Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

227065

+1а
+1а
+1а

Шифр ____________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Лукьянов Павел Александрович

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, лицей N1581

Регистрационный номер WM 1107

Вариант задания 11

Дата проведения "27" февраля 2016 г.

Подпись участника ____________

С работой ознакомлен 04.03.2016

89 (восемьдесят девять)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
										Σ
8	4	6	8	8	10	12	11	10	12	89

Шифр 227065

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 11

N5.

6 5 $\begin{cases} 4\cos^2 x\cdot\sin^2\frac{x}{6}+4\sin\frac{x}{6}-4\sin^2 x\cdot\sin\frac{x}{6}+1=0 \ (1) \\ \sin\frac{x}{4}=\sqrt{\cos y} \ (2) \end{cases}$

(1) $4\cos^4 x\sin^2\frac{x}{6}+4\sin\frac{x}{6}(1-\sin^2 x)+1+4\cos^2 x\sin^2\frac{x}{6}-$

$-4\cos^4 x\sin^2\frac{x}{6}=0$

$\Rightarrow 4\cos^4 x\sin^2\frac{x}{6}+4\cos^2 x\sin\frac{x}{6}+1+4\cos^2 x\sin^2\frac{x}{6}(1-\cos^2 x)=$

$=0$

$\Rightarrow (2\cos^2 x\sin\frac{x}{6}+1)^2+4\cos^2 x\cdot\sin^2\frac{x}{6}(1-\cos^2 x)=0$

$\forall x\in\mathbb{R}\ \ 1-\cos^2 x\geq 0 \Rightarrow$ ур-ние (1) имеет решение, если:

$\begin{cases} 2\cos^2 x\sin\frac{x}{6}=-1 \\ 4\cos^2 x\sin^2\frac{x}{6}(1-\cos^2 x)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\cos^2 x\sin\frac{x}{6}=-1 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \sin\frac{x}{6}=0 \\ \cos^2 x=1 \end{array}\right. \end{cases}$

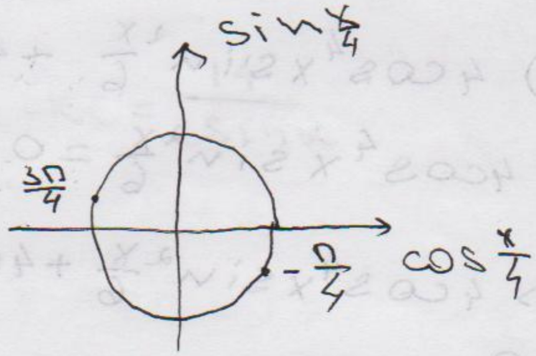
$\begin{cases} \sin\frac{x}{6}=-\frac{1}{2} \\ \cos^2 x=1 \end{cases}$ ✓

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{6}x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \frac{1}{6}x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\ x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-\pi+12\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=-5\pi+12\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\ x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\pi+12\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\ \checkmark\\ x=-5\pi+12\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.\ \checkmark\end{array}\right.$$

(2) $\left\{\begin{array}{l}\sin\frac{x}{4}>0\\ \sin^2\frac{x}{4}=\cos y\end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-\pi+12\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=-5\pi+12\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\ \sin\frac{x}{4}>0\\ \sin^2\frac{x}{4}=\cos y\end{array}\right.$$



$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\frac{x}{4}=-\frac{\pi}{4}+3\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \frac{x}{4}=-\frac{5\pi}{4}+3\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\ \sin\frac{x}{4}>0\\ \sin^2\frac{x}{4}=\cos y\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{4}=\frac{3\pi}{4}+3\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \sin^2\frac{x}{4}=\cos y\end{array}\right.$$

к ~ четное число

из другой серии корней х?

$$\left\{\begin{array}{l}x=3\pi+12\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \cos y=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

8

$$\left\{\begin{array}{l}x=3\pi+12\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi t,\ t\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Ответ: $(3\pi+12\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi t,\ t\in\mathbb{Z})$.

№6.

