x 18

x 18

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

227005

Шифр ____________
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
на олимпиаде «Шаг в будущее»

соревнования по образовательному предмету математика
(наименование дисциплины)

Фамилия И. О. участника Голубева Елена Андреевна

Город, № школы (образовательного учреждения) ГБОУ г. Москвы „Школа №1101"

Регистрационный номер ШМ 3531

Вариант задания 14

Дата проведения "27" февраля 2016 г.

Подпись участника ____________

Σ = 96 (девяносто шесть) [illegible]

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
8	8	8	4	10	10	12	12	12	12	96

227005

Шифр ____________

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 14

№1.

		v (км/ч)	t (ч)	S (км)
В	пешком	x	t_1	$t_1 x$ } S
	на вел.	y	t_1	$t_1 y$
П	пешком	x	t_1+t_2	$(t_1+t_2)x$ } S
	на вел.	y	t_2	$t_2 y$
К	навстр. В	y	t_1	$t_1 y$
	с В	y	t_1	$t_1 y$
	навстр. П	y	t_2	$t_2 y$
	с П	y	t_2	$t_2 y$
В	пешком	x	t	S

пусть $v_{\text{пешком}} = x$ км/ч

$v_{\text{на вел}} = y$ км/ч

пусть В шёл t_1 ч

К ехал ему навстр. t_1 ч

В + К едут обратно $t_1 y$ км t_1 ч

П шёл t_1 ч $+ t_2$ ч

К ехал ему навстр. t_2 ч

П + К едут обратно $t_2 y$ км t_2 ч

$\frac{t}{2t_1} = ?$

$$\begin{cases} S = t_1 x + t_1 y = t_2 y + (t_1+t_2)x \\ \frac{t_1+t_2+t_2}{2t_1} = \frac{13}{10} \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 x + t_1 y = t_2 y + t_1 x + t_2 x \\ 26t_1 = 10t_1 + 20t_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t_1-t_2) = t_2 x \\ 16t_1 = 20t_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{t_2 x}{t_1-t_2} \\ t_2 = \frac{4}{5}t_1 \end{cases} \quad \cancel{t = \frac{S}{x} = \frac{t_1(x+y)}{x} = \frac{t_1 \cdot \left(x + \frac{t_2}{t_1-t_2}x\right)}{t_1}}$$

$$t = \frac{S}{x} = \frac{t_1(x+y)}{x} = \frac{t_1 \cdot \left(x + \frac{t_2 x}{t_1-t_2}\right)}{x} = \frac{t_1 x \left(1 + \frac{4t_1}{5(t_1 - \frac{4}{5}t_1)}\right)}{x} = t_1 \cdot \left(1 + \frac{4t_1 \cdot 5}{5t_1}\right) = 5t_1$$

$$\frac{t}{2t_1} = \frac{5t_1}{2t_1} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Ответ: в 2,5 раза ✓

8

№2.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} < \frac{9}{20}$$

$$\frac{x^2-x^2+9}{x\cdot\sqrt{x^2-9}} - \frac{9}{20} < 0$$

$$\frac{180-9x\sqrt{x^2-9}}{20x\cdot\sqrt{x^2-9}} < 0 \qquad \frac{20-x\sqrt{x^2-9}}{x\sqrt{x^2-9}} < 0$$

1) $x<0 \Rightarrow x\cdot\sqrt{x^2-9} \le 0 \Rightarrow 20 - x\sqrt{x^2-9} \ge 20$ ~~верно при $\forall x<0$~~

$\cancel{x\cdot\sqrt{x^2}}$ $\quad \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} < 0 \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} > 0$ (И) $\quad x^2>9$

$\cancel{x\in(-\infty;0)\ x<3}$ $\quad x^2-9>0 \Rightarrow x^2>9 \Rightarrow x<-3 \quad x\in(-\infty;-3)$

2) $x>0 \quad x\sqrt{x^2-9} \ge 0$ $\quad 20-x\sqrt{x^2-9}$ – сравнение 2 неотриц. величин, можно заменить сравн. квадр.

