+1 Литвинов

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1 шаг

+1 шаг

227266

Шифр ____________________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Ожерельева София Сергеевна

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Королёв
МАОУ „ЛНИП", 11

Регистрационный номер ШМ 4071

Вариант задания 12

Дата проведения "27" февраля 2016 г.

Подпись участника ____________

70 (семьдесят)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

227266

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
8	4	2	6	10	10	12	6	12	0	70

266

Шифр ______________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 12

№2 $\frac{\sqrt{x^2-7}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2-7}} < \frac{7}{12}$

$\frac{x^2-7-x^2}{x\sqrt{x^2-7}} < \frac{7}{12}$

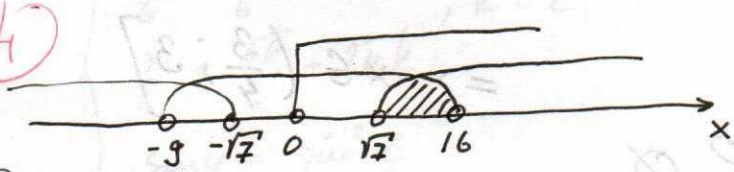
$\frac{-7}{x\sqrt{x^2-7}} < \frac{7}{12}$

$\frac{12}{x\sqrt{x^2-7}} > 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x>0 \\ x\sqrt{x^2-7}<12 \end{cases}\right.$ $\cancel{x<0}$ $\begin{cases} x>0 \\ x^2-7>0 \\ x^2(x^2-7)<144 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ |x|>\sqrt{7} \\ x^4-7x^2-144<0 \end{cases}$

$\begin{cases} x>0 \\ |x|>\sqrt{7} \\ (x-16)(x+9)<0 \end{cases}$

4



$\Rightarrow x\in(\sqrt{7};16)$

Ответ: $(\sqrt{7};16)$

№4 $(\log_{x^2}(4x-3)-4)(\sin\pi x-1)\leq 0$

$\sin\pi x\in[-1;1] \Rightarrow \sin\pi x-1\leq 0$

Тогда для выполнения исходного неравенства необходимо:

$\log_{x^2}(4x-3)-4\geq 0$ и $\sin\pi x=1$

$$\left[\begin{array}{l}\log_x(4x-3)\geq 2\\ \log_x(4x-3)\leq -2\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\log_x(4x-3)-\log_x x^2\geq 0\\ \log_x(4x-3)-\log_x \frac{1}{x^2}\leq 0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-1)(4x-3-x^2)\geq 0\\ x>\frac{3}{4}\\ x\neq 1\end{cases}\\ \begin{cases}(x-1)\left(4x-3-\frac{1}{x^2}\right)\leq 0\\ x>\frac{3}{4}\\ x\neq 1\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-1)(x-3)(x-1)\leq 0\\ x>\frac{3}{4}\\ x\neq 1\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{(x-1)(4x^3-3x^2-1)}{x^2}\leq 0,\ x>\frac{3}{4},\ x\neq 1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-1)^2(x-3)\leq 0\\ x>\frac{3}{4}\\ x\neq 1\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{(x-1)^2(4x^2+x+1)}{x^2}\leq 0,\ x>\frac{3}{4}\\ x\neq 1\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\leq 0\\ x>\frac{3}{4}\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{4x^2+x+1}{x^2}\leq 0,\ x>\frac{3}{4}\end{cases}\end{array}\right.$$

$4x^2+x+1>0$, т.к. парабола ветвями вверх $D<0$ $(D=1-16=-15)$

$x^2\neq 0 \Rightarrow \frac{4x^2+x+1}{x^2}>0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leq 3\\ x>\frac{3}{4}\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{4x^2+x+1}{x^2}\leq 0 \quad \varnothing\\ x>\frac{3}{4}\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow x\in\left(\frac{3}{4};3\right]$$

6

Ответ: $\left(\frac{3}{4};3\right]$ $x\neq 1$,

№5 $$\begin{cases}4\cos^2x\cdot\sin^2\frac{x}{6}-4\sin\frac{x}{6}+4\sin^2x\cdot\sin\frac{x}{6}+1=0\\ \sin\frac{x}{4}=\sqrt{\sin y}\end{cases}$$

$$\begin{cases}4\cos^2x\cdot\sin^2\frac{x}{6}-4\sin\frac{x}{6}\cdot\cos^2x+1=0 \quad (1)\\ \sin y=\sin^2\frac{x}{4}\\ \sin\frac{x}{4}\geq 0\end{cases}$$

