+1/Ли

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1 неу

227407

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Устинова Дарья Тимуровна

Город, № школы (образовательного учреждения) Раменское, „Гимназия г. Раменское" 11 класс

Регистрационный номер ШМ 3203

Вариант задания 14

Дата проведения "27" февраля 2016 г.

Подпись участника ____________

(1)

(семьдесят три)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
8	6	2	8	10	8	10	10	11	0	73

227407

Шифр

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 14

№1.

v_1 - ск. Васи и Пети

v_2 - ск. Коли

$\frac{T_B}{t_B}$ - ?

$t_П = \frac{13}{10} t_B$

$$\begin{cases} t_B = \frac{S}{v_1+v_2} \cdot 2 \\ t_П = \frac{S}{v_1+v_2} + \frac{S'}{v_1+v_2} \end{cases}$$

$$S' = S - \frac{S v_1}{v_1+v_2} = S\left(\frac{v_1+v_2-v_1}{v_1+v_2}\right) = \frac{S v_2}{v_1+v_2}$$

$$t_П = \frac{S}{v_1+v_2} + \frac{2 S v_2}{(v_1+v_2)^2} = \frac{13}{10} \cdot \frac{2 S}{v_1+v_2}$$

$$\frac{v_1+2v_2}{v_1+v_2} = \frac{13}{5}$$

$$5v_1 + 10v_2 = 13v_1 + 13v_2$$

$$2v_2 = 8v_1 \Rightarrow v_2 = 4v_1$$

$$\frac{T_B}{t_B} = \frac{S(v_1+v_2)}{v_1 2S} =$$

$$\frac{T_B}{t_B} = \frac{v_1+v_2}{2v_1} = \frac{5v_1}{2v_1} = 2,5$$

Ответ: в 2,5 раза ✓

(8)

№2.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} < \frac{9}{20}$$

$x^2-9>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$

$x \neq 0$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} = t$$

$$t - \frac{1}{t} < \frac{9}{20}$$

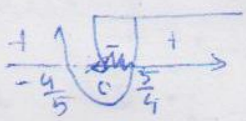
1) $t>0 \Rightarrow x>0$ т.к. $\sqrt{x^2-9}>0$

$x>3$

$20t^2-9t-20<0$

$D = 81+1600 = 1681$

$$t = \frac{9\pm 41}{40} \nearrow \frac{5}{4}, \searrow -\frac{4}{5}$$



$t\in\left(0;\frac{5}{4}\right)$

$$0 < \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} < \frac{5}{4}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} > 0 \Rightarrow x>3$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} < \frac{5}{4}$$

$4x < 5\sqrt{x^2-9}$

$16x^2 < 25x^2-225$

$9x^2>225$

$\left.\begin{matrix} x^2>25 \\ x>3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x>5$

2) $t<0 \Rightarrow x<0 \Rightarrow x<-3$

$20t^2-9t-20>0$

$t_1=\frac{5}{4} \quad t_2=-\frac{4}{5}$

$t\in\left(-\infty;-\frac{4}{5}\right)$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} < -\frac{4}{5}$$

$5x < -4\sqrt{x^2-9}$

$25x^2 < 16x^2-144$

$9x^2<-144 \quad \varnothing$

Ответ: $x\in(5;+\infty)\cup(-\infty;-3)$.

6

№ 4.

$$\left(\log_x^2(6x-5)-4\right)(\sin \pi x+1) \geq 0$$

$x \neq 1$

$x > 0$

$6x-5>0 \Rightarrow x > \frac{5}{6}$

$\sin \pi x \in [-1;1] \to \sin\pi x+1 \in [0;2]$

$$\left[\begin{array}{l} \sin \pi x = -1 \quad 0 \\ \log_x^2(6x-5)-4 \geq 0 \quad ② \end{array}\right.$$

1) $\sin \pi x = -1$

$\pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z$

$x = -\frac{1}{2} + 2n, \ n \in Z$

$x > \frac{5}{6}$ $\quad x = -\frac{1}{2} + 2k, \ k \in N$

2) $\log_x^2(6x-5) \geq 4$

$$\left[\begin{array}{l} \log_x(6x-5) \geq 2 \Rightarrow 6x-5 \geq x^2 \\ \log_x(6x-5) \leq -2 \Rightarrow 6x-5 \leq \frac{1}{x^2} \end{array}\right.$$

$x^2-6x+5 \leq 0$

$\frac{D}{4} = 9-5=4$

$x = 3 \pm 2 \begin{array}{l} \nearrow 5 \\ \searrow 1 \end{array}$

$x \in (1;5]$.

