Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

227653

Шифр ______________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника КАРПОВ Игорь Сергеевич

Город, № школы (образовательного учреждения) Москва, лицей 1580

Регистрационный номер ШМ3680

Вариант задания 11

Ознакомлен 04.03.16 Карпов

Дата проведения "27" февраля 2016 г.

Подпись участника Карпов

Восемьдесят четыре

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 4 | 8 | 8 | 10 | 10 | 6 | 12 | 12 | 6 | 84 |
| | | | | | | | | | | |

227653

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 11

№1 пусть расстояние от дома до озера $S$, скорость Коли $v_1$, скорость Васи и Пети $v_2$. Туда Коля встретился с Васей в момент времени $t_1 = \frac{S}{v_1+v_2}$ и отвёз его домой за то же время (так Коля ехал и туда и обратно с одной скоростью. За это время Петя прошёл $S_1 = 2t_1 \cdot v_2 = \frac{2Sv_2}{v_1+v_2}$ аналогично. После этого момента Коля и Петя встретились через $t_2 = \frac{S - \frac{2Sv_2}{v_1+v_2}}{v_1+v_2}$, и за $= \frac{S(v_1-v_2)}{(v_1+v_2)^2}$, и за это же время Петя с Колей доехали до дома. По условию

~~$2t_2 = \frac{4}{3} \cdot 2t_1 \Rightarrow t_2 = \frac{t_1}{3}$~~

~~$\frac{S}{3(v_1+v_2)} = \frac{S(v_1-v_2)}{(v_1+v_2)^2} \Rightarrow v_1+v_2 = 3(v_1-v_2) \Rightarrow 2v_1 = 4v_2 \Rightarrow v_1 = 2v_2$~~

~~если бы Вася шёл пешком~~

~~$\frac{S}{3(v_1+v_2)} = \frac{S \cdot v_1}{(v_1+v_2)^2} \Rightarrow v_1+v_2 = 3v_1 \quad v_2 = 2v_1$~~

$2t_2 + t_1 = \frac{4}{3} \cdot 2t_1 \Rightarrow$

$6t_2 + 3t_1 = 8t_1$

$6t_2 = 5t_1$

$6 \cdot \frac{S \cdot v_1}{(v_1+v_2)^2} = 5 \cdot \frac{S}{v_1+v_2} \quad 6v_1 = 5(v_1+v_2)$

$v_1 = 5v_2$ ✓

8

если бы Вася шёл пешком он бы дошёл за $\frac{S}{v_2}$

$$\frac{\frac{S}{v_2}}{\frac{2S}{v_1+v_2}} = \frac{v_1+v_2}{2v_2} = 3$$

$\frac{2S}{v_1+v_2} = 2t_1$

✓ Ответ: в 3 раза медленнее

№2 (1): $x^4 - 16x^2 - 225 < 0$

сделаем замену $x^2 = t$

$t^2 - 16t - 225 < 0$

$(t-25)(t+9) < 0$

обратная замена

$(x^2-25)(x^2+9) < 0$

$x^2 < 25$

$|x| < 5$

$-5 < x < 5$

система

$\left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < -4 \end{array}\right.$

~~$|x| < 5$~~ $-5 < x < 5$

$-5 \quad -4 \qquad 4 \quad 5 \quad x$

$\left[\begin{array}{l} -5 < x < -4 \\ x > 4 \end{array}\right.$

Ответ: $x \in (-5; -4) \cup (4; +\infty)$

(2)

$$\frac{\sqrt{x^2-16}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2-16}} < \frac{16}{15}$$

$\begin{cases} \frac{x^2-16-x^2}{x\sqrt{x^2-16}} < \frac{16}{15} \\ x^2-16 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{-1}{x\sqrt{x^2-16}} < \frac{1}{15} \\ |x| > 4 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{-15 - x\sqrt{x^2-16}}{x\sqrt{x^2-16}} < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < -4 \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{x\sqrt{x^2-16}+15}{x\sqrt{x^2-16}} > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < -4 \end{array}\right. \end{cases}$