Решим ① ур-е:

$$4\cos^2 x\cdot\sin^2\frac{x}{6} - 4\cos^2 x\cdot\sin\frac{x}{6}+1=0$$

$$D = 16\cos^4 x - 16\cos^2 x = 16\cos^2 x\,(\cos^2 x - 1) =$$

$$= -16\cos^2 x\cdot\sin^2 x$$

$\Rightarrow D\le 0$

Если $D<0$, то решений нет

Если $D=0$, то $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = 0\end{array}\right.$

Если $\cos x = 0$, то ① ур-е вырождается в $1=0$

$\Rightarrow$ нет реш.

Тогда $\sin x = 0$, $\cos^2 x = 1$

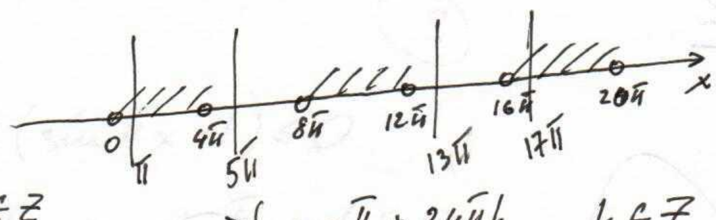
$$\begin{cases}\sin x = 0\\ 4\sin^2\frac{x}{6} - 4\sin\frac{x}{6}+1=0\\ \sin y = \sin^2\frac{x}{4}\\ \sin\frac{x}{4}\ge 0\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin x = 0\\ \left(2\sin\frac{x}{6}-1\right)^2=0\\ \sin y = \sin^2\frac{x}{4}\\ \sin\frac{x}{4}\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x = 0\\ \sin\frac{x}{6}=\frac{1}{2}\\ \sin y = \sin^2\frac{x}{4}\\ \sin\frac{x}{4}\ge 0 \quad +\end{cases}\qquad \begin{cases}x = \pi+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ \frac{x}{6}=\frac{\pi}{6}+2\pi k\\ \frac{x}{6}=\frac{5\pi}{6}+2\pi k\end{cases} ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\sin y = \sin^2\frac{x}{4}$$

$$2\pi f\le\frac{x}{4}\le\pi+2\pi f,\ f\in\mathbb{Z}$$

$$\begin{cases}x=\pi+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\pi+12\pi k \cdot 2\\ x = 5\pi+12\pi k\ (-1)\\ 8\pi f\le x\le 4\pi+8\pi f,\ f\in\mathbb{Z}\\ \sin y = \sin^2\frac{x}{4}\end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases}x=\pi+24\pi k\\ x=17\pi+24\pi k\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$$

Тогда $\sin\frac{x}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sin y = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x = \pi + 24\pi k \\ x = 17\pi + 24\pi k \\ \sin y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pi + 24\pi k \\ x = 17\pi + 24\pi k \\ y = \frac{\pi}{6} + 2\pi f \\ y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi f \end{cases}, f \in Z$$

~~Ответ: $\pi + 24\pi k$~~

Ответ: $x = \left[\begin{array}{l} \pi + 24\pi k \\ 17\pi + 24\pi k \end{array}\right., k \in Z$

$y = \frac{\pi}{6} \cdot (-1)^f + \pi f, f \in Z$

10

№3 $x_3 + x_5 + x_7 = 66339 \cdot 2^{2016}$

$x_3 = x_1 \cdot g^2$

$x_5 = x_1 \cdot g^4$

$x_7 = x_1 \cdot g^6, \; g \in N, \; x_1 \in N$

$x_1 g^2 (g^4 + g^2 + 1) = 7 \cdot 3^7 \cdot 2^{2016}$

$\cancel{g^4+g^2+1}$ $g \vdots 7$, $\cancel{x_1}$

$g \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow g^4 + g^2 + 1 \overset{7}{\equiv} 0$