$f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{\log^{-1}_{0.5}\left(\frac{\sin x}{\sin x+7}\right)}$

$D(f): \begin{cases} \dfrac{\sin x}{7+\sin x} > 0 \\ \log_{0,5}\left(\dfrac{\sin x}{\sin x+7}\right) > 0 \end{cases}$

Введем ф-цию $g(\sin x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + 7}$, $g(\sin x) > 0$

] $t = \sin x$, $t \in [-1; 1]$

$\begin{cases} g(t) = \dfrac{t}{t+7} \\ \dfrac{t}{t+7} > 0 \\ t \in [-1; 1] \end{cases}$

$\begin{cases} g(t) = \dfrac{t}{t+7} \\ t \in (0; 1] \end{cases}$

$g'(t) = \dfrac{t+7-t}{(t+7)^2} = \dfrac{7}{(t+7)^2}$

При $t \in (0; 1]$ $g(t)$ возр.

$\Rightarrow g(\sin x) \in (g(0); g(1)]$

$0 < g(\sin x) \le \frac{1}{8}$

$\begin{cases} \log_{0,5}(g(\sin x)) \in [3; +\infty) \\ \log_{0,5}(g(\sin x)) > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \log_{0,5}(g(\sin x)) \in [3; +\infty)$,

$y = \log_{0,5} k$ - убыв. ф-ция.

$0 < \log^{-1}_{0,5}(g(\sin x)) \le \frac{1}{3}$

$0 < \sqrt{\log^{-1}_{0,5}(g(\sin x))} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$

$0 < \operatorname{arctg} \sqrt{\log^{-1}_{0,5}\left(\dfrac{\sin x}{\sin x+7}\right)} \le \dfrac{\pi}{6}$, $y = \operatorname{arctg} p$ - возр. ф-ция.

$E(f): (0; \frac{\pi}{6}]$

Ответ: $E(f): (0; \frac{\pi}{6}]$.

10

№7.

Дано:

$ABCD$ – ромб

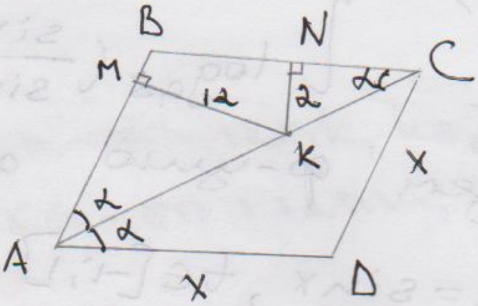
$K \in AC$

$\rho(K; AB) = 12 = KM$

$\rho(K; BC) = 2 = KN$

$r_{ABC} = 5$

Найти: AB, r.



Решение:

1. Пусть $AB = x$, $\angle BAC = \alpha$

$\Rightarrow \angle ACB = \alpha$, т.к. ΔABC – равноб.

$\angle ACB = \angle CAD = \alpha$ – накр. леж.

Из прямоуг. $\Delta\Delta$ AMK и KNC $\Rightarrow$:

$$AK = \frac{MK}{\sin\alpha} = \frac{12}{\sin\alpha}, \quad KC = \frac{2}{\sin\alpha} \;\Rightarrow\; AC = AK + KC = \frac{14}{\sin\alpha}$$

2. По т. синусов (ΔABC):

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\angle ABC}$$

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$$

$$AC = \frac{x\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2x\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{14}{\sin\alpha} = 2x\cos\alpha$$

$$14 = x\sin 2\alpha.$$

3. $$r_{ABC} = \frac{S_{ABC}}{p_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}x^2\sin(180^\circ - 2\alpha)}{\frac{1}{2}(2x + 2x\cos\alpha)} = \frac{x\sin 2\alpha}{2(1+\cos\alpha)} = 5$$

$$\frac{14}{2(1+\cos\alpha)} = 5$$

$$1{,}4 = 1 + \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = 0{,}4 = \frac{2}{5} \;\Rightarrow\; \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

227065

Шифр

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 11

$$x = \frac{14}{\sin 2\alpha} = \frac{14}{2\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{25\cdot 7}{2\sqrt{21}} = \frac{25\cdot 7\cdot\sqrt{21}}{2\cdot 21} = \frac{25\sqrt{21}}{6}.$$

Радиус окр, впис. в ромб равен половине высоты ромба.

$$r = \frac{h}{2} = \frac{x\sin 2\alpha}{2} = 7.$$

12

Ответ: $AB = \frac{25\sqrt{21}}{6}$, $r = 7$.

