Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

+1

+1

+1

Шифр 227020

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету МАТЕМАТИКА

(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника ТУЛИНЦЕВ ВЯЧЕСЛАВ ВАСИЛЬЕВИЧ

Город, № школы (образовательного учреждения) г. Москва. ГБОУ Лицей № 1580

Регистрационный номер ШМ3831

Вариант задания 13

Дата проведения «27» февраля 2016 г.

Подпись участника

семьдесят четыре

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

227020

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
8	6	2	8	10	10	12	12	6	–	74

Шифр ______________________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 13

№1 Дано:

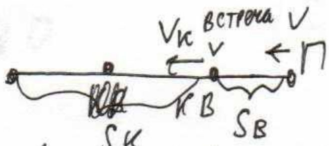
	(собств)		
	v	t	S
В	v	$\frac{11}{8}t$	S
П	v	t	S
К	$v_к$		S

Найти: ~~$\frac{S}{v}$ — ?~~ ~~$\frac{t_B}{\frac{S}{v}}$ — ?~~ $\boxed{t_{отн} = \frac{\frac{S}{v}}{t_B} \text{ — ?}}$

Решение:

I. 

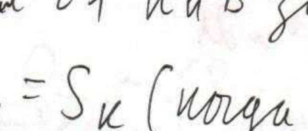
(t_1 – время пути В до встречи с К)

$S = V_к t_1 + V t_1$ 

$\Rightarrow t_1 = \frac{S}{V_к + V}$

Это же время t_1 К и В затратили на скутере на пути домой

$\Rightarrow S_П = V t_1 = S_К$ (когда К доехал до дома, П уже прошел путь $S_П$)

II 

– момент, когда К уже отвез В и выехал за П.

$S - V t_1 = V_к t_1 = (V_к + V) t_2$ (t_2 – время пути П от времени выезда К из дома)

$t_2 = \frac{S - V t_1}{V_к + V}$

III $t_B = t_1 + t_1$ (общее время пути В) (так как скутер ехал с одинак. скор. $V_к$ и одинак. расст. $S_к$)

$t_B = 2t_1 = \frac{2S}{V_к + V} = t_1$ $t_П$ (общее время пути Пети)

$t_п = t_1 + t_2 + t_2$ (· t_2 берем два раза так как время пути скутера туда и обр

$t_п = \frac{S}{V_к+V} + \frac{2(S - Vt_1)}{V_к+V} = \frac{3S - 2Vt_1}{V_к+V} = \frac{11}{8}t = \frac{11}{8} \cdot \frac{2S}{V_к+V} \quad | \cdot (V_к+V)$ ✓

$3S - 2V \cdot \frac{S}{V_к+V} = \frac{11}{4}S \quad | : S$

$\frac{1}{4} = 2\frac{V}{V_к+V} \Leftrightarrow \frac{1}{4}V_к + \frac{1}{4}V = 2V \quad | \cdot 4 \Leftrightarrow V_к + V = 8V \Leftrightarrow V_к = 7V$

$\cancel{\frac{t_B}{\frac{S}{V}} = \frac{2t_1}{\frac{S}{V}} = \frac{\frac{2S}{V_к+V}}{\frac{S}{V}} = \frac{2V}{V_к+V}}$

$t_{отн} = \frac{\frac{S}{V}}{t_B} = \frac{\frac{S}{V}}{\frac{2S}{V+V_к}} = \frac{V+V_к}{2V} = \frac{8V}{2V} = 4$?

$\Rightarrow$ в 4 раза

Ответ: в 4 раза.

8

N2 $\frac{\sqrt{x^2-21}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2-21}} < \frac{21}{10}$

ОДЗ: $x^2 > 21$

$\frac{\sqrt{x^2-21}}{x} = t, \; t \neq 0$

$t - \frac{1}{t} < \frac{21}{10}$

$t^2 - \frac{21}{10}t - 1 < 0$ (разложим на множители)

$D = \frac{441}{100} + 4 = \frac{841}{100} = \left(\frac{29}{10}\right)^2$

$t = \frac{\frac{21}{10} \pm \frac{29}{10}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{5}{2} \\ t = -\frac{2}{5} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 0 < t < \frac{5}{2} \\ -\frac{2}{5} < t < 0 \end{array}\right.$

$\left(t - \frac{5}{2}\right)\left(t + \frac{2}{5}\right) < 0$

$\cancel{\left[\begin{array}{l} 0 < t < \frac{5}{2} \\ -\frac{2}{5} < t < 0 \end{array}\right.}$

Обр. замена

$$\cancel{\left[\begin{array}{l} 0<\frac{\sqrt{x^2-21}}{x}<\frac{5}{2} \\ -\frac{2}{5}<\frac{\sqrt{x^2-21}}{x}<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{5}<\frac{\sqrt{x^2-21}}{x}<\frac{5}{2} \\ \frac{\sqrt{x^2-21}}{x}\neq 0 \end{cases}}$$

