Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

х 1

Шифр 730022

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКЕ

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника НИКОЛАЕВА ЕКАТЕРИНА ВАСИЛЬЕВНА

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Якутск, МОБУ „НПСОШ N 2", 10 „Б" класс

Регистрационный номер ШМ 1378

Вариант задания N 3

Дата проведения "13" МАРТА 20 16 г.

Подпись участника

восемьдесят три

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
9	10	10	12	12	15	15	—			
										83

Шифр 730022

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 3

N1. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2016} \ ? \ \left(\frac{4}{3}\right)^{-1580}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2016} \ ? \ \left(\frac{3}{4}\right)^{1580}$

1) $\frac{2}{3}<1$, а чем в большую степень возводить число меньшее единицы, тем меньше будет полученное число, т.е.:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2016} < \left(\frac{2}{3}\right)^{1580}$

2) $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ | Приведя к общему знаменателю, $\frac{8}{12} < \frac{9}{12} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

$\Downarrow$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{1580} < \left(\frac{3}{4}\right)^{1580}$

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2016} < \left(\frac{2}{3}\right)^{1580} < \left(\frac{3}{4}\right)^{1580}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2016} < \left(\frac{3}{4}\right)^{1580}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2016} < \left(\frac{4}{3}\right)^{-1580}$

9

Ответ: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2016} < \left(\frac{4}{3}\right)^{-1580}$

N2 $\sqrt[3]{\frac{x}{2015+2016}} = ?$ $x=c$ $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$; $a = \frac{2016+2015}{2016^2+2016\cdot2015+2015^2}$

$b = \frac{2016-2015}{2016^2-2016\cdot2015+2015^2}$.

1) Пусть $2015=p$, $2016=q$, то

$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2+pq+p^2}{p+q}^{\backslash q-p} + \frac{q-pq+p^2}{q-p}^{\backslash q+p}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(q-p)(q^2+pq+p^2)+(q+p)\cdot(q-pq+p^2)}{(p+q)(q-p)}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{q^3\cancel{-p^3}+q^3\cancel{+p^3}}{(p+q)(q-p)}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}q^3}{(p+q)(q-p)} = \frac{q^3}{(q+p)(q-p)}$?

$$\frac{1}{c}=\frac{q^3}{(q+p)(q-p)} \Rightarrow c=\frac{(q+p)(q-p)}{q^3}=x.$$

2) $$\sqrt[3]{\frac{\frac{(q+p)(q-p)}{q^3}}{(q+p)}}=\sqrt[3]{\frac{\cancel{(q+p)}(q-p)}{q^3\cdot\cancel{(q+p)}}}=\sqrt[3]{\frac{q-p}{q^3}}$$

10

3) Вернемся к замене.

$$\sqrt[3]{\frac{q-p}{q^3}}=\sqrt[3]{\frac{2016-2015}{2016^3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2016^3}}=\frac{1}{2016}.$$

Ответ: $\frac{1}{2016}$.