№2.

$$\frac{\sqrt{x^2-16}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2-16}} < \frac{16}{15}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2-16>0 \end{cases}$

$\Rightarrow x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$

] $t = \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}$

$$t - \frac{1}{t} < \frac{16}{15}$$

$$\frac{15t^2-15}{t} < 16$$

$$\frac{15t^2-16t-15}{t} < 0$$

$$\frac{15(t-\frac{5}{3})(t+\frac{3}{5})}{t} < 0$$

$15t^2-16t-15=0$

$D_1 = 64+225 = 289$

$\left[\begin{array}{l} t = \frac{8+17}{15} \\ t > \frac{8-17}{15} \end{array}\right.$

$-\quad +\quad -\quad +$

$-\frac{3}{5} \qquad 0 \qquad \frac{5}{3} \qquad t$

$t \in (-\cancel{\infty}; -\frac{3}{5}) \cup (0; \cancel{\frac{5}{3}})$

$-1 \qquad 1$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{x^2-16}}{x} < -\frac{3}{5} \quad (1) \\ 0 < \frac{\sqrt{x^2-16}}{x} < \frac{5}{3} \quad (2) \end{array}\right.$$

(1) Очевидно, что $x<0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-16} < -\frac{3}{5}x \\ x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-16 < \frac{9}{25}x^2 \\ x<0 \\ x^2-16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{16}{25}x^2 < 16 \\ x<0 \\ x^2 \geq 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 < 25 \\ x \leq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-5;5) \\ x \leq -4 \end{cases} \Rightarrow x \in (-5;-4]$$

С учетом ОДЗ: $\begin{cases} x \in (-5;-4] \\ \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-4 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x \in (-5;-4)$

(2) Очевидно, что $x>0$.

$$\begin{cases} x>0 \\ 0 < \sqrt{x^2-16} < \frac{5x}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x^2-16 < \frac{25x^2}{9} \\ x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{25x^2}{9} > x^2-16 \\ x^2-16>0 \\ x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{16x^2}{9} > -16 \\ x>4 \end{cases} \Rightarrow x>4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-5;-4) \\ x>4. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-5;-4) \cup (4;+\infty)$.

4

N10.

Дано:

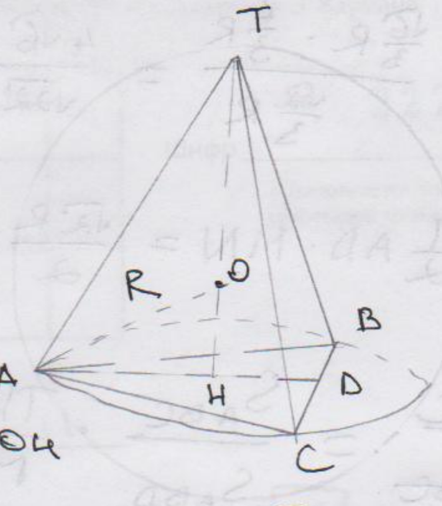
TABC – прав. пир.

R – радиус сферы

$TH = \frac{4R}{3}$

$\alpha: AD \subset \alpha$
AD – медиана $\triangle ABC$
Найти: $S_{сеч.\ \alpha}$ наим.

$\frac{V_1}{V_2}$, где $V_1 = V_{AMDC}$.