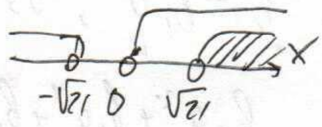
$$\begin{cases} -\frac{2}{5}<\frac{\sqrt{x^2-21}}{x}<\frac{5}{2} \\ \frac{\sqrt{x^2-21}}{x}\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{2}{5}<\frac{\sqrt{x^2-21}}{x}<\frac{5}{2} \quad (2) \\ x\neq\pm\sqrt{21} \\ x\neq 0 \end{cases}$$

2) $-\frac{2}{5}<\frac{\sqrt{x^2-21}}{x}<\frac{5}{2}$

2.1) $\begin{cases} x>0 \\ \sqrt{x^2-21}<\frac{5}{2}x \\ \sqrt{x^2-21}>-\frac{2}{5}x \end{cases}$ ~~(для $\forall x>0$ вып-ся)~~ (для $\forall x>0$ и из D_f, $f(x)=\sqrt{x^2-21}$ вып-ся)

$$\begin{cases} x>0 \\ x^2-21<\frac{25}{4}x^2 \\ x^2-21\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ |x|\geq\sqrt{21} \\ \underbrace{\frac{21}{4}x^2}_{\geq 0}>\underbrace{-21}_{<0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x>\sqrt{21} \\ x<-\sqrt{21} \end{array}\right. \end{cases}$$

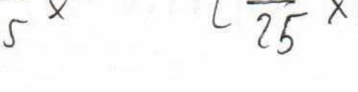


$x>\sqrt{21}$

2.2) $\begin{cases} x<0 \\ \sqrt{x^2-21}>\underbrace{\frac{5}{2}x}_{<0} \\ \sqrt{x^2-21}<\underbrace{-\frac{2}{5}x}_{>0} \end{cases}$ — (для $\forall x>0$ из D_f, $f(x)=\sqrt{x^2-21}$ вып-ся)

$$\begin{cases} x<0 \\ |x|>\sqrt{21} \\ x^2-21<\frac{4}{25}x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\sqrt{21} \\ \frac{21}{25}x^2<21 \;\Big|:\frac{21}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\sqrt{21} \\ x^2<25 \end{cases}$$

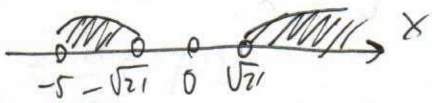
$$\begin{cases} x<-\sqrt{21} \\ \left[\begin{array}{l} x<5 \\ x>-5 \end{array}\right. \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>-5 \\ x<-\sqrt{21} \end{array}\right.$$

вернемся в систему

$$\begin{cases} x \neq \pm\sqrt{21} \\ x \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{21} \\ \begin{cases} x > -5 \\ x < -\sqrt{21} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$



$(-\infty\ ;\ -5)$

$x \in (\cancel{-5;}\ -\sqrt{21}) \cup (\sqrt{21}; +\infty)$

6

Ответ: $x \in (-5; -\sqrt{21}) \cup (\sqrt{21}; +\infty)$

№3 Дано: b_n – Г.П.; $b_1, b_2, \dots, b_n \in N$; $b_n = b_1 q^{n-1}$ $(n \in N)$

$b_3 + b_5 + b_7 = 22113 \cdot 2^{2016}$ т.к. р-р бет и все чл N числа $\Rightarrow |q| \geq 1$.

Найти: q – ?

Решение:

$b_3 = b_1 q^2$; $b_5 = b_1 q^4$; $b_7 = b_1 q^6$

$b_1 q^2 + b_1 q^4 + b_1 q^6 = b_1 q^2 (1 + q^2 + q^4) = 22113 \cdot 2^{2016} = 3^5 \cdot 2^{2016} \cdot 91$

$22113 = 3^4 \cdot 273 = 3^5 \cdot 91$

Если $q = 1$, тогда: $b_1 \cdot 1 \cdot (1+1+1) = 3b_1 = 3^5 \cdot 2^{2016} \cdot 91 \Rightarrow b_1 = 3^4 \cdot 2^{2016} \cdot 91$

Подходит: $q = 1$ – решение.

Если $q = -1$, тогда: $b_1(-1)(1+1+1) = -3b_1 = 3^5 \cdot 2^{2016} \cdot 91 \Rightarrow b_1 = -3^4 \cdot 2^{2016} \cdot 91$

подходит $\Rightarrow q = -1$ – решение.

подбор

Ответ? 2

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 227020

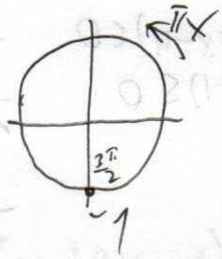
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 13

№4 $(\log_x^2(5x-4)-4)(\sin\pi x+1)\geq 0$. ОДЗ: $x>0$; $x\neq 1$; $5x-4>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x>\frac{4}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{4}{5} \\ x\neq 1\end{cases}$

$-1\leq \sin\pi x\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq \sin\pi x+1\leq 2 \Rightarrow \sin\pi x+1\geq 0$.