$$\frac{400-x^2(x^2-9)}{x\sqrt{x^2-9}} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 400-x^4+9x^2<0 \\ x^2-9>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^4-9x^2-400>0 \\ x^2-9>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2-25)(x^2+16)>0 \\ (x-3)(x+3)>0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2+16>0 \\ \text{при } x>0 \\ x+3>0 \end{matrix} \quad \begin{cases} x^2-25>0 \\ x-3>0 \end{cases} \begin{cases} (x-5)(x+5)>0 \\ x>3 \end{cases}$$

$+ \quad -5 \quad - \quad 3 \quad 5 \quad +$ $\qquad x\in(5;+\infty)$

$x\in(-\infty;3)\cup(5;+\infty)$

8

Ответ: $x\in(-\infty;3)\cup(5;+\infty)$

№3.

a_n – беск. геом. прогр. с нат. чл. $\quad a_3+a_5+a_7 = 2457\cdot 2^{2016} \quad q=?$

т.к. все члены натур и прогр. беск, $q\in N$

$a_3 = a_1\cdot q^2 \qquad a_3+a_5+a_7 = a_1\cdot q^2 + a_1\cdot q^4 + a_1\cdot q^6 = 2457\cdot 2^{2016}$

$a_5 = a_1\cdot q^4 \qquad a_1\cdot q^2(1+q^2+q^4) = 2457\cdot 2^{2016}$

$a_7 = a_1\cdot q^6 \qquad q\ne 1$ по опр. геом. прогр. ?

$1+q^2+q^4>3 \qquad$ если q – чётное, то $1+q^2+q^4$ – нечётн.

если q – нечётное, то $1+q^2+q^4$ – нечётное

$2457 \vdots (1+q^2+q^4) \qquad 2457 = 27\cdot 91 = 27\cdot 13\cdot 7$

$q=2 \quad 1+q^2+q^4 = 16+4+1 = 21 \qquad 2457 \vdots 21 \qquad 2^{2016} \vdots (a_1 q^2)$

$q=3 \quad 1+q^2+q^4 = 81+9+1 = 91 \qquad 2457 \vdots 91 = 27 \qquad 27\cdot 2^{2016} \vdots (a_1 q^2)$

$q=4$ $1+q^2+q^4=256+16+1=273=\cancel{21\cdot 13}\ 91\cdot 3$ $2457 : 273$ $2^{2016} : (a, q^2)$

$q=5$ $1+q^2+q^4=625+25+1=651=\cancel{\ \ }\ 217\cdot 31\cdot 3$ $2457 \not: 651$

$651 : 3 = 217$ $\quad 217 : 7 = 31$ $\quad 2^{2016}\cdot 2457 \not: 5^2$

$q=6$ $1+q^2+q^4=1296+36+1=1333$ $\quad 1333 \not: 3$ $\quad 2457 \not: 1333$

$1333 \not: 13$

$1333 \not: 7$

$216 \cdot 6 = 1296$ $\quad 1296+37=1333$

80

$q=7$ $\quad 2457\cdot 2^{2016} \not: 7^2$

$q \geq 8$ при $q\geq 8$ $\quad 1+q^2+q^4 \geq 8^4+8^2+1=2^{12}+65=4096+65>2457$

не м/б

Ответ: $q=2; q=3; q=4$ (при $q=1$ – послед. один. чисел)

№4.

$(\log_x^2(6x-5)-4)\cdot(\sin \pi x+1)\geq 0$ $\quad -1\leq \sin\pi x\leq 1$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\pi x=-1\\ 6x-5>0\\ x>0\\ x\neq 1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\pi x\neq -1 \Rightarrow \sin\pi x+1>0\\ (\log^2_x(6x-5)-4)\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\pi x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k\\ x>\frac{5}{6}\\ x>0 \ (u)\\ x\neq 1\end{cases}\\ \begin{cases}\pi x\neq -\frac{\pi}{2}+2\pi k\\ (\log_x(6x-5)-2)(\log_x(6x-5)+2)\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$k\in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ – мн-во целых чисел