№3 1) $x^2+y^2+4(x-|y|)\leq 0.$ $S=?$

$x^2+y^2+4x-4|y|\leq 0.$

$(x^2+4x+4)+(y^2-4|y|+4)-8\leq 0.$

$(x+2)^2+(|y|-2)^2\leq 8$

$|y|^2=y^2.$

$(-y-2)^2=(y+2)^2$

2) а) $y<0$, то

$(x+2)^2+(-y-2)^2\leq 8$

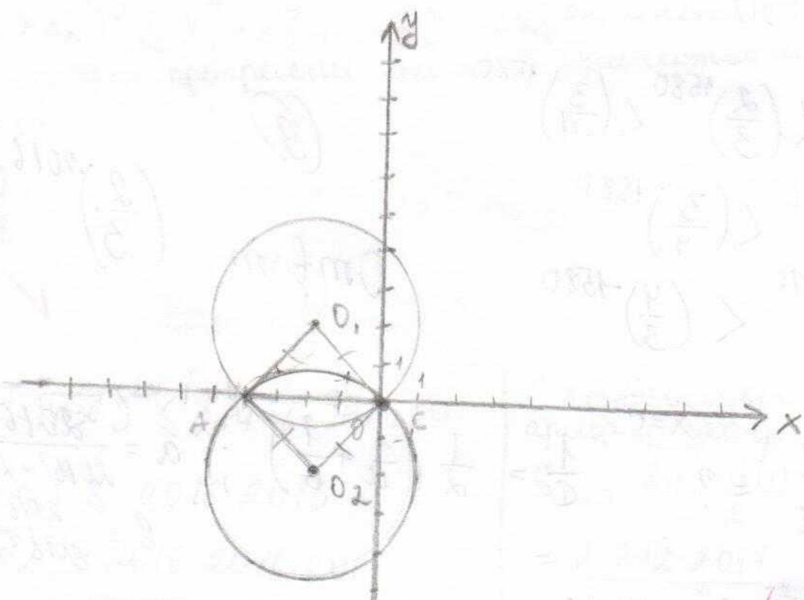
$(x+2)^2+(y+2)^2\leq 8$

б) $y\geq 0$, то

$(x+2)^2+(y-2)^2\leq 8$

Получены уравнение окружности с $R^2=8$

$R=2\sqrt{2}\approx 2,8$



$S_{фигур}=2S_{кр}-2S_{сект}$

3) Рассмотрим $\Delta AO_1C=\Delta AO_2C$

① $AO_1=AO_2$
② $O_1C=O_2C$
③ AC – общ

$\Big\}$ по 3-м сторонам,

По теореме обратной теореме Пифагора: $AO_1^2+AO_1^2=AC^2$

$8+8=16.$

Следует, что $\Delta AO_1C=\Delta AO_2C$ – прямоуг

$\Rightarrow \angle AO_1C = \angle AO_2C = 90°$, т.е $S_{сект} + S_\Delta = \frac{S_{кр}}{4}$

4) $S_{сект} = \frac{S_{кр}}{4} - S_\Delta = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}$

$S_{фигуры} = 2S_{кр} - 2S_{сект} = 2\pi R^2 - \left(\frac{\pi R^2}{2} - R^2\right) = \frac{3}{2}\pi R^2 + R^2 = \frac{3}{2}\pi \cdot 8 - 8 =$

$= 12\pi - 8$.

10

Ответ: $12\pi - 8$

N5. $(x^3+x^2+x+1)(x^{11}+x^{10}+\ldots+x+1) = (x^7+x^6+\ldots+x+1)^2$

1) Мы знаем, что $(x-1)(x+1) = x^2-1$

$(x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$,

$(x-1)(x^3+x^2+x+1) = x^4-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(x^{11}+x^{10}+\ldots+x+1) = x^{12}-1$

$(x-1)(x^7+x^6+\ldots+x+1) = x^8-1$,

Домножим обе части уравнения на $(x-1)^2$

$(x-1)(x^3+x^2+x+1)\cdot(x-1)(x^{11}+x^{10}+\ldots+x+1) = ((x-1)(x^7+x^6+\ldots+x+1))^2$

В ходе умножения получили лишний корень $\boxed{x=1}$!

2) $(x^4-1)(x^{12}-1) = (x^8-1)^2$.

$\cancel{x^{16}} - x^4 - x^{12} \cancel{+1} = \cancel{x^{16}} - 2x^8 \cancel{+1}$

$-x^4 - x^{12} + 2x^8 = 0$.

$-x^4(x^8 - 2x^4 + 1) = 0$.

$-x^4(x^4-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \leftarrow \text{лишний корень} \\ x=-1 \end{array}\right.$

12

Ответ: 0; -1.

N6: $\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}} + x = a \Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}} = a - x \Rightarrow a - x \geq 0$ $\boxed{a \geq x}$!

ОДЗ: $x + \frac{1}{4} \geq 0$, $x \geq -\frac{1}{4}$.

1) Пусть $\sqrt{x+\frac{1}{4}} = t$, при $t \geq 0$, то

$x + \frac{1}{2} = t^2 + \frac{1}{4}$, т.к. $\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)^2 = x + \frac{1}{4}$, $x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = x + \frac{1}{2}$

$x = t^2 - \frac{1}{4}$.

2) $\sqrt{t^2+\frac{1}{4}+t} + t^2 - \frac{1}{4} = a$

$\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2} + t^2 - \frac{1}{4} = a$

$\left|t+\frac{1}{2}\right| + t^2 - \frac{1}{4} = a$

В пункте 1, по ОДЗ: $t \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t + \frac{1}{2} \geq 0$

$\left.\begin{array}{l} x \geq -\frac{1}{4} \\ a \geq x \end{array}\right] \Rightarrow a \geq -\frac{1}{4}$.