$6x-5 \leq \frac{1}{x^2}$

$6x^3-5x^2-1 \leq 0$

	6	-5	0	-1
1	6	1	1	0

$(x-1)(6x^2+x+1) \leq 0$

$6x^2+x+1>0$, т.к. $D<0$

$x<1 \Rightarrow x \in \left(\frac{5}{6};1\right)$

Ответ: $x \in \left(\frac{5}{6};1\right) \cup (1;5] \cup \left\{-\frac{1}{2}+2k\right\}, \ k \geq 3, k \in N$

V 8

№5.

$$\begin{cases} 4\cos^2 2x \sin^2\frac{x}{6} + 4\sin\frac{x}{6} - 4\sin^2 2x \sin\frac{x}{6} + 1 = 0 \\ \sqrt[4]{3}\sin\frac{x}{4} = \sqrt{\cos y} \end{cases}$$

$\cos y \geq 0, \ \sin\frac{x}{4} \geq 0$

$4\cos^2 2x \sin^2\frac{x}{6} + 4\sin\frac{x}{6}(1 - \sin^2 2x) + 1 = 0$

$4\cos^2 2x \sin^2\frac{x}{6} + 4\sin\frac{x}{6}\cos^2 2x + 1 = 0$

$\frac{D}{4} = 4\cos^4 2x - 4\cos^2 2x = 4\cos^2 2x \ (\cos^2 2x - 1)$

$\Rightarrow D \leq 0$

$\cos^2 2x \in [0; 1] \Rightarrow \cos^2 2x - 1 \in [-1; 0]$ Для того, чтобы были решения нужно, чтобы $D \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \cos^2 2x = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -1 \end{array}\right.$

$4\sin^2\frac{x}{6} + 4\sin\frac{x}{6} + 1 = 0$

$(2\sin\frac{x}{6} + 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin\frac{x}{6} = -\frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \frac{x}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right.$ $\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -\pi + 12\pi n \\ x = 7\pi + 12\pi n \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -1 \end{array}\right. \end{cases}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

$\cos 2x = \pm 1$

$2x = \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi n}{2}$

Мн-ва $\left[\begin{array}{l} x = -\pi + 12\pi n \\ x = 7\pi + 12\pi n \end{array}\right.$ ✓ яв. подмножествами мн-ва

$x = \frac{\pi n}{2} \Rightarrow$ достаточно выполнения условия

$\left[\begin{array}{l} x = -\pi + 12\pi n \\ x = 7\pi + 12\pi n \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{4} = -\frac{\pi}{4} + 3\pi n \\ \frac{x}{4} = \frac{7\pi}{4} + 3\pi n \end{array}\right.$ $\quad \sin\frac{x}{4} \geq 0 \Rightarrow n \,\vdots\, 2$

2

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

227407

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 14

N5 (продолжение)

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{4} = -\frac{\pi}{4} + 3\pi(2k+1) \\ \frac{x}{4} = \frac{7\pi}{4} + 3\pi(2k+1) \end{array}\right. \quad k \in Z \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\pi + 12\pi(2k+1) \\ x = 7\pi + 12\pi(2k+1) \end{array}\right.$$

$$\sin\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

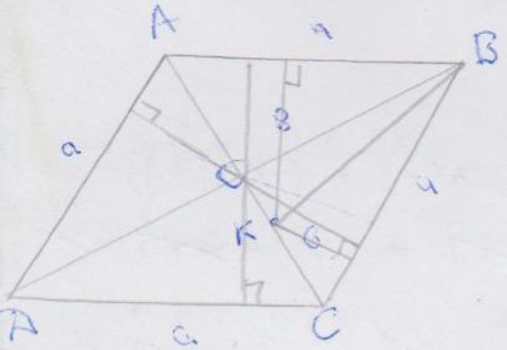
$$\sqrt{3}\sin^2\frac{x}{4} = \cos y$$

$$\cos y = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi l,\ l \in Z$$

Ответ: $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = -\pi + 12\pi(2k+1) \\ 7\pi + 12\pi(2k+1) \end{array}\right. ,\ k \in Z \\ \left[\begin{array}{l} y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l, \\ y = \frac{\pi}{6} + 2\pi l \end{array}\right. ,\ l \in Z \end{array}\right.$

V (10)

N 7.



AB = a

ABCD - ромб

$r_{ABC} = 5$

$r_{вп}$ - ? AB - ?