$g^4 + g^2 + 1 \overset{2}{\equiv} 1$

$g \overset{3}{\equiv} 2 \Rightarrow g^4 + g^2 + 1 \overset{2}{\equiv} 1$

$g^4 + g^2 + 1$

Предположим, $g = 2$, тогда

$x_1 \cdot 4(16 + 4 + 1) = 7 \cdot 3^7 \cdot 2^{2016}$

$x_1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 = 7 \cdot 3^7 \cdot 2^{2016}$

$x_1 = 2^{2014} \cdot 3^6 \in N \Rightarrow$ возможно

Ответ: 2

2

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

227266

Шифр ______

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 12

№1 Пусть x - скорость Коли, а y - Васи и Пети

$t_В$ - время Васи

$t_П$ - время Пети, $t_П = \frac{10}{7} t_В$

$t_{В1}$ - время Васи, когда он идёт пешком

S - путь

$t_В = \frac{2S}{x+y}$ $t_{В1} = \frac{S}{y}$

$t_П = \frac{S}{x+y} + \frac{2S_1}{x+y}$, где $S_1 = S - \frac{S}{x+y} \cdot y$

$t_П = \frac{S}{x+y}\left(1 + 2 - \frac{2y}{x+y}\right) = \frac{S(3x+y)}{(x+y)^2}$

$t_П = \frac{10}{7} t_В$

$\frac{\cancel{S}(3x+y)}{(x+y)^{\cancel{2}}} = \frac{10 \cdot 2\cancel{S}}{7\cancel{(x+y)}}$

$20(x+y) = 7(3x+y)$

$13y = x$

$\frac{t_{В1}}{t_В} = \frac{S}{y} \cdot \frac{x+y}{2S} = \frac{x+y}{2y} = \frac{14y}{2y} = 7$

Ответ: в 7 раз

8

№6 $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{4\log^{-1}_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin x}{\sin x + 15}\right)}$

Пусть $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$

$$f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4}{\log_2\left(\frac{t+15}{t}\right)}}$$

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{t+15}{t} > 0 \\ \log_2\left(\frac{t+15}{t}\right) > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{t+15}{t} > 0 \\ (2-1)\left(\frac{t+15}{t} - 1\right) > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{t+15}{t} > 0 \\ \frac{15}{t} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t+15 > 0 \\ t > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t > -15 \\ t > 0 \end{cases} \iff t > 0$

$\Rightarrow t \in (0; 1]$

$$g(t) = \frac{t+15}{t} = 1 + \frac{15}{t}$$

$$g'(t) = -\frac{15}{t^2}$$

$-$ 0 $-$

$g(t)$ – ~~монотонно~~ монотонно убывающая ф-я $\Rightarrow$

$g(t) \in \cancel{(+\infty} [16; +\infty)$ при $t \in (0; 1]$

$\log_2 g(t) \in [4; +\infty)$ – монотонно возраст ф-ия при $g(t) \in [16; +\infty)$

$l(t) = \sqrt{\frac{4}{\log_2 g(t)}} \in (0; 1]$ – монотонно убыв. ф-ия

$f(x) = \operatorname{arctg} l(t)$, $l(t) \in (0; 1]$

$\Rightarrow f(x) \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$

Ответ: $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$

10

№ 7 Дано:

ABCD - ромб

$K \in AC$

$\rho(K; AB) = 6$

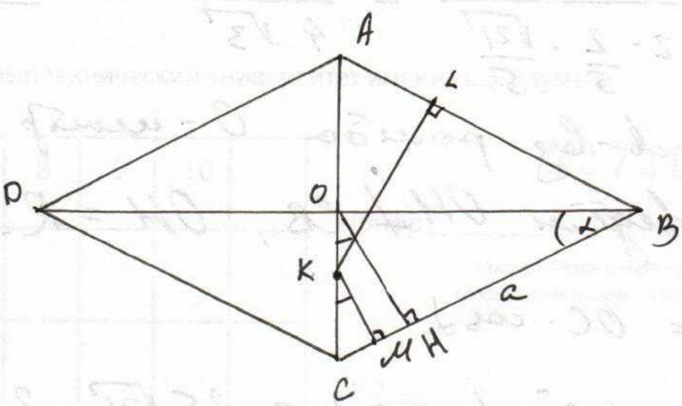
$\rho(K; BC = 1)$

$r = 2{,}5$ (в $\triangle ABC$)

AB - ?