т.к $x\sqrt{x^2-16} > 0$ числитель при $x > 4$ и знаменатель положительны

$\left[\begin{array}{l} x > 4 \\ \begin{cases} x < -4 \\ \frac{x\sqrt{x^2-16}+15}{x\sqrt{x^2-16}} > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x > 4 \\ \begin{cases} x < -4 \\ -x\sqrt{x^2-16} < 15 \; (1) \end{cases} \end{array}\right.$

Разные знаки для $x \geq 0$

т.к при $x < -4$ $-x\sqrt{x^2-16} < 0$ возведём в квадрат

(1): $x^2(x^2-16) < 225$

4

№3 $b_1, b_2, \ldots b_n \in N$

поскольку все члены бесконечной прогрессии натуральные легко доказать, что $q \in N$ иначе если $q \notin N$ тогда $q \in Q$ (оно не может быть иррациональным) $q = \frac{p}{r}$ $p, r \in N$ p и r взаимно просты. пусть $b_1 = A \cdot r^n$, где A и $r^n$ взаимно просты, тогда $b_{n+2} = b_1 \cdot q^{n+1} = \frac{A \cdot p^{n+1}}{r}$ — не натуральное число. получили противоречие $\Rightarrow q \in N$

$b_3 + b_5 + b_7 = 7371 \cdot 2^{2016}$

$b_1(q^2+q^4+q^6) = 7371 \cdot 2^{2016}$

$b_1 q^2(1+q^2+q^4) = 7371 \cdot 2^{2016}$

$b_1 q^2(1+q^2+q^4) = 3^4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^{2016}$

пусть $q=3$

тогда $b_1 q^2(1+q^2+q^4) = b_1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 13$

и тогда $b_1 = 9 \cdot 2^{2016}$

~~поскольку~~ предположили это не так

поскольку q стоит в квадрате в левой части то q может быть либо $3^k$, $k \le 2$ $k \in N$ либо $2^k$, $k \le 1008$ $k \in N$

если $q=1$ то $b_1 \cdot 3 = 3^4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^{2016}$ — вырожденная прогрессия

$b_1 = 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^{2016}$

пусть $q = 3^2 \Rightarrow q^4+q^2+1 = 9^4+9^2+1 = 6561+81+1 = 6643 = 13 \cdot (500+11) = 13 \cdot 7 \cdot 73$

$b_1 \cdot 73 = 2^{2016} \Rightarrow$ противоречие

пусть $q = 2^k$

$b_1 \cdot q^2 \cdot (1+q^2+q^4) = b_1 \cdot 2^{2k} \cdot (1+2^{2k}+2^{4k}) = 3^4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^{2016}$

$\Rightarrow b_1(1+2^{2k}+2^{4k}) = 3^4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^{2016-2k}$   $k \in N$ $k \le 1008$

известно, что степени двойки имеют чередующиеся остатки при делении на 3: если $2^{n}=3k+1$, $k \in Z$ то $2^{n+1}=3p+2$, $p \in Z$ и наоборот если $2^n=3k+2$, $k \in Z$ то $2^{n+1}=3p+1$, $p \in Z$

пусть ~~$2^{2k}=3k+1$~~ так как $2 \equiv 2 \pmod 3$, $4 \equiv 1 \pmod 3$ то все $2^{2k}$ имеют остаток 1 при делении на 3

~~так~~ тогда $2^{2k} = 3m+1$ $m \in N$

$b_1(1+(3m+1)+(3m+1)^2) = 3^4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^{2016-2k}$

$b_1(9m^2+9m+3) = 3^4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^{2016-2k}$

$b_1(3m^2+3m+1) = 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^{2016-2k}$

т.к. $3m^2+3m+1$ не делится ни на 3 ни на 2 при любом m

т.к. $m^2+m$ — чётное при любом m

то $b_1 = A \cdot 3^3 \cdot 2^{2016-2k}$ где A не делится ни на 3 ни на 2 $A \in N$