I. $\begin{cases} \sin\pi x+1=0 \\ x>\frac{4}{5} \\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\pi x=-1 \\ x>\frac{4}{5} \\ x\neq 1\end{cases}$



$\begin{cases} \pi x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ x>\frac{4}{5} \\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2}+2n, n\in\mathbb{Z} \\ x>\frac{4}{5} \\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}+2n>\frac{4}{5} \\ \frac{3}{2}+2n\neq 1 \\ x=\frac{3}{2}+2n; n\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2n>-\frac{7}{10} \\ 2n\neq -\frac{1}{2} \\ x=\frac{3}{2}+2n; n\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n>-\frac{7}{20} \\ n\neq -\frac{1}{4} \\ x=\frac{3}{2}+2n; n\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\geq 0 \\ x=\frac{3}{2}+2n, n\in\mathbb{Z}\end{cases}$

$x=\frac{3}{2}+2n$, при $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ – решение

II. $\sin\pi x+1\neq 0$:

$\begin{cases} x>\frac{4}{5} \\ x\neq 1 \\ \log_x^2(5x-4)-4\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x>\frac{4}{5} \\ \log_x^2(5x-4)\geq 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x>\frac{4}{5} \\ \left[\begin{array}{l} \log_x(5x-4)\geq 2 \\ \log_x(5x-4)\leq -2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow ?$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x>\frac{4}{5} \\ \left[\begin{array}{l} 5x-4\geq x^2 \\ 5x-4\leq \frac{1}{x^2} \quad |\cdot x^2\neq 0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x>\frac{4}{5} \\ \left[\begin{array}{l} x^2-5x+4\leq 0 \\ 5x^3-4x^2-1\leq 0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x>\frac{4}{5} \\ \left[\begin{array}{l} (x-1)(x-4)\leq 0 \\ 5x^3-4x^2-1\leq 0\end{array}\right.\end{cases}$

Разложим $5x^3-4x^2-1$ на множители

$x=1$ – корень данного ~~урав~~ выр-я $5x^3-4x^2-1$

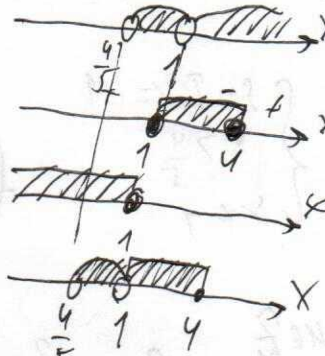
$$\begin{array}{r|l} 5x^3-4x^2-1 & x-1 \\ \underline{5x^3-5x^2} & 5x^2+x+1 \\ x^2-1 & \\ \underline{x^2-x} & \\ x-1 & \\ \underline{x-1} & \\ 0 & \end{array}$$

не расщ. на мн., т.к. D всегд

$$5x^3-4x^2-1=(5x^2+x+1)(x-1)$$
$$D=1-20<0$$

Вернемся в систему

$$\begin{cases} x\neq 1 \\ x>\frac{4}{5} \\ \left[\begin{array}{l} (x-1)(x-4)\le 0 \\ (5x^2+x+1)(x-1)\le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x>\frac{4}{5} \\ \left[\begin{array}{l} (x-1)(x-4)\le 0 \\ (x-1)\le 0 \end{array}\right. \end{cases}$$



$$x\in\left(\frac{4}{5};1\right)\cup(1;4]$$

Общее решение будет иметь вид

$$\left[\begin{array}{l} x\in\left\{\frac{3}{2}+2n;\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right\} \\ x\in\left(\frac{4}{5};1\right)\cup(1;4] \end{array}\right.$$

проверим на П-я, при $n=0$; $x_1=\frac{3}{2}\in(1;4]$

при $n=1$; $x_1=\frac{7}{2}\in(1;4]$

при $n=2$: $x_1=\frac{11}{2}\notin(1;4]$

Для более компакт. записи ответа

$$x\in\left\{\frac{3}{2}+2n;\ n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\right\}\cup\left(\frac{4}{5};1\right)\cup(1;4]$$

Ответ: $x\in\left\{\frac{3}{2}+2n;\ n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\right\}\cup\left(\frac{4}{5};1\right)\cup(1;4]$.

8

№5 $\begin{cases} 4\cos^2 2x\cdot\sin^2\frac{x}{6} - 4\sin\frac{x}{6} + 4\sin^2 2x\cdot\sin\frac{x}{6} + 1 = 0 & (1) \\ \sqrt[4]{3}\sin\frac{x}{4} = \sqrt{\sin y} & (2) \end{cases}$

2) $\sqrt[4]{3}\sin\frac{x}{4} = \sqrt{\sin y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{4} \geq 0 \\ \sin y = \sqrt{3}\sin^2\frac{x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} \sin\frac{x}{4} \geq 0 \\ \ldots\sin y \leq -1 \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{4} \geq 0 \\ \sin^2\frac{x}{4} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \\ \left[\begin{array}{l} y = \arcsin\left(\sqrt{3}\sin^2\frac{x}{4}\right) + 2\pi t \\ y = \pi - \arcsin\left(\sqrt{3}\sin^2\frac{x}{4}\right) + 2\pi t, t \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \end{cases}$

