{4}x_0^2 + \frac{x_0\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} =$

$= \frac{1}{2}(x_0+\sqrt{3})x - \frac{1}{4}x_0^2 + \frac{3}{4}$

Пусть т. $M(0, a)$

$a = -\frac{1}{4}x_0^2 + \frac{3}{4}$

$x_0^2 - (3-4a) = 0$

?

$x_1 x_2 = 4a-3$, $x_1 + x_2 = 0$

$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}(x_1-x_2)}{1+\frac{1}{4}(x_1\sqrt{3} + x_2\sqrt{3} + 3 + x_1 x_2)}\right| =$

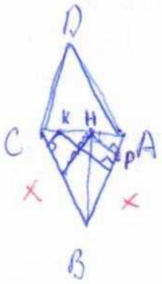
$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot 2x_1}{1+\frac{3}{4}+\frac{x_1x_2}{4}} = \frac{4x_1}{7+x_1x_2} = \frac{4\sqrt{3-4a}}{7+4a-3} = \frac{4\sqrt{3-4a}}{4+4a} = \frac{\sqrt{3-4a}}{a+1} = \sqrt{3}$$

8

$a=0$

Ответ: $(0,0)$. , потеря $\left(0, -\frac{10}{3}\right)$

№7.



$$S_{ABC} = \underset{\underset{S_{KBC}}{\parallel}}{\frac{x}{2}} + \underset{\underset{S_{ABK}}{\parallel}}{\frac{x\cdot 6}{2}} = \frac{7}{2}x \text{ (}x\text{ - сторона } AB\text{)}$$

$$r_{ABC} = \frac{5}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}Pr \Rightarrow P = \frac{2S}{r} = \frac{14x}{5}$$

$$P = 2x + AC \Rightarrow AC = \frac{4}{5}x \; +$$

$$S = \frac{7}{2}x,\ BH = \frac{2\cdot\frac{7}{2}\cdot x}{\frac{4}{5}x} = \frac{7\cdot 5}{4}$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{x^2-\left(\frac{2}{5}x\right)^2} = x\frac{\sqrt{21}}{5}$$

С другой стороны $BH = \frac{2S}{AC} = \cancel{7}\ \frac{7\cdot 5}{4} \Rightarrow x = \frac{35}{\sqrt{21}}$

$$\Rightarrow R = HP \quad \frac{R\cdot x}{2} = S_{ABH} = \frac{7\cdot 0{,}4x}{2} \Rightarrow R = 2{,}8 = \frac{14}{5}$$

Ответ: $x = \frac{35}{\sqrt{21}}$; $R = \frac{14}{5}$

10

№8.

Все числа натуральные в ряде $\Rightarrow b_1, q \in N$

$$b_1q^2 + b_1q^4 + b_1q^6 = b_1q^2(1+q^2+q^4) = 66339\cdot 2^{2016}$$

раскладываю на простые числа:

$$66339\cdot 2^{2016} = 7\cdot 13\cdot 3^6\cdot 2^{2016}$$

$$b_1q^2(1+q^2+q^4)$$

Найду чему может быть равно $1+q^2+q^4$

$$1+q^2+q^4 = 1+q+q = 1 \pmod 2 \quad \forall q \in N$$

См. на обороте.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

227445

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Лист №2

Вариант № 12

№3 (продолжение)

Пусть $q = \frac{m}{k}$ $\quad$ НОД$(m,k)=1 \Rightarrow b_1\left(\frac{m}{k}\right)^{n-1} \in N$

b_1 - первый член $\Rightarrow b_1 \in N$

НОД$(m,k)=1 \Rightarrow b_1 \vdots k^{n-1}$ $\forall n \in N$. Это невозможно т.к. k^{n-1} неогр. возраст. при $k>1 \Rightarrow k=1, q \in N$

по модулю 7

q^2 может быть $\{1,2,4\}$

q^4 - 1, 2, 4

$$1+q^2+q^4 \underset{(\mathrm{mod}\,4)}{\equiv} \left[\begin{array}{l} 1+1^2+1^4 \equiv 3 \\ 1+2^2+2^4 \equiv 0 \\ 1+3^2+3^4 \equiv 0 \\ 1+0+0 \equiv 1 \end{array}\right.$$

по модулю 3

$$1+q^2+q^4 \underset{(\mathrm{mod}\,7)}{\equiv} \left[\begin{array}{l} 1+0+0 \equiv 1 \\ 1+1+1 \equiv 3 \\ 1+2^2+2^4 \equiv 3 \\ 1+3^2+3^4 \equiv 1 \\ 1+4^2+4^4 \equiv 3 \end{array}\right. \Rightarrow 1+q^2+q^4 \not\vdots\ 9$$

по модулю 13

$$1+q^2+q^4 = \left[\begin{array}{l} 1+0+0 \equiv 1 \\ 1+1+1 \equiv 3 \\ 1+4+3 \equiv 1 \\ 1+9+1 \equiv 1 \\ 1+3+9 \equiv 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow 1+q^2+q^4$ может делиться на 3, но не ~~на~~ 9. на 7 и на 13.

$\Rightarrow 1+q^2+q^4 = \{1, 3, 7, 13, 3\cdot 7, 3\cdot 13, 7\cdot 13, 3\cdot 7\cdot 13\}$

При $q>3$ $f(q)$ принимает значение >273

$q=1$ $b_1=2^{2016}\cdot 3^5\cdot 7\cdot 13$

$q=2$ $b_1=2^{2015}\cdot 3^6\cdot 13$

$q=3$ $b_1=2^{2016}\cdot 3^2$

$q=4$ $b_1=2^{2010}\cdot 3^4$

Ответ: $q=\{1,2,3$ или $4\}$

8

5э.