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\frac{1}{2}+2k\\ x>\frac{5}{6}\\ x\neq 1\ (u)\end{cases}\\ \begin{cases}x\neq -\frac{1}{2}+2k\\ (x-1)(6x-5-x^2)(x-1)(6x-5-\frac{1}{x^2})\geq 0\\ x>0\\ x\neq 1\\ 6x-5>0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\frac{1}{2}+2k\\ x>\frac{5}{6}\end{cases}\\ \begin{cases}x\neq -\frac{1}{2}+2k\\ \frac{(x-1)^2(x^2-6x+5)(6x^3-5x^2-1)}{x^2}\leq 0\\ x>\frac{5}{6}\\ x\neq 1\end{cases}\end{array}\right.$$

$-\frac{1}{2}+2k>\frac{5}{6}$ $\quad 2k>\frac{4}{3}$ $\quad k>\frac{2}{3}$ $\quad k\in \mathbb{Z} \Rightarrow k\geq 1$

$6x^3-5x^2-1=6x^3-6x^2+x^2-1=6x^2(x-1)+(x-1)(x+1)=(x-1)(6x^2+x+1)$

$\cancel{D=1-16<0}$ $D=1-24<0$ $\quad 6x^2+x+1>0$ при $\forall x$

$$\left[\begin{cases} x=-\frac{1}{2}+2k \\ k\ge 1 \end{cases}\right. \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{2}+2k \\ k\ge 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{2}+2k \\ k\ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ne -\frac{1}{2}+2k \\ \frac{(x-1)^4(x-5)}{x^2}\le 0 \Rightarrow x\le 5 \\ x>\frac{5}{6}\Rightarrow x^2>0 \\ x\ne 1 \Rightarrow (x-1)^4>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\ne -\frac{1}{2}+2k \\ \cancel{(x-5)}\, x\ge 5 \\ x>\frac{5}{6} \\ x\ne 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x\ne -\frac{1}{2}+2k \\ x\ge 5 \end{cases}$$

$\cancel{x\in[5;+\infty)}$

$\cancel{x\in[5;+\infty)\cup\{-\frac{1}{2}\}}$

при $k=1$ $x=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ при $k=2$ $x=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

при $k\ge 3$ $x\ge 5$ $x\in[5;+\infty)\cup\{\frac{3}{2};\frac{7}{2}\}$

Ответ: $\cancel{x\in[5;+\infty)\cup\{\frac{3}{2};\frac{7}{2}\}}$. $(5/6;1)\cup(1;5]\cup\{-\frac{1}{2}+2n\}$ $n\in N$

4

№5.

$$\begin{cases} 4\cos^2 2x\cdot\sin^2\frac{x}{6}+4\sin\frac{x}{6}-4\sin^2 2x\cdot\sin\frac{x}{6}+1=0 \\ 4\sqrt{3}\sin\frac{x}{4}=\sqrt{\cos y} \end{cases}$$

1) $4\cos^2 2x\cdot\sin^2\frac{x}{6}+4\sin\frac{x}{6}-4\sin^2 2x\cdot\sin\frac{x}{6}+1=0.$

$\cancel{2\cdot(1+\cos 4x)\cdot\sin^2\frac{x}{6}+4\sin\frac{x}{6}-2(1-\cos 4x)\cdot\sin\frac{x}{6}+1=0}$

$\cancel{2\sin^2\frac{x}{6}+2\cos 4x\cdot\sin^2\frac{x}{6}+4\sin\frac{x}{6}-2\sin\frac{x}{6}+2\cos 4x\cdot\sin\frac{x}{6}+1=0.}$

$\cancel{2\sin^2\frac{x}{6}+2\cos 4x\cdot\sin\frac{x}{6}\cdot(\sin\frac{x}{6}+1)+2\sin\frac{x}{6}+1=0.}$

$4\cos^2 2x\cdot\sin^2\frac{x}{6}+4\sin\frac{x}{6}\cdot(1-\sin^2 2x)+1=0$

$4\cos^2 2x\cdot\sin^2\frac{x}{6}+4\sin\frac{x}{6}\cos^2 2x+\cos^2 2x+\sin^2 2x=0$