$\left(-1 \leq \sin y \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \sin\frac{x}{4} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

~~1) $4\sin\frac{x}{6}\left(\cos^2 2x\cdot\sin\frac{x}{6}\right.$~~

1) $4\cos^2 2x\cdot\sin^2\frac{x}{6} + 4\sin\frac{x}{6}\left(\sin^2 2x - 1\right) + 1 = 0$

$4\cos^2 2x\sin^2\frac{x}{6} - 4\sin\frac{x}{6}\cos^2 2x + 1 = 0$

$4\cos^2 2x\sin^2\frac{x}{6} - 4\sin\frac{x}{6}\cos^2 2x + \cos^2 2x + \sin^2 2x = 0$

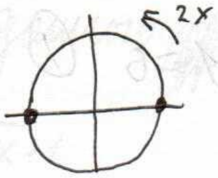
$\cos^2 2x\left(4\sin^2\frac{x}{6} - 4\sin\frac{x}{6} + 1\right) + \sin^2 2x = 0$

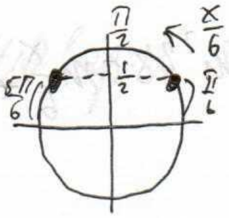
$\cos^2 2x\left(2\sin\frac{x}{6} - 1\right)^2 + \sin^2 2x = 0.$

$\underbrace{\underbrace{\cos^2 2x}_{\geq 0}\left(2\sin\frac{x}{6} - 1\right)^2}_{\geq 0} = -\sin^2 2x \leq 0$

вып-ся, когда $\begin{cases} \sin^2 2x = 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2\sin\frac{x}{6} - 1 = 0 \\ \cos^2 2x = 0 \end{array}\right. \end{cases}$ – невозможно, т.к. sin и cos при 1 знач арг не могут оба сразу равняться 0

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sin \frac{x}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$$





$$\begin{cases} 2x = \pi n \\ \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ n, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} n \\ x = 3\pi \pm 2\pi + 12\pi k;\ n, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} n \\ \left[\begin{array}{l} x = 5\pi + 12\pi k \\ x = \pi + 12\pi k;\ n, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \end{cases}$$

, Для $\forall$ из корней, зависящих от $k \in \mathbb{Z}$, можно подобрать такое $n \in \mathbb{Z}$, что $\frac{\pi}{2} n = 5\pi + 12\pi k$ или

$\frac{\pi}{2} n = \pi + 12\pi k$

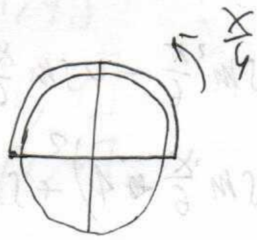
Значит $x = 3\pi \pm 2\pi + 12\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Вернемся в систему

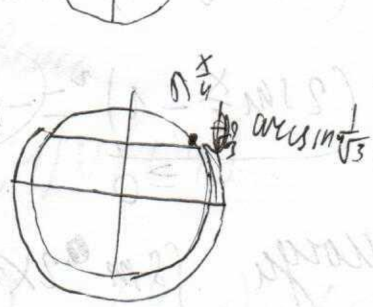
$$\begin{cases} x = 3\pi \pm 2\pi + 12\pi k, \\ \sin \frac{x}{4} \geq 0 \\ \sin \frac{x}{4} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \left[\begin{array}{l} y = \arcsin(\sqrt{3} \sin^2 \frac{x}{4}) + 2\pi t \\ y = \pi - \arcsin(\sqrt{3} \sin^2 \frac{x}{4}) + 2\pi t;\ k, t \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \end{cases} \quad 4$$

4. $$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{x}{4} = \frac{5}{4}\pi + 3\pi k \\ \frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} + 3\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ \sin \frac{x}{4} \geq 0 \quad (4.1) \\ \sin \frac{x}{4} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4.2) \end{cases}$$

(4.1) $\sin \frac{x}{4} \geq 0$



(4.2) $\sin \frac{x}{4} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$



$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{x}{4} = \frac{5}{4}\pi + 6\pi k \\ \frac{x}{4} = \frac{5}{4}\pi + 3\pi + 6\pi k = \frac{17}{4}\pi + 6\pi k. \\ \frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} + 6\pi k \\ \frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} + 3\pi + 6\pi k. = \frac{13}{4}\pi + 6\pi k. \end{array}\right. \\ x \in [2\pi t;\ 2\pi t + \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [2\pi t + \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}};\ 2\pi t + \pi],\ k, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 227020

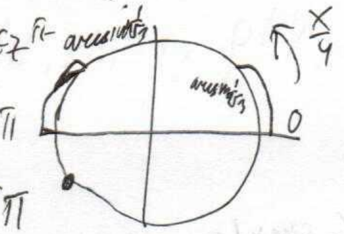
(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 13