R - ? (впис в $ABCD$)

Решение:



Пусть $AB = a = BC$

$AC \cap BD = O$

$\angle OBC = \alpha$

$KL \perp AB$, $KL = 6$

$KM \perp CB$; $KM = 1$

$\angle CKM = \alpha = \angle AKL$

т.к $\angle KAB = \angle KCB = 90^\circ - \alpha$ ($\triangle ABC$ - р/б, $\angle BOC = 90^\circ$)

$r = \dfrac{S}{p}$

$AC = 2a\sin\alpha$

$OB = a\cos\alpha$

$S = OC \cdot OB = a^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$p = \dfrac{1}{2}(2a + 2a\sin\alpha) = a(1 + \sin\alpha)$

$r = \dfrac{a\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$

$AK = \dfrac{6}{\cos\alpha}$ (из $\triangle AKL$) $\quad KC = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ (из $\triangle KMC$)

$AK + KC = AC$

$\dfrac{7}{\cos\alpha} = 2a\sin\alpha$

$a = \dfrac{7}{2\cos\alpha \cdot \sin\alpha}$

$r = \dfrac{7\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2\cos\alpha \cdot \sin\alpha(1 + \sin\alpha)}$

$2{,}5 \cdot 2(1 + \sin\alpha) = 7$

$5 + 5\sin\alpha = 7$, $\sin\alpha = \dfrac{2}{5}$, $\cos\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{4}{25}} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

$$a = \frac{7}{2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{25\sqrt{7}}{4\sqrt{3}} = \frac{25\sqrt{21}}{12}$$

по св-ву ромба O – центр впис. окр.

Проведём $OH \perp CB$, $OH = R$, $\angle COH = \alpha$ (т.к. $\angle OCB = 90° - \alpha$)

$R = OC \cdot \cos\alpha$

$$R = a\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{25\sqrt{21}}{12} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Ответ: $\frac{25\sqrt{21}}{12}$; 3,5

12

№8 $M \in Oy \Rightarrow M(0; b)$

$y = 0,25(x+\sqrt{3})^2$

$y' = 0,5(x+\sqrt{3})$

Ур-ия касательных:

$y = 0,5(x_0+\sqrt{3})(x-x_0) + 0,25(x_0+\sqrt{3})^2$

Две кас. проходят через $M(0; b)$

$$b = -0,5x_0^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 + \frac{1}{4}x_0^2 + \frac{x_0\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}$$

$$b = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_0^2$$

$x_0 = \pm\sqrt{3-4b}$ – две абсциссы точек касания

$\operatorname{tg}\alpha = 0,5(x_0+\sqrt{3})$ – угол наклона касательных.

$x_{01} = \sqrt{3-4b}$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sqrt{3-4b}+\sqrt{3}}{2}$$

$x_{02} = -\sqrt{3-4b}$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3-4b}}{2}$$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 227266

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 12

№ 8 (продолжение)

Существуют два варианта: 1) $\alpha_1 + \alpha_2 = 60^\circ$

2) $\alpha_1 - \alpha_2 = 60^\circ$

Рассмотрим 1 вариант:

$\alpha_2 = 60^\circ - \alpha_1$

$\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 = \sqrt{3}$ формула $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$?

$\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha_1) = \sqrt{3}$

Пусть $\operatorname{tg}\alpha_1 = t$

$$t + \frac{\sqrt{3} - t}{\sqrt{3}t + 1} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}t^2 + t + \sqrt{3} - t = 3t + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}t^2 + \cancel{t} - 3t = 0$$

$$t(t - \sqrt{3}) = 0$$

6

$$\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \sqrt{3} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha_1 = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha_1 = \sqrt{3} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{3-4b} + \sqrt{3}}{2} = 0 \\ \frac{\sqrt{3-4b} + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{3-4b} = -\sqrt{3} \quad \varnothing \\ \sqrt{3-4b} = \sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow 3 - 4b = 3, \ b = 0$$