$A(3m^2+3m+1) = 7 \cdot 13$

тогда либо $(3m^2+3m+1) = 7$ либо $(3m^2+3m+1) = 91$ либо $(3m^2+3m+1) = 13$, иначе возникает противоречие т.к. 7 и 13 простые

8

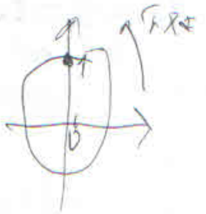
$3m^2+3m+1 = 7$
$m^2+m = 2$
$m = 1$ $2^{2k} = 4$ $2^k = 2$ $k = 1$ $q = 2$
т.к. при $m \in N$ $m^2+m$ строго возрастает только 1 корень ✓

$3m^2+3m+1 = 13$
$m^2+m = 4$
нет корней в целых числах т.к.
$1^2+1 = 2$ $2 < 4$
$2^2+2 = 6$ $6 > 4$

$3m^2+3m+1 = 91$
$m^2+m = 30$
$m = 5$
$2^{2k} = 16$
$2^k = 4$
$k = 2$ $q = 4$

Ответ: $a \in \{1; 2; 3; 4\}$

№4 $(\log^2_x(3x-2) - 4)(\sin \pi x - 1) \le 0$



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin \pi x = 1 \\ x > 0 \\ x \ne 1 \\ 3x-2>0 \end{cases} \quad (1) \\ (\log^2_x(3x-2)-2)(\log_x(3x-2)+2) \ge 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

(1): $\begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ x>0 \\ x \ne 1 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2n \quad n \in Z \\ x>0 \\ x\ne 1 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + 2n \quad n \in N$

(2): $\log_x\left(\frac{3x-2}{x^2}\right) \cdot \log_x\left((3x-2) \cdot x^2\right) \ge 0$

т.к. $\log_a b$ в сравнении с 0 эквивалентно $\frac{b-1}{a-1}$

заменим

$$\frac{\frac{3x-2}{x^2} - 1}{x-1} \cdot \frac{(3x-2)\cdot x^2 - 1}{x-1} \ge 0$$

при условии $x>0$, $x \ne 1$, $3x-2>0$ (заметим и применим позже)

$$\frac{-(x^2-3x+2)(3x^3-2x^2-1)}{x^2(x-1)^2} \ge 0$$

$$\frac{-(x-2)(x-1)(x-1)(3x^2+x+1)}{x^2(x-1)^2} \ge 0$$

$D = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 1 < 0 \quad 3x^2+x+1 > 0$

$$\frac{(x-2)(x-1)^2}{x^2(x-1)^2} \le 0$$

$\begin{cases} x \le 2 \\ x \ne 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$ объединим с $\begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \\ 3x-2>0 \end{cases}$ получим: $\begin{cases} \frac{2}{3} < x \le 2 \\ x \ne 1 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + 2n, n \in N \\ \begin{cases} \frac{2}{3} < x \le 2 \\ x \ne 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\frac{1}{2} + 2n > 2 \quad n \in Z$

$(\frac{2}{3}; 1) \cup$

Ответ: $x \in (\frac{2}{3}; 1) \cup (1; 2] \cup \{\frac{1}{2} + 2n \mid n \in Z\}$

8

№5 $\begin{cases} 4 \cdot \cos^2 x \cdot \sin^2\frac{x}{6} + 4\sin\frac{x}{6} - 4\sin^2 x \cdot \sin\frac{x}{6} + 1 = 0 \\ \sin\frac{x}{4} = \sqrt{\cos y} \end{cases}$

если $\cos x = 0$: то первое уравнение $1=0$, $x \in \varnothing$

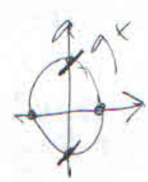
решим 1 как квадратное относительно $\sin\frac{x}{6}$

$D = (4 - 4\sin^2 x)^2 - 4 \cdot 4\cos^2 x = 16\cos^4 x - 16\cos^2 x = -16\cos^2 x \cdot \sin^2 x \le 0$