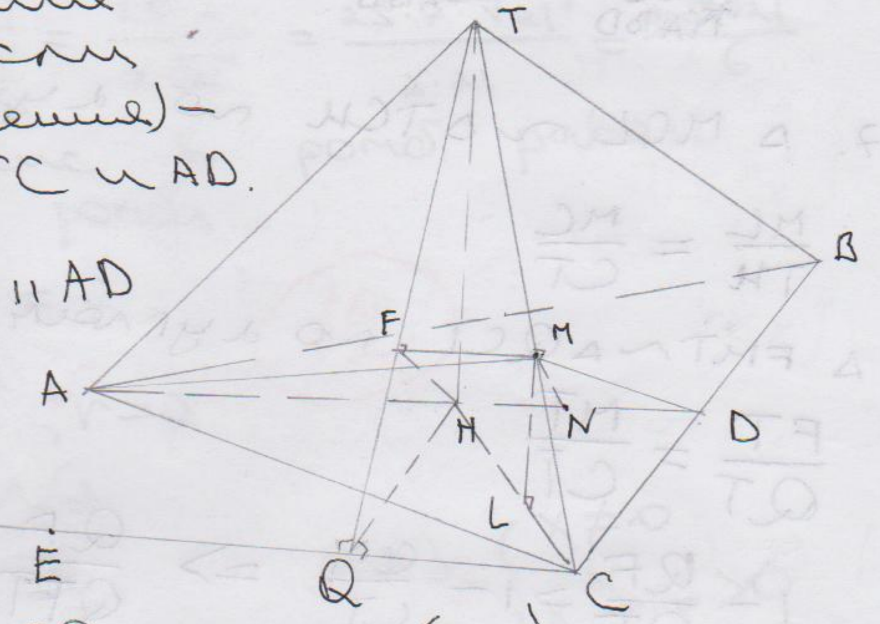


Решение:

1. ∃ сечение проходит через т. M лежащ. на ребре TC.
сечением явл. треуг. AD – одна из его сторон
Площадь сечения будет наим., если высота $\triangle AMD$ (сечения) – общий $\perp$ кр. TC и AD.

~~2. HQ~~ пров

2. В (ABC) пров. $CE \parallel AD$



∃ $HQ \perp CE$.
по т. о 3⊥:
$TQ \perp CE$
$\Rightarrow CE \perp (TQH)$
В (TQH) пров. $FH \perp TQ \Rightarrow FH \perp (TEC)$.

3. В (TQC) пров. $FM \parallel QC \Rightarrow FM \parallel AD$
В (FMN) пров $MN \parallel FH$ ($MN = FH$)
MN – общий $\perp$ TC и AD.

AMD – искомое сечение.

4. $OH = \frac{4R}{3} - R = \frac{R}{3}$
по т. Пифагора ($\triangle AOH$): $AH = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$
$AD = \frac{2}{3}AH = \sqrt{2}R$ – по св-ву медиан.
$AC = \frac{AD}{\sin 60^\circ} = \sqrt{2}R \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R$.
$CD = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R = HQ$ – т.к. HQCD – параллелогр.
$HQ = \frac{\sqrt{6}}{3}R$

5. По т. Пифагора ($\triangle TQH$):
$TQ = \sqrt{HQ^2 + TH^2} = \sqrt{\frac{2}{3}R^2 + \frac{16}{9}R^2} = \frac{\sqrt{22}}{3}R$.

$2S_{TQK} = TQ \cdot HF = TH \cdot QH$

$$HF = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}R \cdot \frac{4}{3}R}{\frac{\sqrt{22}}{3}R} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{22}}R = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{11}}R = \frac{4\sqrt{33}}{33}R = MN$$

$$S_{сеч.} = \frac{1}{2}AD \cdot MN = \frac{\sqrt{2}R}{2} \cdot \frac{4\sqrt{33}}{33} = \frac{2\sqrt{66}}{33}R^2$$

6. $$\frac{V_{TABC}}{V_{\cancel{TABC}\,MABD}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} \cdot \frac{TH}{ML} = \frac{2TH}{ML} \quad (ML \parallel TH,\ ML \perp (ABD))$$

7. $\triangle MCL \sim \triangle TCH$ по 2 углам

$$\frac{ML}{TH} = \frac{MC}{CT}$$

$\triangle FMT \sim \triangle QCT$ по 2 углам.

$$\frac{FT}{QT} = \frac{MT}{CT}$$

$$1 - \frac{QF}{QT} = 1 - \frac{CM}{CT} \Rightarrow \frac{QF}{Q\cancel{F}T} = \frac{CM}{CT}$$

по т. Пифагора ($\triangle FQH$).

