Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 227870
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика второй тур
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Коликова Ольга Евгеньевна

Город, № школы (образовательного учреждения) ГБОУ СОШ № 354, Москва, 11

Регистрационный номер ШМ 0313

Вариант задания 14

Дата проведения "27" февраля 2016 г.

Подпись участника

$\Sigma = 73$ Кич - (севере[illegible] Пи)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
–	8	4	8	10	10	3	12	12	6	73

Шифр 227870

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 14

1.

879

2. $\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} < \frac{9}{20}$

$\cancel{\frac{20x^2 - 20(x^2-9) - 9x\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2-9}\cdot 20x} < 0}$

$\cancel{\frac{180 - 9x\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2-9}\cdot 20x} < 0}$

$\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} = t$

$t - \frac{1}{t} < \frac{9}{20}$

$t^2 - \frac{9}{20}t - 1 < 0$

$t \in (-\frac{4}{5}; \frac{5}{4})$

ОДЗ $x^2-9 \geq 0$

$-3 \quad 3$

$f(x)$

$D(f) = R$, кроме $20x = 0$, $x = 0$

$x^2 - 9 > 0$

$+ \quad - \quad +$

$-3 \quad 3$

Н.ф. $180 - 9x\sqrt{x^2-9} = 0$

$9x\sqrt{x^2-9} = 180$

$\sqrt{x^2-9} = \frac{20}{x}$

$\frac{20}{x} > 0$

$x^2 - 9 = \frac{400}{x^2}$

$x^4 - 9x^2 - 400 = 0$

$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} > -\frac{4}{5} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} < \frac{5}{4} \end{cases}$

$\cancel{\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 3 \\ \sqrt{x^2-9} > \frac{4}{5}x \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3 \\ \sqrt{x^2-9} > -\frac{5}{4}x \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 9 > \frac{16}{25}x \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3 \\ x^2 - 9 > \frac{25}{16}x \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 3 \\ x^2 > 25 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3 \\ x^2 - 9 - 25 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(5; +\infty) \cup (-\infty; -3)$

③ $b_3 + b_5 + b_7 = 2457 \cdot 2^{2016}$

$1+q^2+q^4$ - нечётн. решить

$b_1 q^2 + b_1 q^4 + b_1 q^6 = b_1 q^2(1+q^2+q^4) = 2457 \cdot 2^{2016}$

(нечётное)

$q \in N$

$b_1 q^2 (1+q^2+q^4) = 2457 \cdot 2^{2016} = 3 \cdot 9 \cdot 91$

$\Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow q = 3$

Ответ: $q = 3$

другие случаи?

④. $(\log_x^2(6x-5)-4)(\sin \pi x+1) \geq 0$

ОДЗ. $6x-5>0$, $x>0$, $x \neq 1$ $\Rightarrow x \in (\frac{5}{6};1) \vee (1;+\infty)$

$\log_x^2(6x-5) \geq 4$

$[\log_x(6x-5) \geq 2$ $[\log_x(6x-5) \leq -2$

$6x^2-5x-1=0$

$\sin \pi x + 1 = 0$

$\sin \pi x = -1$

$\pi x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$x = \frac{3}{2} + 2n, n \in Z$ $n \geq 0$

8

$x \leq 5$

$\left[\begin{array}{l} \log_x \frac{6x-5}{x^2} \geq 0 \\ \log_x x^2(6x-5) \leq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)\left(\frac{6x-5}{x^2}-1\right) \geq 0 \\ (x-1)(6x^3-5x^2-1) \leq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-1)^2(x-5) \leq 0 \\ (x-1)^2(6x^2+x+1) \leq 0 \end{array}\right. \Rightarrow x \in (\frac{5}{6};1) \vee (1;5]$

Ответ: $x \in (\frac{5}{6};1) \vee (1;5] \cup \{\frac{3\pi}{2}+2n\}$, $n \in N \setminus \{1\}$

⑤. $\left\{\begin{array}{l} 4\cos^2 2x \cdot \sin^2\frac{x}{6} + 4\sin\frac{x}{6} - 4\sin^2 2x \cdot \sin\frac{x}{6} + 1 = 0 \\ \sqrt[4]{3}\sin\frac{x}{4} = \sqrt{\cos y} \end{array}\right.$

$\sqrt[4]{3}\sin\frac{x}{4} > 0$

$\sin\frac{x}{4} > 0$

$\frac{x}{4} > \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$x > 2\pi + \frac{\pi n}{4}$.