Решение

$AC = d_1$, $BD = d_2$. $S = S_{ABCD}$, $d_1 \perp d_2$

$$r_{ABC} = \frac{S\cdot 2}{2(2a+d_1)} = \frac{S}{2a+d_1} = 5$$

$$S_{ABC} = S_{ABK} + S_{BKC} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot a + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot a = 7a \Rightarrow S = 14a$$

$\frac{14a}{2a+d_1} = 5$ $\quad 14a = 10a + 5d_1$

$4a = 5d_1 \Rightarrow d_1 = \frac{4a}{5}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot d_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot d_1 = 7a$

$\frac{1}{4} d_2 \cdot \frac{4a}{5} = 7a \quad \Rightarrow d_2 = 35$

$\sin OBC = \frac{2a}{5a} = \frac{2}{5} \Rightarrow \cos OBC = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5} =$

$= \frac{d_2}{2 \cdot a} = \frac{35}{2a}$

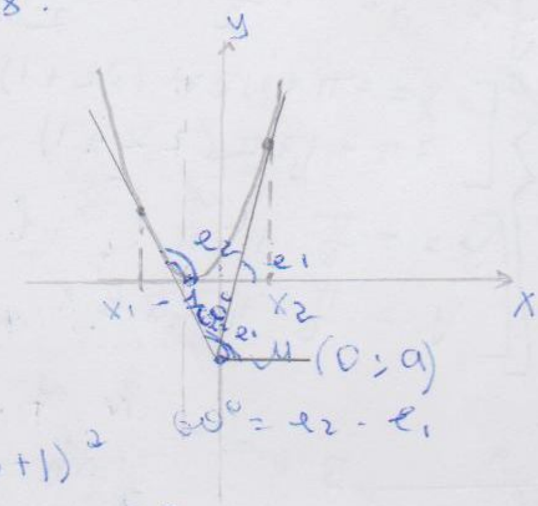
$a = \frac{35 \cdot 5}{2\sqrt{21}} = \frac{35 \cdot 5\sqrt{21}}{2 \cdot 21}$ $\cancel{21} \to 3$, $35 \to 5$ $= \frac{25\sqrt{21}}{6}$

~~[illegible]~~ O - ц. впис. в ABCD окр $\Rightarrow$ $r_{впис} = \frac{H}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot H \cdot a = 14a \Rightarrow \frac{1}{2} H = 14 \Rightarrow r_{впис} = 14$

Ответ: $a = \frac{25\sqrt{21}}{6}$; $r_{впис} = \cancel{14}$ 7. 10

N 8.



$y = (x+1)^2 \qquad a - ?$

$e_2 - e_1 = 60^\circ$

$y' = 2x + 2$

$y_{кас} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y_{кас} = (2x_0+2)(x - x_0) + (x_0+1)^2$

Если $x = 0$, то $y_{кас 1} = y_{кас 2}$

$(2x_1+2)(-x_1) + (x_1+1)^2 = (2x_2+2)(-x_2) + (x_2+1)^2$

$-2x_1^2 - \cancel{2x_1} + x_1^2 + \cancel{2x_1} + \cancel{1} = -2x_2^2 - \cancel{2x_2} + x_2^2 + \cancel{2x_2} + \cancel{1}$

$-x_1^2 = -x_2^2$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = -x_2 \\ x_1 = x_2 \end{array}\right.$

$x_1 \neq x_2$, т.к. $\Delta e \neq 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$

$f'(x_1) = tg\,e_1 = 2x_1 + 2 = -2x_2 + 2$

$f'(x_2) = tg\,e_2 = 2x_2 + 2 = -2x_1 + 2$

$$tg(e_2 - e_1) = \frac{tg\,e_2 - tg\,e_1}{1 + tg\,e_1 tg\,e_2} = \sqrt{3}$$

$$\frac{2x_2 + \cancel{2} + 2x_2 - \cancel{2}}{1 + 4(x_2+1)(-x_2+1)} = \sqrt{3}$$

$$\frac{4x_2}{5 - 4x_2^2} = \sqrt{3}$$

$\frac{14}{2} = 7$ $5\sqrt{3} - 4\sqrt{3}x_2^2 = 4x_2$

$4\sqrt{3}x_2^2 + 4x_2 - 5\sqrt{3} = 0$

$\frac{D}{4} = 4 + 60 = 64$

$x_2 = \frac{-2 \pm 8}{4\sqrt{3}}$ $\nearrow \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\searrow -\frac{5\sqrt{3}}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