$$QF = \sqrt{\frac{6}{9}R^2 - \frac{16 \cdot 6}{9 \cdot 22}R^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{\frac{6}{22}}R = \frac{6R}{3\sqrt{22}} = \frac{2}{\sqrt{22}}R$$

$$\frac{QF}{QT} = \frac{2R}{\sqrt{22}} : \frac{\sqrt{22}R}{3} = \frac{6}{22} = \frac{ML}{TH} = \frac{CM}{CT}$$

12

$$\frac{V_{TABC}}{V_{MABD}} = 2 \cdot \frac{TH}{ML} = \frac{22}{3}$$

$$\frac{V_2 + V_1}{V_1} = \frac{22}{3} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{19}{3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{19}$$

Ответ: $S_{сеч.} = \frac{2\sqrt{66}}{33}R^2$, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{19}$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 227065

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 11 №9

$4x^2-8|x|+(2a+|x|+x)^2=4$

① ~~$x \geq 0$~~ $x>0$

$4x^2-8x+(2a+2x)^2=4$

$4x^2-8x+4a^2+8ax+4x^2-4=0$

$2x^2-2(1-a)x+a^2-1=0$

$2x^2+2(a-1)x+a^2-1=0$ (1)

$D_1=(a-1)^2-2(a^2-1)=a^2-2a+1-2a^2+2=-a^2-2a+3=$

$=-(a-1)(a+3)$

$x_{1,2}=(1-a\pm\sqrt{-a^2-2a+3})/2$

$x_B=\frac{1-a}{2}$

$f(0)=a^2-1=(a-1)(a+1)$

D_1: $-$ (-3) $+$ (1) $-$ $\to a$

x_B: $+$ (1) $-$ $\to a$

$f(0)$: $+$ (-1) $-$ (1) $+$ $\to a$

Возможно несколько случаев, при которых ур-ние (1) имеет корни, больше нуля.

$f(0)<0 \quad a\in(-1;1) \quad x_1=1-a+\sqrt{-a^2+2a+3}$

$\begin{cases} D>0 \\ f(0)=0 \\ x_B>0 \end{cases} \quad a=-1 \quad 1\text{ р. } x_1$

$\begin{cases} D>0 \\ f(0)>0 \\ x_B>0 \end{cases} \quad a\in(-3;-1) \quad 2\text{ р. } x_1, x_2$

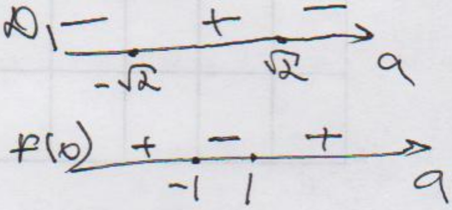
$\begin{cases} D=0 \\ x_B>0 \end{cases} \quad a=-3 \quad x=4$

(2) $x \le 0$

$4x^2 + 8x + 4a^2 - 4 = 0$

$x^2 + 2x + a^2 - 1 = 0$

$D_1 = 1 - a^2 + 1 = 2 - a^2 = (\sqrt{2} - a)(\sqrt{2} + a)$



$x_B = -1$

$f(0) = a^2 - 1$

$x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2 - a^2}$

Возможно несколько случаев, при которых ур-ние имеет неотриц. корни.

$f(0) < 0 \quad a \in (-1; 1) \quad$ 1 р. x_4

$\begin{cases} D > 0 \\ x_B < 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \Rightarrow a \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$ 2 р. x_3, x_4

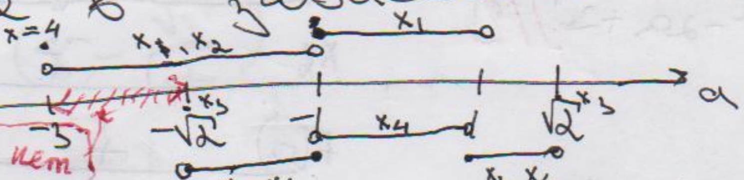
$\begin{cases} D > 0 \\ x_B > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad \varnothing$

$\begin{cases} D > 0 \\ x_B < 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad a = \pm 1$ 2 р. x_3, x_4

$\begin{cases} D = 0 \\ x_B < 0 \end{cases} \quad a = \pm\sqrt{2}$ 1 р. x_3

$\begin{cases} D = 0 \\ x_B = 0 \end{cases} \quad \varnothing$

Покажем, какие корни имеет ур-ние в зависимости от a.