Рассмотрим 2 вариант:

$\alpha_2 = \alpha_1 - 60^\circ$

$$\Rightarrow t + \frac{t - \sqrt{3}}{\sqrt{3}t + 1} = \sqrt{3}$$

$\sqrt{3}t^2 + 2t - \sqrt{3} = 3t + \sqrt{3}$

$\sqrt{3}t^2 - t - 2\sqrt{3} = 0$

$D = 1 + 4\cdot 2\cdot 3 = 25$

$t_{1,2} = \frac{1\pm 5}{2\sqrt{3}} = \left[\begin{array}{l} \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha_1 = \sqrt{3} \\ tg\,\alpha_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{3-4b}+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3-4b}+\sqrt{3}}{2} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \varnothing \end{array}\right.$

т.к. $\frac{\sqrt{3-4b}+\sqrt{3}}{2} > 0$

$\Rightarrow \sqrt{3-4b} = \sqrt{3}$

$3-4b=3$

$b=0 \Rightarrow M(0;0)$

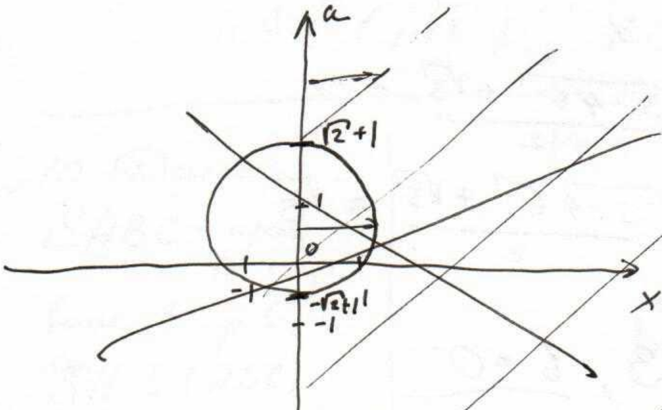
Ответ: $M(0;0)$

№9 $4x^2 - 8|x| + (2a+|x|-x)^2 = 4$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - 8x + 4a^2 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ 4x^2 + 8x + 4(a-x)^2 = 4 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 1 + a^2 = 0 \end{cases} \text{ I} \\ \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 + 2x(1-a) + a^2 - 1 = 0 \end{cases} \text{ II} \end{array}\right.$

Решим I систему:

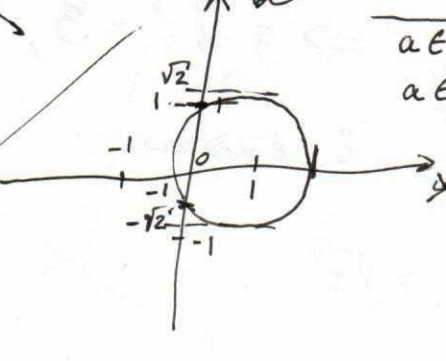
$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 1 + a^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)^2 + a^2 = 2 \end{cases}$ - окружность $O(1;0)$ $R = \sqrt{2}$



~~$a \in (-\infty; 1-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}+1; +\infty)$ - нет реш…~~

~~$a \in [1-\sqrt{2}; \sqrt{2}+1]$ - $x = \pm\sqrt{2-a^2}+1$~~

$x = \sqrt{2-a^2} + …$



$a \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ - не…

$a \in \{-\sqrt{2}\} \cup (-1;1) \cup \{\sqrt{2}\}$ - $x = \sqrt{2-…}$

$a \in (-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2})$ - $x = \pm\sqrt{2-a^2} + …$

Решим II систему:

$$\begin{cases} x<0 \\ 2x^2+2x(1-a)+a^2-1=0 \end{cases} \quad ①$$

1) $2x^2+2x(1-a)+a^2-1$ – парабола ветвями вверх

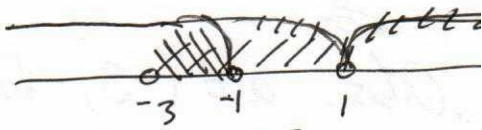
$$D = 4(1-2a+a^2)-8(a^2-1) = -4a^2+12-8a$$

Нет реш: $\left[\begin{array}{l} D<0 \\ \begin{cases} f(0)\geq 0 \\ x_B \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} -4a^2-8a+12<0 \\ \begin{cases} a^2-1\geq 0 \\ \dfrac{2(a-1)}{4}\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a^2+2a-3>0 \\ \begin{cases} a^2\geq 1 \\ a\geq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (a+3)(a-1)>0 \\ a\geq 1 \end{array}\right.$

$a \in (-\infty;-3) \cup [1;+\infty)$ – нет реш.