N 5. проверим каждый из корней

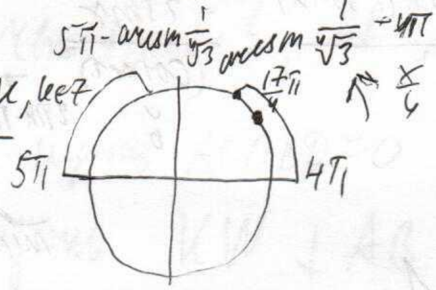
$\frac{x}{4} = \frac{5}{4}\pi + 6\pi k, k \in Z$

не подх



$\frac{x}{4} = \frac{17}{4}\pi + 6\pi k, k \in Z$

подх



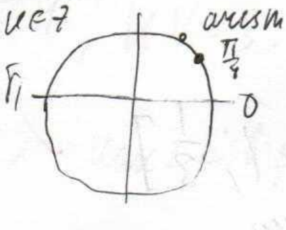
; $\arcsin\frac{1}{\sqrt[4]{3}} > \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$, т.к. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$, т.к. $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$

⇓

$x = 17\pi + 24\pi k$ — решение.
$k \in Z$

$\frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} + 6\pi k, k \in Z$

подх

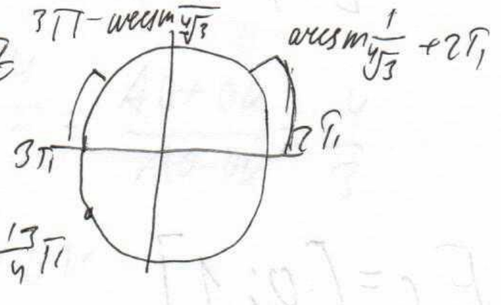


⇓

$x = \pi + 24\pi k, k \in Z$ — решение.

$\frac{x}{4} = \frac{13}{4}\pi + 6\pi k, k \in Z$

не подх



~~Значит, решение имеет вид~~ Подставим $\frac{x}{4}$ в y и получим ответ

ответ

$(x;y)\in\{(17\pi+24\pi k;\ \arcsin(\sqrt{3}\sin^2(\frac{17}{4}\pi+6\pi k))+2\pi t);$

$(17\pi+24\pi k;\ \pi-\arcsin(\sqrt{3}\sin^2(\frac{17}{4}\pi+6\pi k))+2\pi t);$

$(\pi+24\pi k;\ \arcsin(\sqrt{3}\sin^2(\frac{\pi}{4}+6\pi k))+2\pi t);$

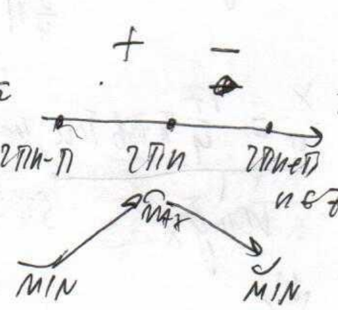
$(\pi+24\pi k;\ \pi-\arcsin(\sqrt{3}\sin^2(\frac{\pi}{4}+6\pi k))+2\pi t)\ |\ t,k\in Z\}$

10.

N6 $\quad f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{\log^{-1}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{\cos x}{\cos x+2}\right)}$

1. $a(x)=\frac{\cos x}{\cos x+2}$

$a'(x)=\left(\frac{\cos x}{\cos x+2}\right)'=\frac{-\sin x(\cos x+2)-\cos x(-\sin x)}{(\cos x+2)^2}=\frac{-2\sin x}{(\cos x+2)^2}$



$a_{max}(x)=a(2\pi n)=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$

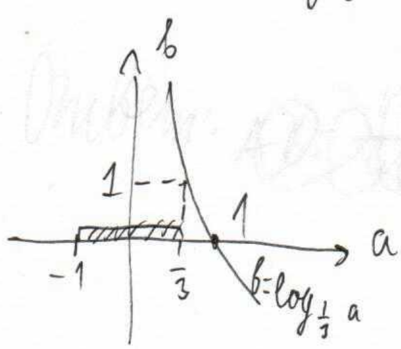
$a_{min}(x)=a(2\pi n+\pi)=\frac{-1}{2-1}=-1$

$\Rightarrow E_a=[-1;\frac{1}{3}]$

2. $b(a)=\log_{\frac{1}{3}}a$; $D_b=E_a=[-1;\frac{1}{3}]$

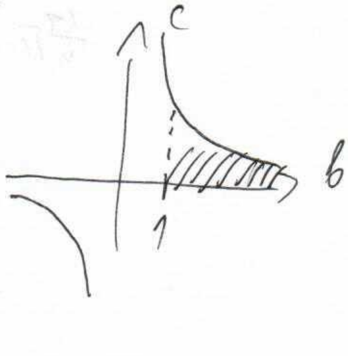
по рисунку видно

$E_b=[1;+\infty)$.