Значит решение возможно только если $\cos^2 x \cdot \sin^2 x = 0$

$\begin{cases} \sin\frac{x}{6} = \frac{-4\cos^2 x}{2 \cdot 4\cos^2 x} = -\frac{1}{2}, \cos x \ne 0 \\ \begin{cases} \sin\frac{x}{6} = -\frac{1}{2}, \cos x \ne 0 \\ \sin x \cdot \cos x = 0 \end{cases} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{x}{6} = -\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z \\ x = \pi k \quad k \in Z \end{cases}$



$$\begin{cases} x=-3\pi\pm2\pi+12\pi n, n\in Z \\ x=\pi k \quad k\in Z\end{cases}$$

$12\pi n-5\pi=\pi k \qquad 12\pi n-\pi=\pi k$

$12n-5=k \qquad 12n-1=k$

каждое решение 1-ого уравнения является решением 2-ого, однако обратное неверное при $k=12m$, $m\in Z$

поэтому можем оставить только 1-ое уравнение в системе

$$\left[\begin{aligned} x&=12\pi n-\pi, n\in Z \\ x&=12\pi n-5\pi, n\in Z\end{aligned}\right.$$

(2): $\sin\frac{x}{4}=\sqrt{\cos y}$

$\sin\frac{x}{4}\geq 0$

$\sin^2\frac{x}{4}=\cos y$

при любом $n$ $x=k\pi$

где $k$ - нечётное число

$\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{2}=\cos y$

поэтому

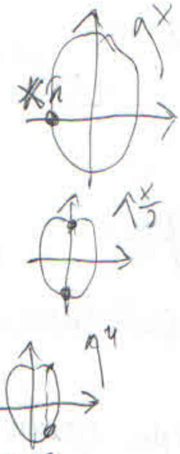
$\frac{x}{2}=\frac{k\pi}{2}$, $\Rightarrow$

значит

$\cos\frac{x}{2}=0$

$\cos y=\frac{1}{2}$

$y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m, m\in Z$



$\frac{x}{4}=\frac{k\pi}{4}$ проверим

$\frac{(12n-1)\pi}{4}=3\pi n-\frac{\pi}{4}$

$\frac{(12n-5)\pi}{4}=3\pi n-\frac{5\pi}{4}$

$\sin(3\pi n-\frac{\pi}{4})=\sin 3\pi n\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos 3\pi n\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}(\sin 3\pi n-\cos 3\pi n)$

при чётном n $\sin\frac{x}{4}<0$ $\Leftarrow \sin 3\pi n-\cos 3\pi n=-1$

при нечётном $\sin\frac{x}{4}\geq0$ $\Leftarrow \sin 3\pi n-\cos 3\pi n=1$

аналогично рассуждая для случая

$\sin(3\pi n-\frac{5\pi}{4})$ получим что

$\sin(3\pi n-\frac{5\pi}{4})=-\frac{\sqrt2}{2}(\sin 3\pi n-\cos 3\pi n)$

и при чётном n $\sin\frac{x}{4}\geq0$

при нечётном n $\sin\frac{x}{4}<0$

~~Ответ: $(x;y)\in\{(12\pi n-\pi;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m);(12\pi n-5\pi;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m)\mid n,m\in Z\}$~~

в случае с $12n-1$ $n=2k+1$ $\quad 12n-1=24k+11$ 24!

в случае с $12n-5$ $n=2k$ $\quad 12n-5=24k-5$

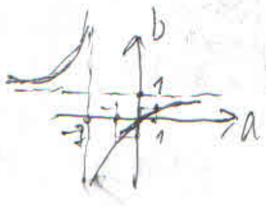
Ответ: $(x;y)\in\{((24k+11)\pi;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m);((24k-5)\pi;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m)\mid k,m\in Z\}$

10

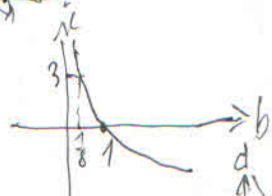
№9б $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\log^{-1}_{0{,}8}\left(\frac{\sin x}{\sin x+7}\right)\right)$