$4\sin^2\frac{x}{6} - 4\sin^2 2x \cdot \sin^2\frac{x}{6} + 4\sin\frac{x}{6} - 4\sin^2 2x \cdot \sin\frac{x}{6} + 1 = 0$

$4\sin\frac{x}{6}(\sin\frac{x}{6}+1) - 4\sin^2 2x \cdot \sin\frac{x}{6}(\sin\frac{x}{6}+1) + 1 = 0$

$(\sin\frac{x}{6}+1)(4\sin\frac{x}{6} - 4\sin^2 2x \cdot \sin\frac{x}{6}) = -1$.

⇓

$4\sin\frac{x}{6} - 4\sin^2 2x \cdot \sin\frac{x}{6} = 1$ и $\sin\frac{x}{6}+1 = -1$

$4\sin\frac{x}{6}(1-\sin^2 2x) = 1$ $\sin\frac{x}{6} = -2$

$4\sin\frac{x}{6} \cdot \cos^2 2x = 1$ $\varnothing$

$4\sin\frac{x}{6} = 1$ $\cos^2 2x = 1$ $4\sin\frac{x}{6} = -1$ $\cos^2 2x = -1$

$\sin\frac{x}{6} = \frac{1}{4}$ $\cos 2x = 1$ $\cos 2x = -1$ $\sin\frac{x}{6} = -\frac{1}{4}$ $\varnothing$

$x = \left[\begin{array}{l} 6\arcsin\frac{1}{4} + 12\pi k, \\ 6\pi + 6\arcsin\frac{1}{4} + 12\pi k, \end{array}\right. k \in Z$

$x = \left[\begin{array}{l} -6\arcsin\frac{1}{4} + 12\pi l, \\ 6\pi - 6\arcsin\frac{1}{4} + 12\pi l, \end{array}\right. l \in Z$

$4\sin\frac{x}{6} - 4\sin^2 2x \cdot \sin\frac{x}{6} = -1$ и $\sin\frac{x}{6} + 1 = 1$

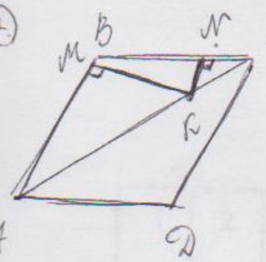
$4\sin\frac{x}{6} \cdot \cos^2 2x = -1$ $\sin\frac{x}{6} = 0$

$4\sin\frac{x}{6} = -1$ $\cos^2 2x = 1$ $\frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$.

(см. выше) $x = 3\pi + \frac{\pi m}{6}, m \in Z$

$4\sin\frac{x}{6} = 1$ $\cos^2 2x = -1$

(выше) $\varnothing$

7. 

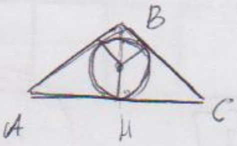
ABCD - ~~квадрат~~ ромб.

NK = 6, MK = 8.

r = 5.

R - ? AB - ?

$r = \frac{S}{p}$



AB = BC

$S = \frac{1}{2} BH \cdot AC$

$p = \frac{1}{2} \cdot (2AB + AC)$

3

$r = \frac{BH \cdot AC}{2AB + AC}$

Расстояние от точки, является ⊥ проведенный из данной точки.

$\rho(BC, N) = NK$, $NK \perp BC$

$\rho(AB, K) = MK$, $MK \perp AB$

Вписать окр. в четырехуг. можно тогда, когда Σ противол. ∠ = 180°

(Σ противол сторон =)

$y = (x+1)^2$

$y' = 2(x+1)$

$\alpha = 60°$; $f'(x_0) = tg\alpha = \sqrt{3}$.