Два реш: $\begin{cases} D>0 \\ f(0)>0 \\ x_B<0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+2a-3<0 \\ a^2>1 \\ a<1 \end{cases} \quad \begin{cases} (a+3)(a-1)<0 \\ a<1 \end{cases}$



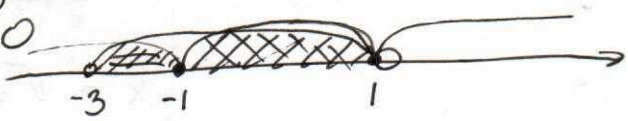
$\Rightarrow \cancel{\varnothing}$

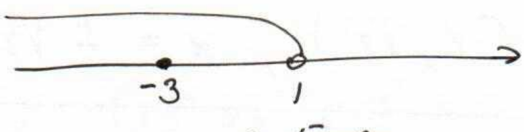
$a\in(-3;-1)$ – два реш

~~$\Rightarrow a\in[-3;1]$ – одно реш~~

~~Найдём это решение~~: Одно реш

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D>0 \\ f(0)\leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} D=0 \\ x_B<0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a+3)(a-1)<0 \\ a^2\leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-3 \\ a=1 \end{array}\right. \\ a<1 \end{cases} \end{array}\right.$





$\Rightarrow$ ~~$a\in[-3$~~

$a\in\{-3\}\cup[-1;1)$ – одно реш

$$x_{1,2} = \frac{-2(1-a)\pm 2\sqrt{-a^2-2a+3}}{4} = $$

$$= \frac{a-1\pm\sqrt{-a^2-2a+3}}{2}$$

Выпишем решения систем:

1) $a \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ — нет реш

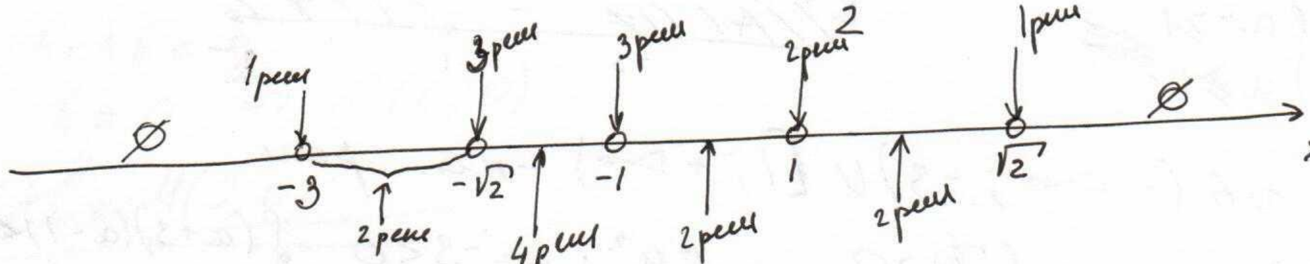
$a \in \{-\sqrt{2}\} \cup (-1; 1) \cup \{\sqrt{2}\}$ — $x = \sqrt{2-a^2} + 1$

$a \in (-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2})$ — $x = \pm\sqrt{2-a^2} + 1$

2) $a \in (-\infty; -3) \cup [1; +\infty)$ — нет реш

$a \in \{-3\} \cup [-1; 1)$ — $x = \dfrac{a-1-\sqrt{-a^2-2a+3}}{2}$

$a \in (-3; -1)$ — $x = \dfrac{a-1 \pm \sqrt{-a^2-2a+3}}{2}$



~~a∈~~

Ответ: $a \in (-3; -\sqrt{2})$, $\left\{ x = \dfrac{a-1 \pm \sqrt{-a^2-2a+3}}{2} \right.$ ~~x=~~