$a(x)=\sin x \quad E_a=[-1;1]$

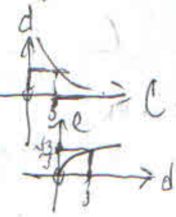
$b(a)=\frac{a}{a+7}$ $\quad b=1-\frac{7}{a+7}$ $\quad E_b=[-\frac{1}{6};\frac{1}{8}]$



$c(b)=\log_{0{,}8}b \quad E_c=[3;+\infty)$

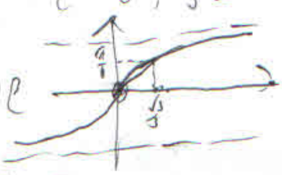


$d(c)=\frac{1}{c}$ $\quad [0;\frac{1}{3}]=E_d$



$e(d)=\sqrt{d} \quad E_e=[0;\frac{\sqrt3}{3}]$

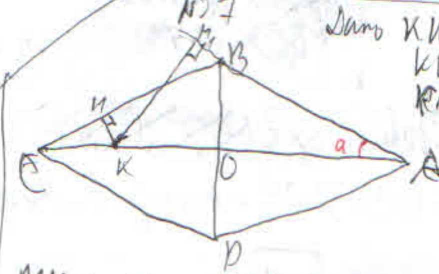
$f(e)=\operatorname{arctg}e$ $\quad E_f=[0;\frac{\pi}{6}]$



✓ Ответ: $E_f=[0;\frac{\pi}{6}]$

10

№7



Дано $KH=2$

$KM=12$

$R_{ABC}=5$

Найти: $AB$, ? $R_{ABCD}$-?

пусть $\angle BAC=\angle BCA=a$

тогда $AC=AK+CK=\frac{12}{\sin a}+\frac{2}{\sin a}=\frac{14}{\sin a}$

$AC=2\cdot AB\cdot\cos a\Rightarrow AB\cdot\sin 2a=14$ Почему?

$\cos^2\frac{a}{2}=0{,}7$

$\cos a=2\cdot0{,}7-1=0{,}4$

$\sin a=\sqrt{1-0{,}4^2}=\sqrt{0{,}84}=2\sqrt{0{,}21}$

$\sin 2a=2\cdot0{,}4\cdot2\sqrt{0{,}21}=1{,}6\sqrt{0{,}21}$

$AB=\frac{14}{\sin 2a}=\frac{14}{1{,}6\sqrt{0{,}21}}=\frac{25\sqrt{21}}{6}$

$r=AO\cdot\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{7}{\sin a}\cdot\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{7}{2\cos^2\frac{a}{2}}=5\Rightarrow\cos^2\frac{a}{2}=0{,}7$

$\angle O_1AO=\angle O_1AB$ т.к. $O_1A$ - биссектриса

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

227653

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Пропущены существенные моменты в обосновании, поэтому задачу нельзя считать полностью решенной

Вариант № 11


$R_{ABCD} = AB \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{AB \cdot \sin 2\alpha}{2} = 7$

центры окружности и центр ромба совпадают т.к. они от AC, BD биссектрисы углов ромба

6

как получил результат?

Ответ: $AB = \frac{28\sqrt{21}}{6}$; $R = 7$

№ 8 пусть наклон одной прямой $k_1$, второй $k_2$

$tg\, 60° = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \sqrt{3}$

$f(x) = 0{,}5\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$f'(x) = x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

уравнения касательных

$y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1) + f(x_1) = \left(x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x - x_1) + 0{,}5\left(x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x - 0{,}5x_1^2 + \frac{3}{8}$

$y_2 = f'(x_2) \cdot (x - x_2) + f(x_2) = \left(x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x - x_2) + 0{,}5\left(x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x - 0{,}5x_2^2 + \frac{3}{8}$