$a = -x_0^2 + 1$

$a = -\frac{25 \cdot 3}{36} + 1 = -\frac{25}{12} + 1 = -\frac{13}{12}$

$a = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}$

если $a = \frac{1}{4}$, то $\angle e$ - тупой $\Rightarrow e \neq 60°$ Ж

Ответ: М $(0; -\frac{13}{12})$; $(0; \frac{1}{4})$ 10

N9

$4x^2 - 16|x| + (2a + |x| + x)^2 = 16$

1) $x < 0$

$4x^2 + 16x + 4a^2 = 16$

$x^2 + 4x + a^2 - 4 = 0$

$\frac{D}{4} = 4 - a^2 + 4 = 8 - a^2$

$x_1 x_2 = a^2 - 4$ $x_1 + x_2 = -4$

		$-\sqrt{8}$		-2		2		$\sqrt{8}$	
$\frac{D}{4}$	$-$		$+$		$+$		$+$		$-$
$x_1 + x_2$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$
$x_1 \cdot x_2$	$+$		$+$		$-$		$+$		$+$
		$-$	$-$ $-$	0 $-$	$-$ $+$	0 $-$	$+$ $-$	$-$	

II $x \geq 0$

$4x^2 - 16x + (2a + 2x)^2 = 16$

$4x^2 - 16x + 4(a^2 + 2ax + x^2) = 16$

$4x^2 - 16x + 4a^2 + 8ax + 4x^2 = 16$

$8x^2 + 8x(a-2) + 4a^2 - 16 = 0$

$2x^2 + 2x(a-2) + a^2 - 4 = 0$

$\frac{D}{4} = a^2 - 4a + 4 - 2a^2 + 8 = -a^2 - 4a + 12$

$a^2 + 4a - 12 = 0$

$x = \frac{2 - a \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{2}$

$\frac{D}{4} = 4 + 12 = 16$

$a = -2 \pm 4$ → -6, 2

$-$ $+$ $-$; -6, 2 → a

$x_1 \cdot x_2 = \frac{a^2 - 4}{2}$

$+$ $-$ $+$; -2, 2 → a

$x_1 + x_2 = -a + 2$

$+$ $-$; -2 → a

		-6		-2		2	
$\frac{D}{4}$	$-$		$+$		$+$		$-$
$x_1 + x_2$			$+$		$-$		
$x_1 \cdot x_2$			$+$		$-$		
		$+$	$+$ $+$	$+$	$+$ $-$	0	

3

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

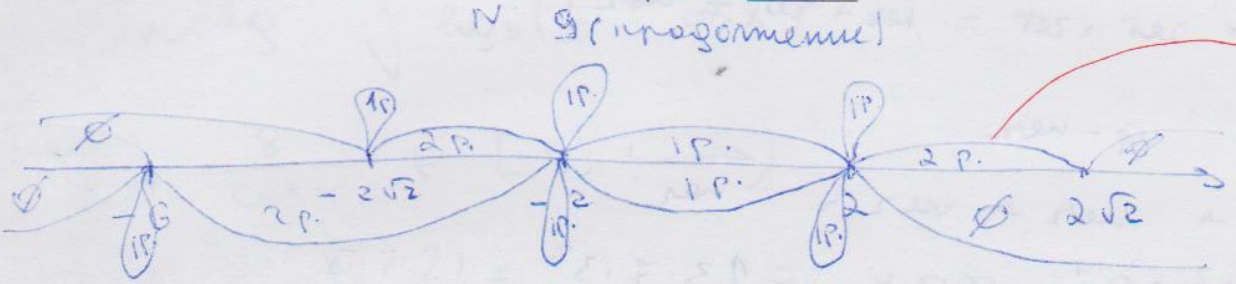
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 227407

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 14

N 9 (продолжение)



$a \in (-6; -2\sqrt{2}) \cup [-2; 2\sqrt{2}]$

Ответ: $a \in (-6; -2\sqrt{2})$ $\quad x = \dfrac{2-a \pm \sqrt{-a^2-4a+12}}{2}$

$a \in [-2; 2]$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2-\sqrt{8-a^2}}{2} \\ x = \dfrac{2-a+\sqrt{-a^2-4a+12}}{2} \end{array}\right.$

$a \in (2; 2\sqrt{2})$ $\quad x = \dfrac{2-a \pm \sqrt{-a^2-4a+12}}{2}$ $\quad -2 \pm \sqrt{8-a^2}$

11

N3

$b_n \in N \Rightarrow b_1 \in N, \; q \in N$

$S_{3,5,7} = 2457 \cdot 2^{2016} = 3^3 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 2^{2016}$

$S_{3,5,7} = b_3 + b_5 + b_7 = b_1 q^2 + b_1 q^4 + b_1 q^6$

$b_1 q^2 (1 + q^2 + q^4) = 2^{2016} \cdot 3^3 \cdot 13 \cdot 7$

$q = 2 \Rightarrow q^2 = 4$

$1 + q^2 + q^4 = 1 + 4 + 16 = 21$

$b_1 = \dfrac{2^{2016} \cdot 3^3 \cdot 13 \cdot 7}{2^2 \cdot 3 \cdot 7} = 2^{2014} \cdot 3^2 \cdot 13$