$a \in (-1; 1)$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{a-1-\sqrt{-a^2-2a+3}}{2} \\ x = \sqrt{2-a^2}+1 \end{array} \right.$

12

$a \in [1; \sqrt{2})$, $x = \pm\sqrt{2-a^2} + 1$

№10 Дано:

$SABC$ — прав тр. пир

впис в сф $O; R$

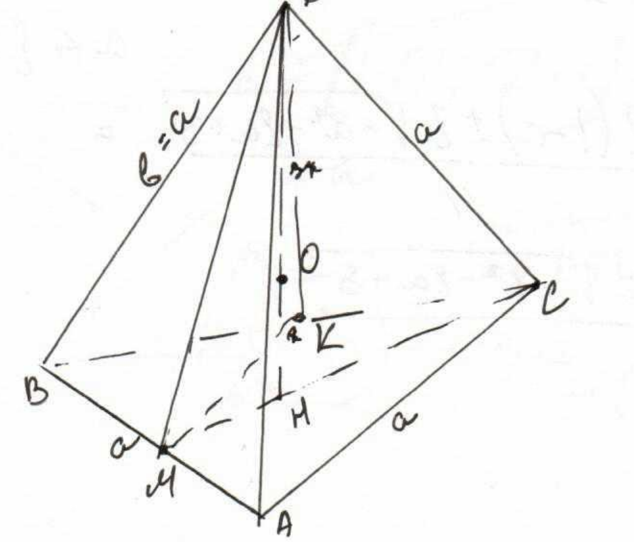
$SH \perp (ABC)$

$\dfrac{SO}{OH} = \dfrac{3}{1}$

S — ?

$\dfrac{V_1}{V_2}$ — ?

Решение:



Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 227266

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 12

№ 10 (продолжение)

Пусть $AB = a$

$BS = b$

Проведем $CM \perp AB$

$CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$CH = \frac{2}{3} CM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ← по св-ву мед, $AH = CH$

$SH^2 = SA^2 - AH^2$ (по т. Пифагора $\triangle ASH$)

$SH^2 = b^2 - \frac{a^2}{3}$

$SO = \frac{3}{4} SH = \frac{3}{4}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$

$OH = \frac{1}{4} SH$

$OH^2 = \frac{SH^2}{16}$

$AO^2 = OH^2 + HA^2 = \frac{b^2}{16} - \frac{a^2}{3\cdot 16} + \frac{a^2}{3}$

$AO^2 = SO^2$

$\frac{9}{16} SH^2 = \frac{SH^2}{16} + HA^2$

$\frac{SH^2}{2} = HA^2$

$SH^2 = 2HA^2$

$b^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$ $\qquad b^2 = a^2$

$b = a \Rightarrow$ все рёбра пирамиды равны

$SO = R$

$SO = \frac{3}{4}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{3}{4}a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

$a = \frac{4R}{\sqrt{6}} = \frac{4R}{6}\sqrt{6} = \frac{2}{3}R\sqrt{6}$ $\quad a^2 = \frac{16R}{6}$

$SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

~~Ответ~~ Проведём $MK \parallel AC$

S_{MBK} - min

0

$S = S_{MSK}$

$MK = \frac{a}{2}$ - ср. лин

$S = \frac{1}{2}\frac{MK}{2}\cdot\sqrt{SM^2 - \frac{MK^2}{4}} = \frac{a}{8}\sqrt{\frac{a^2\cdot 3}{4} - \frac{a^2}{16}} = \frac{a}{8}\frac{a\sqrt{11}}{4} =$

$= \frac{a^2\sqrt{11}}{32} =$

$= \frac{16R}{6}\frac{\sqrt{11}}{32} = \frac{\sqrt{11}R}{12}$

$S = \frac{a^2\sqrt{11}}{12}$

$V_1 = \frac{1}{3}S_{BMK}\cdot h$

$V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h$ $\quad \frac{S_{BMK}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$

$\frac{V_1}{V} = \frac{1}{4}$

$V_1 = \frac{V}{4}$

$V_2 = V - V_1 = \frac{3}{4}V$

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{11}R^{2?}}{12}$; $\frac{1}{3}$.