$\cancel{t + \frac{1}{2} + t^2 - \frac{1}{2} = a}$

$\cancel{t^2 + t - a = 0}$

$t + \frac{1}{2} + t^2 - \frac{1}{4} = a$.

$t^2 + t + \frac{1}{4} = a$.

$t^2+t+\frac{1}{4}=a$

$(t+\frac{1}{2})^2=a$

$t+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{a}$ ✓

$t=\pm\sqrt{a}-\frac{1}{2}$, но по ОДЗ $t\geqslant 0 \Rightarrow -\sqrt{a}-\frac{1}{2}$ не подх.

$t=\sqrt{a}-\frac{1}{2}$ ✓

3) Вернемся к замене

$x=t^2-\frac{1}{4}$

$x=a-\sqrt{a}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=a-\sqrt{a}$.

$x=a-\sqrt{a}$. ~~прассаееее~~.

4) ~~аааа~~ ~~аеаараеткекр~~ одно решение имеет, когда:

$t^2+t+\frac{1}{4}-a=0$,

$D=0$, т.е

$D=1-4(\frac{1}{4}-a)=1-1+4a=4a$.

15

$4a=0$

$a=0$.

5) при $a=0$, $x=0-\sqrt{0}=0$.

✓

Ответ: $x=a-\sqrt{a}$ при $a\geqslant\frac{1}{4}$ ✓

N 7. $\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\ldots+\sqrt{4030}\leqslant 2015\sqrt{2016}$.

∇ 1) $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2\leqslant x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$ (известная формула)

2) С помощью арифм. прогрессии найдем количество чисел

$2+4+6+\ldots+4030$

$a_n=a_1+d(n-1)$ ✓

$4030=\cancel{2}+2n-\cancel{2}$

$\boxed{n=2015}$

15

3) подставим.

$\frac{1}{2015}(\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\ldots+\sqrt{4030})^2\leqslant 2+4+6+\ldots+4030$.

$\frac{1}{2015}(\sqrt{2}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{4030})^2\leqslant 2016\cdot 2015$.

$(\sqrt{2}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{4030})^2\leqslant 2016\cdot 2015\cdot 2015$.

$\sqrt{2}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{4030}\leqslant\sqrt{2016\cdot 2015^2}$ ✓

$\sqrt{2}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{4030}\leqslant 2015\sqrt{2016}$ ∎

С помощью суммы членов арифм. прогр:

$S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=$

$=\frac{2\cdot 2+2\cdot 2014}{2}\cdot 2015=\frac{2+2014}{1}\cdot 2015=$

$=2016\cdot 2015$ ✓

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 730022

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 3.

N4.

1	2	3	2^2	5	$2\cdot 3$	7	2^3
3^2	$5\cdot 2$	11	$3\cdot 2^2$	13	$7\cdot 2$	$3\cdot 5$	2^4
17	$3^2\cdot 2$	19	$2^2\cdot 5$	37	$11\cdot 2$	23	$3\cdot 2^3$
5^2	$13\cdot 2$	3^3	$7\cdot 2^2$	29	$5\cdot 3\cdot 2$	31	2^5
$11\cdot 3$	$17\cdot 2$	$5\cdot 7$	$2^2\cdot 3^2$	37	$19\cdot 2$	$3\cdot 13$	$2^3\cdot 5$
41	$3\cdot 7\cdot 2$	43	$11\cdot 2^2$	$5\cdot 3^2$	$2\cdot 23$	47	$3\cdot 2^4$
7^2	$5^2\cdot 2$	$17\cdot 3$	$2^3\cdot 3^2$	53	$3^2\cdot 2$	$11\cdot 5$	$2^3\cdot 7$
$19\cdot 3$	$29\cdot 2$	59	$5\cdot 3\cdot 2^2$	61	$31\cdot 2$	$11\cdot 23$	2^6

↑
числа от 1 до 64 на шахматная доске.

1) номер шашки : номер клетки

2) число 1 будет перевернуто 1 раз => 1 - дамка ✓

3) Нечетное количество раз будут перевернуты шашки, номера которых имеют нечетное количество делителей.

4) т.е. это полные квадраты ~~это~~ и 1 и 2

5) В таблице указаны все числа от 1 до 64 (разложенные). По ней можно увидеть сколько делителей имеет каждое из чисел.

Ответ: перевернуты будут шашки под номерами:
{1;2;9;16;25;36;49;64}. ✓

12

Итого: 8 шашек являются дамками.
✓