$4x^2-3|x|+(2a+|x|-x)=4$

$4a^2+4a|x|-4ax+x^2-2x|x|-8|x|+5x^2=4$

I $x\geq 0$

$4a^2+4ax-4ax+x^2-2x^2-8x+5x^2=4$

$4x^2-8x+4a^2-4=0$

$x^2-2x+a^2-1=0$

$(x-1)^2=2-a^2$

$2-a^2\geq 0$ $\quad 1-\sqrt{2-a^2}\geq 0\ (1)$

$x=1\pm\sqrt{2-a^2}$ $\quad 1+\sqrt{2-a^2}\geq 0\ (2)$

2 корня:

$a\in(-\sqrt{2};-1)\cup(3;\sqrt{2})$

1 корень:

$a\in(-1;1]$

$(1): a\in[-\sqrt{2};-1]\cup[1,\sqrt{2}]$

$(2): a\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$

II $x<0$

$4a^2-4ax-4ax+x^2+2x^2+8x+5x^2=4$

$8x^2 + 8x(1-a) + 4a^2 - 4 = 0$

$2x^2 + 2x(1-a) + a^2 - 1 = 0$

$$x = \frac{-1-\sqrt{2} \pm \sqrt{-a^2-2a+3}}{2}$$

$-1-\sqrt{a} + \sqrt{-a^2-2a+3} < 0 \quad (3)$

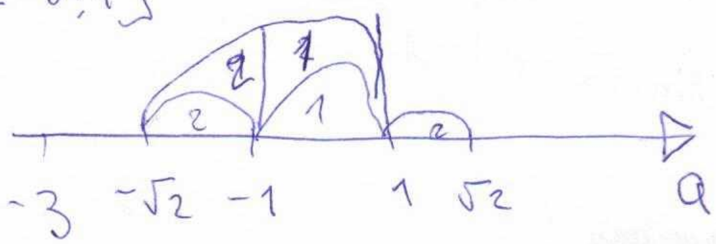
$-1-\sqrt{a} - \sqrt{-a^2-2a+3} < 0 \quad (4)$

$(3): a \in [-3; -1]$

$(4): a \in [-3; -1]$

2 корня:

$[-3; 1]$



Ответ: При $a \in (-3; -\sqrt{2})$:

$$x = \frac{a-1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-a^2-2a+3}$$

При $a \in (-1; 1]$

$$x = \frac{a-1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-a^2-2a+3}$$

$$x = \sqrt{2-a^2} + 1$$

При $a \in (1; \sqrt{2})$

$$x = 1 \pm \sqrt{2-a^2}$$

12

№5.

$4\cos^2 x \sin^2\frac{x}{5} - 4\sin\frac{x}{5} + 4\sin^2 x\cdot\sin\frac{x}{5} + 1 = 1$ (1)

$\sin\frac{x}{4} = \sqrt{\sin y}$

(1) $\sin\frac{x}{5} = t$

$4\cos^2 x\cdot t^2 - 4t + 4\sin^2 x\, t + 1 = 0$

$4\cos^2 x\, t^2 - 4(\sin^2 x - 1)t + 1 = 0$

$4\cos^2 x\cdot t^2 - 4\cos^2 x\, t + 1 = 0$

чтобы t имело действ знач, необходимо:

$D \ge 0$ т.з. $(4\cos^2 x)^2 - 4\cdot 4\cos^2 x \ge 0 \Rightarrow \cos^2 x\underbrace{(\cos^2 x - 1)}_{\le 0} \ge 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos^2 x = 0\\ \cos^2 x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2 x = 0\\ \sin x = 0\end{array}\right. \Rightarrow \sin 2x = 0$

$\Rightarrow D = 0$

Заметим при $\cos x = 0$ нет решений $(1=0)$

$\Rightarrow \sin x = 0$

$\cos^2 x = 1$

$4t^2 - 4t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$\left\{\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin\frac{x}{5} = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi n\\ \frac{x}{5} = (-1)\frac{\pi}{3} + \pi k;\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l}x = \pi n\\ x = (-1)^k\pi + 6\pi k \ (*)\end{array}$

$= \sin\frac{x}{4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\Rightarrow \sin\frac{x}{4} = \sqrt{\sin y} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\sin\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$ $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \boxed{y = (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k}$

$\sin\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi z$, $z\in\mathbb{Z}$ или $\frac{3\pi}{4} + 2\pi z$

$x = \pi + 8\pi z$ или $x = 3\pi + 8\pi z$ (**)

из (1) $\left\{\begin{array}{l}x = (-1)^k\pi + 6\pi k\\ \left[\begin{array}{l}x = \pi + 8\pi z\\ x = 3\pi + 8\pi z\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + 12\pi k\\ x = 5\pi + 12\pi k\\ x = \pi + 8\pi t\\ x = 3\pi + 8\pi z\end{array}\right.$

8

По модулю 24

(*) ⇒ 1, 5, 13, 17

(**) ⇒ 1, 3, 9, 11, 17, 19

$\Rightarrow x = \pi + 12\pi n$ или $x = 17\pi + 12\pi m$

Ответ: $(9\pi \pm 8\pi + 12\pi m;\ (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k)$ $m, k\in\mathbb{Z}$