3. $c(b)=\frac{1}{b}$; $E_c=(0;1]$

$D_c=[1;+\infty)=E_b$



4. $d(c)=\sqrt{c}$; $Dd=Ec=[0;1] \Rightarrow Ed=[0;1]$.

5. $f(d)=\operatorname{arctg} d$ – возр. функция; $Df=Ed=[0;1]$

$\Rightarrow f(0)=\operatorname{arctg} 0=0$

$f(1)=\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4} \Rightarrow Ef=[0;\frac{\pi}{4}]$

Ответ: $Ef=[0;\frac{\pi}{4}]$.

10

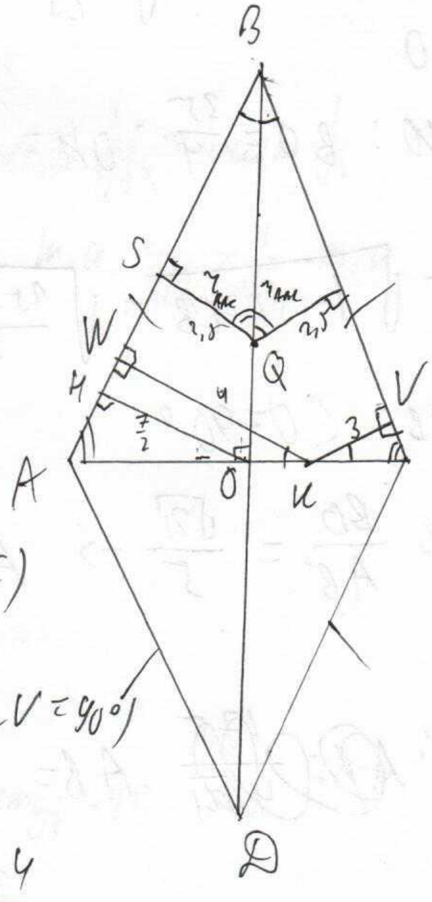
N 7 Дано: ABCD – ромб

$K \in AC$; $\rho(K;AB)=4$; $\rho(K;BC)=3$.

$r_{вп\, ABC\, окр}=2,5$

Найти: r вп. в ромб – ?; AB – ?

Решение: пусть $AC \cap BD = O$



1) ~~ΔBCA~~ пусть $KW \perp AB$, $KV \perp BC$, тогда $KW=4$; $KV=3$.

2) $\angle BAC=\angle BCA$ (как ∠∠ в р.б. ΔABC $AB=BC$)

$\Rightarrow \Delta AWK \sim \Delta KVC$ ($\angle A=\angle C$, $\angle W=\angle V=90°$)

$\Rightarrow \frac{WK}{VK}=\frac{AK}{KC}=\frac{4}{3}=\frac{AO+OK}{AO-OK}=\frac{4}{3}$

$3AO+3OK=4AO-4OK$

$AO=7OK$

3) $OH=r$ вп. в ромб; $OH \perp AB$; $\Delta AHO \sim \Delta AWK$ ($\angle A$ – общ.; $\angle H=\angle$

$\frac{WK}{OH}=\frac{AK}{AO}=\frac{AO+OK}{AO}=\frac{7OK+OK}{7OK}=\frac{8}{7}=\frac{4}{OH} \Rightarrow OH=\frac{7}{2}=r$ вп.

4) $QS \perp AB$; $QS = r_{ABC}$. (Q - центр впис в ABC окр-ти)

$\Delta BSQ \sim \Delta BHO$ ($\angle B$ - общ, $\angle S = \angle H = 90^\circ$) $\Rightarrow \frac{HO}{SQ} = \frac{BO}{BQ} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{7}{5}$

$BO = BQ + \frac{5}{2}$; $BO = \frac{7}{5} BQ$.

$\frac{7}{5} BQ = BQ + \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} BQ = \frac{5}{2} \Leftrightarrow BQ = \frac{25}{4}$

$BO = BQ + \frac{5}{2} = \frac{25}{4} + \frac{10}{4} = \frac{35}{4}$

~~5) ΔBSQ; $\angle S = 90^\circ$ $\sin\angle B = \frac{SQ}{BQ} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{25}{4}} = \frac{5 \cdot 4^2}{25 \cdot 2} = \frac{2}{5}$~~

~~$\cos\angle B = \sqrt{1 - \sin^2\angle B} = \sqrt{\frac{25-4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$~~

~~6) ΔBHO~~

5) ΔBHO: $BO = \frac{35}{4}$; $OH = \frac{7}{2}$; $\sin\angle B = \frac{OH}{BO} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{35}{4}} = \frac{7 \cdot 4}{35 \cdot 2} =$

$\cos\angle B = \sqrt{1 - \sin^2\angle B} = \sqrt{\frac{25-4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

6) ΔAOB: $\angle O = 90^\circ$

$\cos\angle B = \frac{BO}{AB} = \frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow AB = \frac{5}{\sqrt{21}} \cdot BO = \frac{5 \cdot 35}{4\sqrt{21}} = \frac{175}{4\sqrt{21}} = \frac{175\sqrt{21}}{84}$