$q = 3 \Rightarrow q^2 = 9$

$1 + q^2 + q^4 = 1 + 9 + 81 = 91$

$b_1 = 2^{2016} \cdot 3$

$q = 4$

$1 + q^2 + q^4 = 81 = 3^4$ ✗

$q \neq 5$, т.к. $2^{2016} \cdot 3457 \not\vdots\, 5$

$q = 6$

$1 + q^2 + q^4 = 1333$ ✗

...

$q = 7$

$1 + q^2 + q^4 > 1557$ ✗

$1557 = 13 \cdot 7 \cdot 3^3$

$1 + q^2 + q^4$ всегда нечётно

Если q - чёт

неч + чёт + чёт = неч + чёт = неч

Если q - неч

неч + неч + неч = неч

$1 + q^2 + q^4$ max $= 13 \cdot 7 \cdot 3^3 = 1557$

Подобрав значения q от 2 до 7 узнаём, что подходит $q = 2$ и $q = 3$. док-ва?

2

Ответ: $q = 2$; $q = 3$; $q = 1$; $q = 4$.

№6.

$$f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{6 \log^{-1}_{\frac{1}{3}} \left(\frac{\cos x}{\cos x + 8} \right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\cos x}{\cos x + 8} > 0 \\ \cos x \in [-1; 1] \\ \cos x + 8 \in [7; 9] \end{array}\right\} \Rightarrow \cos x \in (0; 1].$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{6}{\log_{\frac{1}{3}}(\cos x) - \log_{\frac{1}{3}}(\cos x + 8)}}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{\cos x}{\cos x + 8} > 0$$

$$f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{6}{\log_3(\cos x+8) - \log_3(\cos x)}} =$$

$$= \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{6}{\log_3 \frac{\cos x+8}{\cos x}}} =$$

$$= \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{6}{\log_3\left(1+\frac{8}{\cos x}\right)}}$$

$$1 + \frac{8}{\cos x} \in [9; +\infty)$$

$$\cos x \in (0; 1]$$

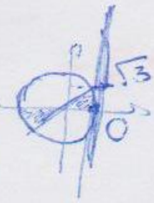
$$\log_3\left(1+\frac{8}{\cos x}\right) \in [2; +\infty)$$

$$\frac{6}{\log_3\left(1+\frac{8}{\cos x}\right)} \in (0; 3]$$

$$\sqrt{\frac{6}{\log_3\left(1+\frac{8}{\cos x}\right)}} \in (0; \sqrt{3}]$$ V

?

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{6}{\log_3\left(1+\frac{8}{\cos x}\right)}} \in \left(\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right]$$ $n \in \mathbb{Z}$

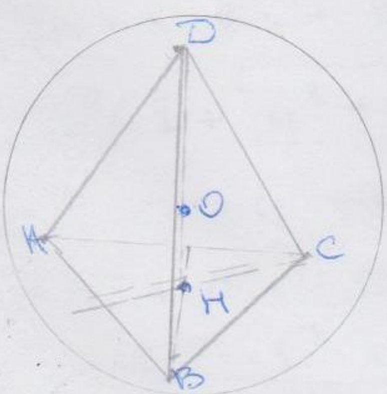


8

Ответ: $E(y) = \left(\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\left(0; \frac{\pi}{3}\right]$

№10.



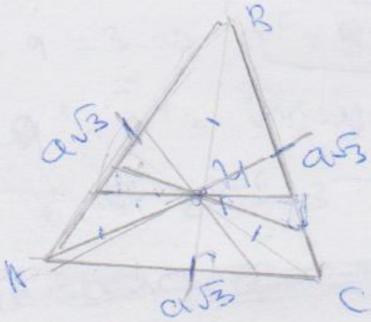
$R = \frac{2}{3} DH$

пусть $DH = \sqrt{2}a$

$DC = \sqrt{3}a$

$R = \frac{2}{3}\sqrt{2}a \Rightarrow a = \frac{3R}{2\sqrt{2}}$?

$S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3R}{2\sqrt{2}} \cdot l$



Мин l будет паралл. стороне ?

$$l = \frac{2}{3} a\sqrt{3} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{3R}{\cancel{2}\sqrt{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} = R\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$S_{min} = \frac{3R}{4\sqrt{2}} \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{8}$$

Ответ: $\frac{3R^2\sqrt{3}}{8}$?

ϕ