$y_1 = y_2$: $(x_2 - x_1)x = 0{,}5(x_2^2 - x_1^2)$

$x = \frac{x_2 + x_1}{2}$

т.к. ось oy $x = 0$ и $x_1 = -x_2$

$k_1 = x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $k_2 = -x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$k_1 - k_2 = 2x_2$

$k_1 k_2 = -\left(x_2^2 - \frac{3}{4}\right)$

$\frac{2x_2}{1 - \left(x_2^2 - \frac{3}{4}\right)} = \sqrt{3}$

$\frac{2x_2}{\sqrt{3}} = \frac{7}{4} - x_2^2$

$x_2^2 + \frac{2x_2}{\sqrt{3}} - \frac{7}{4} = 0$

$x_2 = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{4}{3} + 4 \cdot \frac{7}{4}}}{2}$

$x_2 = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}} \pm \frac{5}{\sqrt{3}}}{2}$

$x_{21} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_{22} = -\frac{7}{2\sqrt{3}} = \frac{-7\sqrt{3}}{6}$

12

$x_{21}$: $k_1 = 0$ $k_2 = -\sqrt{3}$

$x_{22}$: $k_1 = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$ $k_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$y_1 = -0{,}5x_2^2 + \frac{3}{8}$ т.к. $x = 0$

(при $x_{21}$) $-0{,}5 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = 0$

$y_2 = -0{,}5 \cdot x_2^2 + \frac{3}{8}$

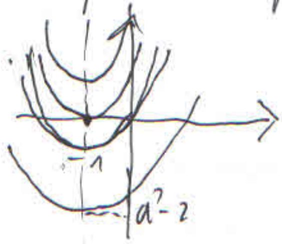
$-0{,}5 \cdot \frac{49 \cdot 3}{36} + \frac{3}{8} = \frac{-49}{24} + \frac{3}{8} = -\frac{40}{24} = -\frac{5}{3}$ (при $x_{22}$)

Ответ: M либо $(0; 0)$ либо $\left(0; -\frac{5}{3}\right)$

№57 $4x^2-8|x|+(2a+|x|+x)^2=4$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ 4x^2-8x+4(a+x)^2=4\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ 4x^2+8x+4a^2=4\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-2x+(a+x)^2=1\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ x^2+2x+a^2=1\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ 2x^2+(2a-2)x+a^2-1=0\end{cases} (1)\\ \begin{cases}x<0\\ x^2+2x+a^2-1=0\end{cases} (2)\end{array}\right.$$

(2): парабола с фиксированной вершиной по горизонтали и ра... координаты вершины $(-1; a^2-2)$



$f(0)=0:\ 0^2+2\cdot 0+a^2-1=0$
$a^2=1$
$a=\pm 1$

$D=0:\ 4-4(a^2-1)=8-4a^2=0$
$a^2=2$
$a=\pm\sqrt{2}$

$a=\pm\sqrt{2} \Leftarrow a^2=2$: 1 корень $x=-1$

$\left[\begin{array}{l}a>\sqrt{2}\\ a<-\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftarrow a^2>2$: нет корней

$\left[\begin{array}{l}1<a<\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}<a<-1\end{array}\right. \Leftarrow 1<a^2<2$: 2 корня $x=-1\pm\sqrt{2-a^2}$

$-1\le a\le 1 \Leftarrow a^2\le 1$: 1 корень $x=-1-\sqrt{2-a^2}$ - меньший корень

(1): ~~решаем аналогично координаты вершины~~

корни: $x=\dfrac{2-2a\pm\sqrt{(2a-2)^2-8\cdot(a^2-1)}}{4}$ $\quad D=-(a-1)(a+3)$: $\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=-3\end{array}\right. \Rightarrow D=0$

$x=\dfrac{1-a\pm\sqrt{(a-1)^2-2(a^2-1)}}{2}$ $\quad a=1:\ x=\dfrac{0\pm 0}{2}=0$ подходит

$x=\dfrac{1-a\pm\sqrt{-2a-a^2+3}}{2}$ $\quad a=-3\ \ x=\dfrac{1+3\pm 0}{2}=2$ подходит