$\cos^2 2x\cdot(2\sin\frac{x}{6}+1)^2+\sin^2 2x=0$

$$\begin{cases} \sin^2 2x=0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0 \text{ — не м/б} \\ 2\sin\frac{x}{6}+1=0 \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 2x=0 \\ \sin\frac{x}{6}=-\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x=\pi k \\ \left[\begin{array}{l} \frac{x}{6}=-\frac{\pi}{6}+2\pi l \\ \frac{x}{6}=-\frac{5\pi}{6}+2\pi m \end{array}\right. \end{cases}$$

$k\in Z$
$l\in Z$
$m\in Z.$

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}k \\ \left[\begin{array}{l} x=-\pi+12\pi l \\ x=-5\pi+12\pi m \end{array}\right. \end{cases}$$

$\frac{\pi}{2}k=-\pi+12\pi l$
$k=-2+24l$

$\frac{\pi}{2}k=-5\pi+12\pi m$
$k=-10+24m$

$$\left[\begin{array}{l} x=-\pi+12\pi l \\ x=-5\pi+12\pi m \end{array}\right.$$

2) $4\sqrt{3}\sin\frac{x}{4}=\sqrt{\cos y}\Rightarrow\sin\frac{x}{4}\ge 0$ $\sin(-\frac{\pi}{4}+3\pi l)\ge 0$

$2\pi b\le -\frac{\pi}{4}+3\pi l\le\pi+2\pi b$ $b\in z$

$\frac{1}{12}+\frac{2b}{3}\le l\le\frac{5}{12}+\frac{2b}{3}$ $l\in Z\Rightarrow$ $b=2t+1$

$x=-\pi+24\pi t+12\pi$
$x=11\pi+24\pi t$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 227005

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 14

№ 5.

$\sin\left(-\frac{5\pi}{4}+3\pi m\right) \geq 0$ $\quad 2\pi s \leq -\frac{5\pi}{4}+3\pi m \leq 2\pi s+1 \quad s \in Z$

$\frac{5}{12}+\frac{2s}{3} \leq m \leq \frac{3}{4}+\frac{2s}{3} \quad m \in Z \Rightarrow m = 2s$

$x = -5\pi + 24t\pi$

$\left[\begin{array}{l} x = -5\pi + 24\pi s \\ x = 11\pi + 24\pi t \end{array}\right.$

2) $\sqrt[4]{3} \sin\frac{x}{4} = \sqrt{\cos y}$

$\cos y = \sqrt{3}\sin^2\frac{x}{4}$

$\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)$

$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = -\frac{5\pi}{2}+12\pi s \\ \frac{x}{2} = \frac{11\pi}{2}+12\pi t \end{array}\right.$ $\quad \cos\frac{x}{2} = 0$

~~$\cos y = \cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{x}{2}$~~

10

$\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad y = \pm\frac{\pi}{6}+2\pi q \quad q \in Z$

Ответ: $\left(-5\pi+24\pi s; \frac{\pi}{6}+2\pi q\right); \left(-5\pi+24\pi s; -\frac{\pi}{6}+2\pi q\right);$
$\left(11\pi+24\pi t; \frac{\pi}{6}+2\pi q\right); \left(11\pi+24\pi t; -\frac{\pi}{6}+2\pi q\right) \quad s \in Z, q \in Z, t \in Z.$

№ 6.

$f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{6\log^{-1}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{\cos x}{\cos x+8}\right)} \qquad E(f) = ?$

1) $\cos x + 8 > 0$

$\frac{\cos x}{\cos x+8} > 0 \Rightarrow \cos x \in (0;1]$. пусть $\cos x = t, t \in (0;1]$

2) пусть $g(t) = 6\log^{-1}_{\frac{1}{3}}\frac{t}{t+8} \qquad 6\log^{-1}_{\frac{1}{3}}\frac{t}{t+8} = \frac{6}{-\log_3\frac{t}{t+8}} = \frac{6}{\log_3\frac{t+8}{t}}$

$g(t) = \frac{6}{\log_3\left(1+\frac{8}{t}\right)} \qquad t \in (0;1] \Rightarrow \frac{8}{t} \in [8;+\infty) \qquad 1+\frac{8}{t} \in [9;+\infty)$

$3>1$, $\log_3$ возр.