Ответ: ~~$AB = \frac{175}{4\sqrt{21}}$~~ $AB = \frac{175\sqrt{21}}{84}$, $r = \frac{7}{2}$ 12

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 227020

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 13

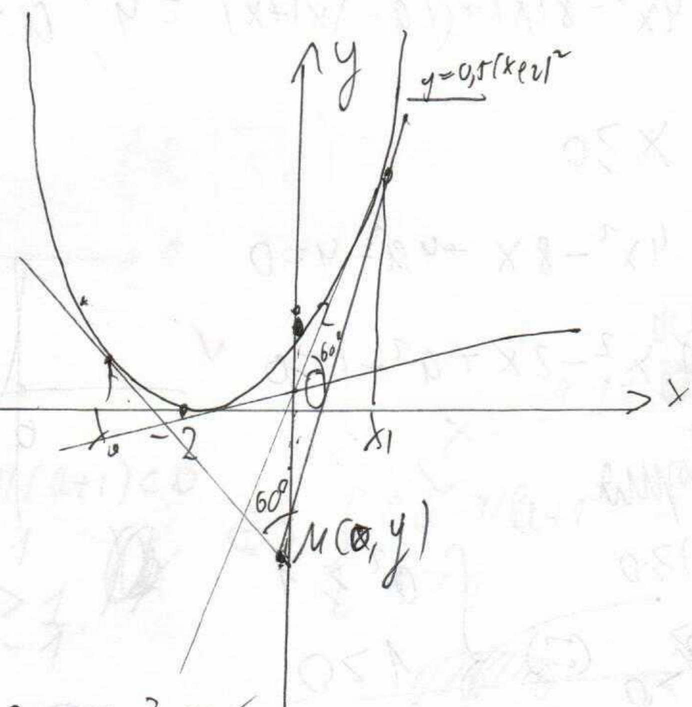
№8 $M \in Oy$

$y=0,5(x+2)^2$; $\angle\alpha=60^\circ$

$M(0;y)$ - ?

Решение: $f(x)=0,5(x+2)^2$

$f_{кас}(x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$



$f(x_0)=0,5x_0^2+2x_0+2$

$f'(x_0)=x_0+2$ ✓

$f_{кас}(x_0)=(x_0+2)x+0,5x_0^2+\cancel{2x_0}+2-x_0^2-\cancel{2x_0}=$

$=(x_0+2)x+2-0,5x_0^2$; $k_1=(x_0+2)$

$M(0;y)$; $f_{кас}(0)=y=2-0,5x_0^2=2-0,5x_1^2 \Rightarrow x_1^2=x_0^2$

$x_0=-x_1$

$(x_0\neq x_1)$

$f_{кас}(x_1)=(x_1+2)x+2-0,5x_1^2$; $k_2=(x_1+2)=(2-x_0)$

$\operatorname{tg}60=\sqrt{3}=\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\dfrac{2+x_0-2+x_0}{1+4-x_0^2}=\dfrac{2x_0}{5-x_0^2}=\sqrt{3}$ ✓

$x_0^2\sqrt{3}+2x_0-5\sqrt{3}=0$

$D/4=1+5\cdot3=16=4^2$; $x_0=\dfrac{-1\pm4}{\sqrt{3}}$; $\left[\begin{array}{l} x_{01}=\sqrt{3} \\ x_{02}=-\dfrac{5}{\sqrt{3}}=-\dfrac{5}{3}\sqrt{3}\end{array}\right.$

1. $y = 2 - 0{,}5\,x_{01}^2 = 2 - 0{,}5\cdot 3 = 0{,}5$

2. $y = 2 - 0{,}5\,x_{02}^2 = 2 - 0{,}5\cdot\frac{25}{3} = 2 - \frac{25}{6} = -\left(\frac{25-12}{6}\right) = -\frac{13}{6}$

~~Оон~~. 2 случая из-за симметрии

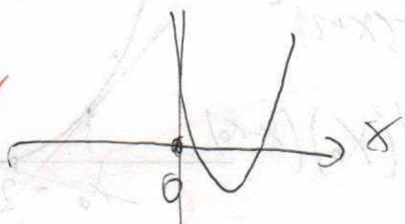
Ответ: $M(0;\,0{,}5)$; $M\left(0;\,-\frac{13}{6}\right)$. 12

№9. $4x^2 - 8|x| + (2a - |x| + x)^2 = 4$; a — ? 2 корня

1. $x \geq 0$

$4x^2 - 8x + 4a^2 - 4 = 0$

$f(x)$ $x^2 - 2x + a^2 - 1 = 0$



I. 2 корня

$x = 1 \pm \sqrt{2 - a^2}$

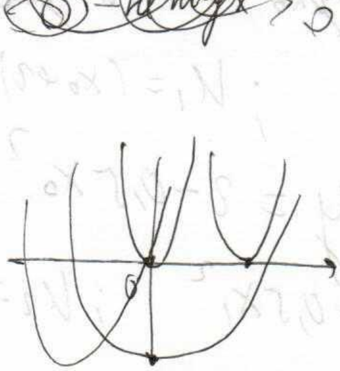
$\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ x_в > 0 \\ D > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \geq 1 \\ 1 > 0 \\ 1 - a^2 + 1 > 0 \end{cases}$ ~~≥ 0 — непуст~~ > 0 ~~$\circ D$~~ $\Leftrightarrow \begin{cases} |a| \geq 1 \\ 1 > 0 \\ |a| \leq \sqrt{2} \end{cases}$