* $\dfrac{1-a+\sqrt{-(a^2+2a-3)}}{2}\ge 0$

$1-a+\sqrt{-(a+3)(a-1)}\ge 0$

$\sqrt{-(a+3)(a-1)}\ge a-1$ т.к. по ОДЗ корня $-3\le a\le 1$ то при всех таких $a$ $a-1\le 0$ и значит $\sqrt{-(a+3)(a-1)}\ge a-1$ значит больший корень больше или равен нулю при $-3\le a\le 1$

$1-a-\sqrt{-(a+3)(a-1)}\ge 0$

$1-a\ge\sqrt{-(a+3)(a-1)}$

т.к. при ОДЗ корня $-3\le a\le 1$ $1-a\ge 0$ возведём в квадрат

$(a-1)^2+(a-1)(a+3)\ge 0$

$(a-1)(a+1)\ge 0$

$\left[\begin{array}{l}a\ge 1\\ a\le -1\end{array}\right.$

объединяя с $(a+3)(a-1)\le 0$ получаем

$\left[\begin{array}{l}-3\le a\le -1\\ a=1\end{array}\right.$

~~$a=1$: 1 корень $x=0$~~ $a=1$: 1 корень $x=0$

$a=-3$: 1 корень $x=2$

$-3\le a\le -1$: 2 корня $x=\dfrac{1-a\pm\sqrt{3-2a-a^2}}{2}$

$-1<a<1$: 1 корень $x=\dfrac{1-a+\sqrt{3-2a-a^2}}{2}$

$\left[\begin{array}{l}a>1\\ a<-3\end{array}\right.$: нет корней

(1) и (2):

0 1 2 3 4 3 2 2 2 1 0 — количество корней

$-3 \quad -\sqrt{2} \quad -1 \quad 1 \quad \sqrt{2}$ $a$

т.к. корни 1-ого $\geq 0$, а корни 1-ого $< 0$, что они никогда не пересекаются

2 корня $-3 < a < -\sqrt{2}$ : 2 различных корня $\dfrac{1-a \pm \sqrt{3-2a-a^2}}{2}$

~~$a=$~~ $-1 < a < 1$ корни $-1-\sqrt{2-a^2}$ ~~корень~~ $\dfrac{1-a+\sqrt{3-2a-a^2}}{2}$

(12)

$a = 1$: корни $0$ и $-1-\sqrt{2-a^2} = -2$

$1 < a < \sqrt{2}$ 2 корня $x = -1 \pm \sqrt{2-a^2}$

Ответ: 1) при $a \in (-3; -\sqrt{2})$ $x \in \left\{\dfrac{1-a \pm \sqrt{3-2a-a^2}}{2}\right\}$

$a \in \{1\}$ $x \in \{-2; 0\}$

$a \in [-1; 1)$ $x \in \left\{-1-\sqrt{2-a^2}; \dfrac{1-a+\sqrt{3-2a-a^2}}{2}\right\}$

$a \in (1; \sqrt{2})$ $x \in \{-1 \pm \sqrt{2-a^2}\}$

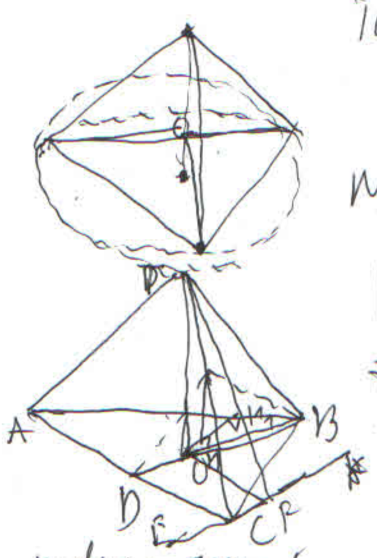
a) $a \in (-3; -\sqrt{2}) \cup [-1; \sqrt{2})$

---

№ 4 $h = \frac{4R}{3}$

т.к. O центр сферы, что он должен лежать на высоте пирамиды т.к. её основание — правильный треугольник