$M(0, b)$

12

$y(x_{0_1}) = (x_{0_1}+1)^2$ $\quad y(x_{0_2}) = (x_{0_2}+1)^2$

$y'(x_{0_1}) = 2(x_{0_1}+1)$ $\quad y'(x_{0_2}) = 2(x_{0_2}+1)$

$f_1 = (2x_{0_1}+2)x - x_{0_1}^2 + 1$ $\quad f_2 = x(2x_{0_2}+2) - x_{0_2}^2 + 1$

$\cancel{2(x_{0_1}+1) = \sqrt{3}}$ $\quad \cancel{2(x_{0_2}+1) = -\sqrt{3}}$

$\cancel{x_{0_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1}$ $\quad \cancel{x_{0_2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}$

$f_1 = \cancel{\sqrt{3}x - \frac{3}{4} + \sqrt{3}}$ $\quad f_2 = \cancel{\sqrt{3}x - \frac{3}{4} - \sqrt{3}}$

$x_{0_1} = \pm x_{0_2}$

$x_{0_1} = x_{0_2}$ ∅

$x_{0_1} = -x_{0_2}$ ⊕

$4x_{0_1} = \sqrt{3} + 4\sqrt{3}(1 - (x_{0_1})^2)$

$4\sqrt{3}(x_{0_1})^2 + 4x_{0_1} - 5\sqrt{3} = 0$

$x_{0_1} = \frac{-2 \pm 8}{4\sqrt{3}}$

$x_{0_1} = \frac{-10}{4\sqrt{3}}$ $\quad x_{0_1} = \frac{6}{4\sqrt{3}}$

$b = 1 - \frac{100}{48}$

$b = 1 - \frac{9}{12} = \frac{1}{4}$

~~x = -1~~

~~y~~

Ответ: $M(0; \frac{1}{4})$ или $M(0; -\frac{13}{12})$

~~Ответ~~

⑥
③ $f(x) = \operatorname{arcctg}\sqrt{6\log^{-1}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{\cos x}{\cos x+8}\right)}$

$\frac{\cos x}{\cos x+8} \in \left[\frac{1}{7}; \frac{1}{9}\right]$, ОДЗ логарифма $\left(0; \frac{1}{9}\right]$

④ $\log_{\frac{1}{3}} g(x) \in [2; +\infty)$

$\log^{-1}_{\frac{1}{3}} g(x) \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ $\quad \sqrt{(\ \dots\ )} \in (0; \sqrt{3}]$

$6\log^{-1}_{\frac{1}{3}} g(x) \in (0; 3]$

$\operatorname{arcctg}\sqrt{(\dots)} \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right]$

Ответ: $\left(0; \frac{\pi}{3}\right]$ ✓

10

⑤
$$\begin{cases} 4\cos^2 2x \cdot \sin^2\frac{x}{6} + 4\sin\frac{x}{6} - 4\sin^2 2x \cdot \sin\frac{x}{6} + 1 = 0 \\ \sqrt[3]{4}\ \sin\frac{x}{4} = \sqrt{\cos y} \end{cases}$$

10

$$\left[\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \right. \qquad \cos 2x\left(2\sin\frac{x}{6}+1\right) = 0$$
$$\sin 2x = 0$$

$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ 2\sin\frac{x}{6}+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x = \pi n \\ \frac{x}{6} = (-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6} + \pi k, \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^{k+1}\cdot\pi + 6\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$

$\Rightarrow \left[\begin{matrix} x = -\pi + 12\pi n \\ x = 7\pi + 12\pi k \end{matrix}\right.$ ✓

1) $x = -\pi + 12\pi n \Rightarrow \sqrt[4]{3}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4} + 3\pi n\right) = \sqrt{\cos y}$

$\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi m.$

2) $x = 7\pi + 12\pi k \Rightarrow \sqrt[4]{3}\sin\left(\frac{7\pi}{4} + 3\pi n\right) = \sqrt{\cos y}$ (аналогично 1)

Ответ: $\begin{cases} x = -\pi + 12\pi n, & (n = 2k+1) \\ y = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi l, & l \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ✓