10

В ответе нет

Ответ: при $a \in (-1; 1) \cup (1; \sqrt{2})$ ур-ние имеет 2 разл корня.

$a \in (-1; 1]$ $x = 1 - a + \sqrt{-a^2 + 2a + 3}$, $x = -1 - \sqrt{2 - a^2}$

$a \in (1; \sqrt{2})$ $x = -1 \pm \sqrt{2 - a^2}$. V

N 4.

$(\log_x^2 (3x - 2) - 4)(\sin \pi x - 1) \le 0$

$\forall x \in R \quad \sin \pi x - 1 \le 0$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \\ 3x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x \ne 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin \pi x = 1 \\ x \in (\frac{2}{3}; 1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \quad (1) \\ (\log_x (3x - 2) - 2)(\log_x (3x - 2) + 2) \ge 0 \quad (2) \end{array} \right.$

(1) $\begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\in Z \\ x \neq 1 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + 2n, n\in \mathbb{N}.$

(2) На ОДЗ неравенство эквивал.:

$$(x-1)(3x-2-x^2)(x-1)\left(3x-2-\frac{1}{x^2}\right) \geq 0$$

$$\frac{(x-1)^2(x^2-3x+2)(3x^3-2x^2-1)}{x^2} \leq 0$$

	3	-2	0	-1
1	3	1	1	0

$$\frac{(x-1)^4(x-2)(3x^2+x+1)}{x^2} \leq 0$$

$3x^2+x+1>0$
$\forall x \in \mathbb{R}$

8

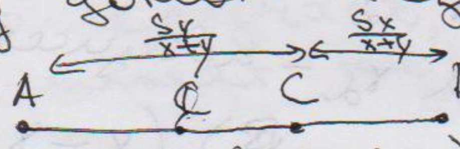
$\Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;2] \\ x\neq 0 \end{cases}$

С учетом ОДЗ: $\begin{cases} x\in(-\infty;0)\cup(0;2] \\ x>\frac{2}{3} \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in(\frac{2}{3};1)\cup(1;2]$

Ответ: $(\frac{2}{3};1)\cup(1;2]\cup\{\frac{1}{2}+2n, n\in\mathbb{N}\}$.

N1.

$\exists$ x - скорость Васи и Пети, y - скорость Коли
S - расстояние между домом и озером.



$t_{KB} = \frac{S}{x+y}$ - время до встречи (C - место встречи)

$t_1 = \frac{S}{x+y} + \frac{Sy}{x+y}\cdot\frac{1}{y} = \frac{2S}{x+y}$ - время движения Васи.

За время, пока Коля подвозил Васю Петя прошел $\frac{Sx}{x+y}$ за время $\frac{S}{x+y}$
Аналогично случаю с Васей

$t_{AC} = \frac{2Sy}{(x+y)^2}$ - время движения Пети от A до C

$t_{\text{пеш}} = \frac{S}{x+y} + \frac{2Sy}{(x+y)^2}$

по усл. $t_{\text{пеш}} = \frac{4}{3} t_1$

$$\frac{S}{x+y} + \frac{2Sy}{(x+y)^2} = \frac{2S}{x+y} \cdot \frac{4}{3}$$

$$x+y+2y = (2x+2y)\cdot\frac{4}{3}$$

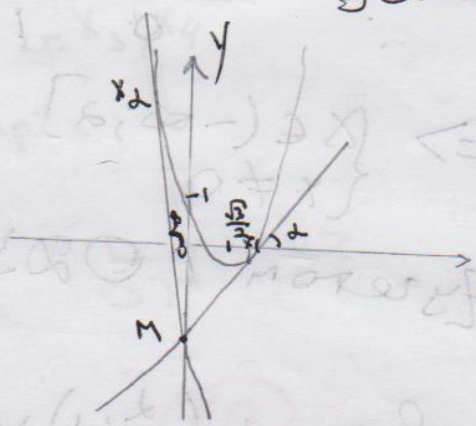
$$3x+9y = 8x+8y$$

$$5x = y$$

$$t_2 = \frac{S}{x}$$

$$t_1 = \frac{2S}{x+y} = \frac{S}{3x}$$

эскиз



$$\frac{t_2}{t_1} = 3$$

Ответ: в 3 раза.