~~пусть~~ тогда ~~её~~ центр лежит на высоте $\frac{R}{3}$ от основания сферы



пусть сторона пирамиды равна $a$, тогда $\sqrt{\left(\frac{R}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = R$

$R^2 = \frac{R^2}{9} + \frac{a^2}{3}$ $\quad \frac{a^2}{3} = \frac{8R^2}{9}$ $\quad a = \frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$ $\quad BT = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4R}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8R^2}{9} + \frac{16R^2}{9}} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$

~~Smin~~ $S_{min}$ будет в случае когда (т.к. $S = BD \cdot h$) высота сечения будет равна расстоянию между прямыми $BD$ и $CT$ ✓

$\rho(BD, CT) = \rho(ETF; BD) = \rho(ETF, D) = \rho(O, ETF) = OH_1$ где расположена точка E?

т.к. пирамида правильная $CD \perp BD \Rightarrow CD \perp EF$ что это такое?

проведём через C прямую EF параллельную BD

пусть $CF = DO$ тогда $OF$ тоже будет $\perp CF$

что это такое?

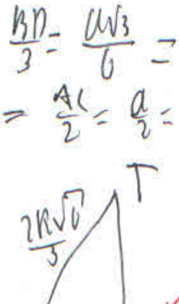
$OH_1 = \frac{8R\sqrt{33}}{3 \cdot 22} = \frac{4R\sqrt{33}}{33}$ откуда?

$DO = \frac{BD}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{2R\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{2R}{3\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{3}$

$H_1F = \sqrt{\frac{R^2 \cdot 6}{9} - \frac{16 \cdot R^2 \cdot 33}{33^2}} =$

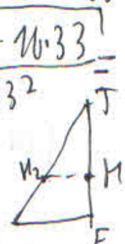
$CD = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2} = \frac{R\sqrt{6}}{3} = OF$

$= R\sqrt{\frac{6 \cdot 11^2 - 16 \cdot 33}{33^2}} = \frac{R \cdot 3\sqrt{22}}{33} = \frac{R\sqrt{22}}{11}$



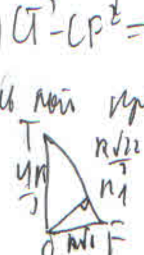
$TF = \sqrt{CT^2 - CF^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot R^2 \cdot 6}{9} - \frac{R^2 \cdot 2}{9}} = \frac{R\sqrt{22}}{3}$

$= \frac{3TF}{11}$



✓ нормальный прием

чтобы найти, куда упадёт основание перпендикуляра проведём $H_2H_1 \parallel BD \parallel CF$



$OH_1 = \dfrac{\frac{4R}{3} \cdot \frac{R\sqrt{6}}{3}}{\frac{R\sqrt{22}}{3}} = \frac{4R\sqrt{6}}{9\sqrt{22}} = \frac{4R\sqrt{6}}{3\sqrt{22}}$

$CH_2 : CT = FH_1 : FT = 3 : 11$

Почему? Откуда 19?

$\Rightarrow$ ~~$S_{\text{пирамиды}}$~~ $S_{CDH_2B} = \dfrac{3S_{CDTB}}{11} = \dfrac{3S_{ABCT}}{22} \Rightarrow$ относятся части фигуры как 3:19

$S_{сеч} = \dfrac{BD \cdot OH_1}{2} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{4R\sqrt{33}}{33}}{2} = \dfrac{\frac{2R\cdot\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{4R\sqrt{33}}{33}}{2} = \dfrac{16R^2 \cdot 3\sqrt{11}}{2\cdot3\cdot3\cdot33} = \dfrac{16R^2\sqrt{11}}{198} = \dfrac{8R^2\sqrt{11}}{99}$

6

Ответ: $S_{сеч} = \dfrac{8R^2\sqrt{11}}{99}$; 3:19 соотношение объёмов

$\times\ \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}} R^2$

Ход решения неясен. Площадь сечения найдена неверно.