$-\sqrt{2}$ -1 1 $\sqrt{2}$

$a \in (-\sqrt{2}; -1] \cup$

II. 1 корень

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(0) < 0 \\ D = 0 \\ x_в \geq 0 \end{cases} \text{— вып-ся } x_в = 1. \\ \begin{cases} f(0) = 0 \\ x_в < 0 \end{cases} \varnothing \end{array}\right.$



$\left[\begin{array}{l} 2 - a^2 = 0 \\ a^2 - 1 < 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \pm\sqrt{2} \\ \begin{cases} a < 1 \\ a > -1 \end{cases} \end{array}\right.$ $\Rightarrow x = 1.$

$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{2 - a^2}$

$-\sqrt{2}$ -1 1 $\sqrt{2}$ a

III ОИ. $a \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$

2. $x<0$

$4x^2+8x+(2a+2x)^2=4$

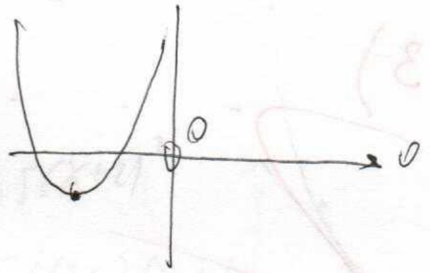
$x^2+2x+(a+x)^2=1$

$x^2+2x+x^2+2ax+a^2-1=0$

$g(x)=2x^2+2(a+1)x+a^2-1=0.$ ✓

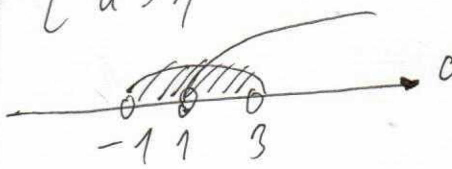
I. 2 р.

$\begin{cases} D_1>0 \\ x_b<0 \\ f(0)>0 \end{cases}$



$x=\dfrac{-a-1\pm\sqrt{(3-a)(a+1)}}{2}$

$\begin{cases} -a^2+2a+3>0 \\ -\frac{a+1}{2}<0 \\ a^2>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)(a+1)<0 \\ a>-1 \\ \left[\begin{array}{l} a>1 \\ a<-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)(a+1)<0 \\ a>1 \end{cases}$

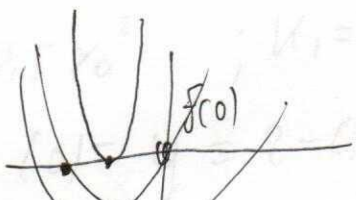


$a \in (1;3).$

$\sqrt{8})$

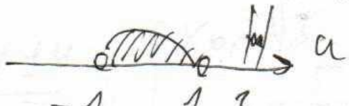
II. 1 р

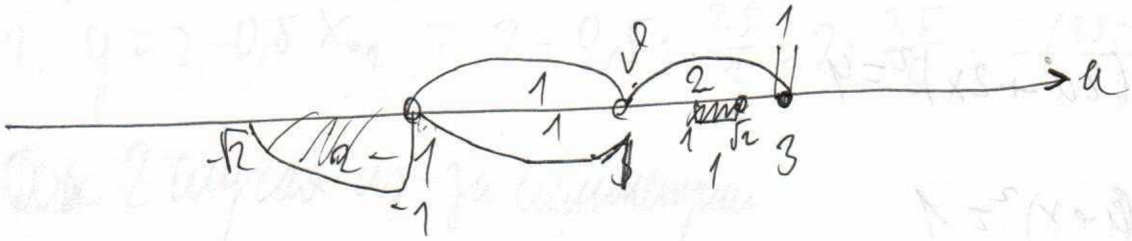
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D=0 \\ x_b<0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(0)=0 \\ x_b<0 \end{cases} \\ f(0)<0. \end{array}\right.$



$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=3 \\ a=-1 \\ a>-1 \end{cases} \quad x=\dfrac{-a-1}{2}=-2 \\ \begin{cases} a^2=1 \\ a>1 \end{cases} \varnothing \\ a^2<1 \end{array}\right.$

$x=\dfrac{-a-1-\sqrt{(3-a)(a+1)}}{2}$





Ответ: $a \in (-\sqrt{2}; -1]$; $x \in \{1 \pm \sqrt{2-a^2}\}$

$a \in [-1; 1)$; $x \in \{1 + \sqrt{2-a^2}$;

$a \in (\sqrt{2}; 3)$

6