(8)

№8.

$$y = 0{,}5\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{8}$$

$$y' = x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

] x_1 и x_2 – абсциссы т. кас.

$$y_{к.1} = \left(x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x - x_1) + \frac{x_1^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{3}{8}$$

$$y_{к.1} = \left(x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x - \frac{x_1^2}{2} + \frac{3}{8}$$

$$y_{к.2} = \left(x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x - \frac{x_2^2}{2} + \frac{3}{8}$$

$M \in y_{к.1}$
$M \in y_{к.2}$, $M(0; y_M)$ $\Rightarrow -\frac{x_1^2}{2} + \frac{3}{8} = -\frac{x_2^2}{2} + \frac{3}{8}$

$$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_2 = -x_1$$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 227865

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 11

$tg 60^\circ = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$ — тангенс угла между кас.

$\sqrt{3} = \left|\frac{2x_1}{1+(x_1-\frac{\sqrt{3}}{2})(x_1+\frac{\sqrt{3}}{2})}\right|$ $\quad k_2 = -x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$k_1 = x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{3} =$

$$tg 60^\circ = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

$$\sqrt{3} = \frac{-2x_1}{1-(x_1^2-\frac{3}{4})}$$

$$\sqrt{3} = \frac{-8x_1}{7-4x_1^2}$$

$$7\sqrt{3} - 4\sqrt{3}x_1^2 = -8x_1$$

$$4\sqrt{3}x_1^2 - 8x_1 - 7\sqrt{3} = 0$$

$$D_1 = 16 + 28\cdot 3 = 100$$

11

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{4+10}{4\sqrt{3}} \\ x_1 = \frac{4-10}{4\sqrt{3}} \text{ (не уд.)} \end{array}\right. \Rightarrow x_1 = \frac{7}{2\sqrt{3}}$$

чему не удовлетворяет?

$y_{к.1}(0)$

$$y_M = \frac{49}{12} - \frac{x_1^2}{2} + \frac{3}{8} = -\frac{49}{24} + \frac{9}{24} = -\frac{40}{24} = -\frac{5}{3}$$

$\Rightarrow M(0; -\frac{5}{3})$.

Ответ: $M(0; -\frac{5}{3})$; $M(0; 0)$

№2 3

$\exists\, b_1$ – 1-й член, q – знам. прогр.

$S_5+S_3+S_7 = b_1(q^2+q^4+q^6) = b_1q^2(1+q^2+q^4)$

$\Rightarrow b_1q^2(1+q^2+q^4) = 7371\cdot 2^{2016}$

$b_1q^2(1+q^2+q^4) = 91\cdot 3^4\cdot 2^{2016}$

$(1+q^2+q^4)$ – нечетное число $(q\in\mathbb{N})$.

$(91\cdot 3^4) \vdots (1+q^2+q^4)$

$(1+8^2+8^4) < \frac{7371}{2} \Rightarrow q<8.$

Очевидно, что $q\neq 5, q\neq 7$.

1. $q=6$

$2^{2016}(7371) \not\vdots\; q^2(1+q^2+q^4)$

2. $q=4$

$1+16+256=273$

$2^{2016}(7371) \vdots q^2(1+q^2+q^4) \quad \Rightarrow q=4.$

3. $q=3$

$1+9+81=91$

$(2^{2016}\cdot 7371) \vdots 91 \Rightarrow q=3$

6

4. $q=1$ – подходит

5. $q=2$ $\quad 1+q^2+q^4 = 1+5+16=22 \quad 7321 \not\vdots 22$.

Ответ: $q=4, q=1, q=3$. $q=2$.