$\log_3\left(1+\frac{8}{t}\right) \in [2;+\infty) \qquad E(g) = (0;3] \Rightarrow \sqrt{g(t)} \in (0;\sqrt{3}]$

3) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{g(t)} \qquad \operatorname{arctg}$ — функция возр. $f(x) \in (\operatorname{arctg}0; \operatorname{arctg}\sqrt{3}]$

$E(f)=[0;\frac{\pi}{3}]$

Ответ: $E(f)=[0;\frac{\pi}{3}]$.

10

№8.

$M\in Oy$; l_1 и l_2 – кас к $y=(x+1)^2$ $\alpha=\angle(l_1,l_2)=60^\circ$

Найти: M

1) $y'(x_0)=2(x_0+1)=2x_0+2=k$ x_0 – абсц. точки кас.

ур. кас. $y=(2x_0+2)(x-x_0)+(x_0+1)^2$

$y=(2x_0+2)x-2x_0^2-2x_0+x_0^2+2x_0+1$

$y=(2x_0+2)x-x_0^2+1$

2) пусть $M(0;y_1)$ т.к. $M\in Oy$

$y_1=-x_0^2+1$ $\quad x_0^2=1-y_1$ $\quad x_{01}=\sqrt{1-y_1}$, $x_{02}=-\sqrt{1-y_1}$ x_{01} и x_{02} – абсц 2 точек кас

$k_1=2x_{01}+2=2\sqrt{1-y_1}+2$

$k_2=2x_{02}+2=2-2\sqrt{1-y_1}$

3) $tg\alpha=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{2\sqrt{1-y_1}+2-2+2\sqrt{1-y_1}}{1+4-4(1-y_1)}\right|=\left|\frac{4\sqrt{1-y_1}}{1+4-4+4y_1}\right|=\frac{4\sqrt{1-y_1}}{|4y_1+1|}$

$\alpha=60^\circ \Rightarrow tg\alpha=\sqrt{3}$ $\quad \frac{4\sqrt{1-y_1}}{|4y_1+1|}=\sqrt{3}$ $\quad \frac{4\sqrt{1-y_1}}{4y_1+1}=\pm\sqrt{3}$

$\frac{16(1-y_1)}{16y_1^2+8y_1+1}=3$ $\quad 16-16y_1=48y_1^2+24y_1+3$

$48y_1^2+40y_1-13=0$ $\quad \frac{D}{4}=20^2+48\cdot13=1024$

$48\cdot13$: $144+48=624$

$y_1=\frac{-20\pm32}{48}$ $\quad \left[\begin{array}{l} y_1=-\frac{52}{48} \\ y_1=\frac{12}{48}\end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} y_1=-\frac{13}{12} \\ y_1=\frac{1}{4}\end{array}\right.$

12

Ответ: $M_1(0;-\frac{13}{12})$ и $M_2(0;\frac{1}{4})$

№9

$4x^2-16|x|+(2a+|x|+x)^2=16$ $\quad$ 2 реш. $a=?$; $x=?$

при $x\geq0$ $\quad 4x^2-16x+(2a+2x)^2=16$

$x^2-4x+a^2+2ax+x^2=4$

$2x^2-2x\cdot(2-a)+a^2-4=0$. $\quad x=\frac{2-a\pm\sqrt{12-4a-a^2}}{2}$

$\frac{D}{4}=4-4a+a^2-2a^2+8=12-4a-a^2$

при $x \le 0$ $\quad 4x^2+16x+(2a+x-x)^2=16$

$x^2+4x+a^2=4$

$x^2+4x+a^2-4=0 \qquad \frac{D}{4}=4-a^2+4=8-a^2$

$x=-2\pm\sqrt{8-a^2}$

1) 1-ое ур. даёт 2 корня при $x\ge 0$

$\begin{cases} \frac{D}{4}>0 \\ x_1x_2\ge 0 \\ x_1+x_2>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 12-4a-a^2>0 \\ \frac{a^2-4}{2}\ge 0 \\ 2-a>0 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2+4a-12<0 \\ (a-2)(a+2)\ge 0 \\ a<2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a+6)(a-2)<0 \\ (a-2)(a+2)\ge 0 \\ a<2 \end{cases}$