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

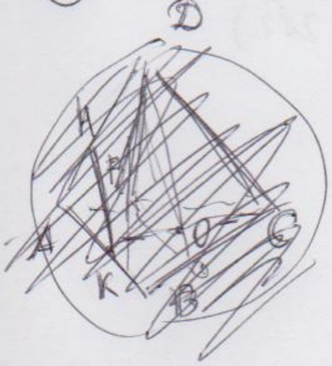
227870

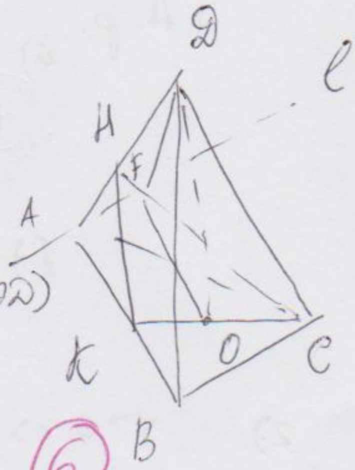
Шифр

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 14.

10





CK - высота.

KHC - сечение

S_{KHC} - min, если $h_{KHC} = \rho(KC, AD)$

$l \parallel KC$.

$OF \perp KC$; $OF \perp l$

$(DOF) \perp KC$

$(DOF) \perp l$

$OS \perp FD$; $OS = h_{KHC}$

$OF = \frac{1}{2}AB = \frac{x}{2}\sqrt{3} = 2R$

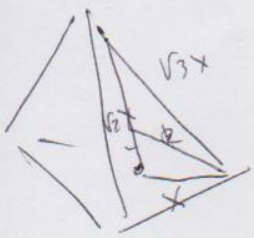
$h = \frac{4R}{\sqrt{33}}$

$R^2 = x^2 + (\sqrt{2}x - R)^2$

$R^2 = x^2 + 2x^2 + R^2 - 2\sqrt{2}xR$

$3x^2 = 2\sqrt{2}xR$

$x = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$



Ответ: S min, если $h_{KHC} = \rho(KC, AD) = \frac{2\sqrt{22}}{\sqrt{33}}R^2$

$OF = 2R$.

(9) 1) $x \le 0 \Rightarrow 4x^2+16x+4a^2-16=0$

$x^2+4x+a^2-4=0$

I р. а) $\frac{D}{4}=0 \Rightarrow 4-a^2+4=0 \quad \underline{a=\pm\sqrt{8}}$

б) $a^2-4<0 \Rightarrow a^2-4<0 \Rightarrow a\in(-2;2)$

в) $\begin{cases} a^2-4 \\ -4>0 \end{cases} \quad \varnothing$

II р. а) $\begin{cases} 8-a^2>0 \\ a^2-4>0 \\ -4<0 \end{cases} \Rightarrow a\in(-2\sqrt{2};-2)\cup(2;2\sqrt{2})$

б) $\begin{cases} a^2-4=0 \\ -4<0 \end{cases} \Rightarrow a=\pm 2.$

2) $x>0 \Rightarrow 4x^2-16x+4x^2+4a^2+8ax=16$

$2x^2+x(2a-4)+a^2-4=0$

а) $\frac{D}{4}=0 \Rightarrow a^2-4a+4-2a^2+8=-a^2-4a+12=0$

$a=2 \ \varnothing$
$a=-6.$

б) $a^2-4<0 \Rightarrow a\in(-2;2)$

в) $\begin{cases} a^2-4=0 \\ 4-2a>0 \end{cases} \Rightarrow a=-2$

12

Ответ: $(-6;-2\sqrt{2})$ $x_{1,2}=\frac{4-2a\pm\sqrt{-a^2-4a+12}}{2}$

$a\in(-2;2)$ $x_1=-2-\sqrt{8-a^2}$

$x_2=\frac{4-2a+\sqrt{-a^2-4a+12}}{2}.$

$a=2,\ x_{1,2}=-2\pm\sqrt{8-a^2}.$

$(2,\sqrt{8})$ $x=-2\pm\sqrt{8-a^2}$