$+ \quad -6 \quad - \quad -2 \quad - \quad 2 \quad +$

$a\in(-6;-2]$

при этом 2-ое ур. не даёт корней при $x<0$ $\quad \begin{cases} \frac{D}{4}<0 \\ x_1x_2\ge 0 \\ x_1+x_2>0 \end{cases} \quad \frac{D}{4}<0 \quad -2-$

1) 1-ое ур: если $\frac{D}{4}=12-4a-a^2>0 \qquad a^2+4a-12<0$

$(a-2)(a+6)<0 \quad a\in(-6;2)$

$x_1=\frac{2-a+\sqrt{\frac{D}{4}}}{2}, \qquad 2-a>0 \Rightarrow x_1>0$ если корни есть, то 1 - точно положит.

$x_2=\frac{2-a-\sqrt{\frac{D}{4}}}{2} \qquad 2-a>\sqrt{12-4a-a^2} \quad 4-4a+a^2>12-4a-a^2 \quad (a-2)(a+2)>0$

2-ое ур: если $\frac{D}{4}=8-a^2>0 \qquad (2\sqrt2-a)(2\sqrt2+a)>0$

$- \quad -2\sqrt2 \quad + \quad 2\sqrt2 \quad -$

$x_3=-2+\sqrt{8-a^2}$

$x_4=-2-\sqrt{8-a^2} \qquad x_4<0$ если корни есть, то 1 - точно отрицат. $\qquad a\in(-2\sqrt2;2\sqrt2)$

2) пусть 1-ое ур. даёт 2 корня + 2-ое не даёт корней $\quad \begin{cases} \frac{D_1}{4}>0 \\ x_2\ge 0 \\ \frac{D_2}{4}<0 \end{cases} \quad \begin{cases} -6<a<2 \\ 2-a\ge\sqrt{12-4a-a^2} \\ \left[\begin{array}{l} a>2\sqrt2 \text{ нет/б} \\ a<-2\sqrt2 \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} -6<a<2 \\ 4-4a+a^2\ge 12-4a-a^2 \\ a<-2\sqrt2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -6<a<-2\sqrt2 \\ 2a^2-8\ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -6<a<-2\sqrt2 \\ (a-2)(a+2)\ge 0 \end{cases}$

$+ \quad -2 \quad - \quad 2 \quad +$

$a\in(-6;-2\sqrt2) \qquad x=\frac{2-a\pm\sqrt{12-4a-a^2}}{2}$

3) пусть 2-ое ур. даёт 2 корня, 1-ое не даёт корней $\quad \begin{cases} \frac{D_1}{4}<0 \\ \frac{D_2}{4}>0 \\ x_3<0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2\sqrt2<a<2\sqrt2 \\ \left[\begin{array}{l} a>2 \\ a<-6 \text{ - нет/б} \end{array}\right. \\ -2+\sqrt{8-a^2}<0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2<a<2\sqrt2 \\ \sqrt{8-a^2}<2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2<a<2\sqrt2 \\ 8-a^2<4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2<a<2\sqrt2 \\ a^2-4>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2<a<2\sqrt2 \\ (a-2)(a+2)>0 \end{cases}$ (и)

$a\in(2;2\sqrt2) \qquad x=-2\pm\sqrt{8-a^2}$

~~первое уравнение даёт либо 2 корня, либо 0, поэтому 2-ое должно давать 0 или 2 (не л/б 1 и 1)~~
~~исключение - совпадение корней~~

3) совпадение корней (разных уравнений)

$x_1 = \dfrac{2-a \pm \sqrt{12-4a-a^2}}{2} \geq 0$

$x_2 = \dfrac{2-a - \sqrt{12-4a-a^2}}{2}$

$x_3 = -2 + \sqrt{8-a^2}$

$x_4 = -2 - \sqrt{8-a^2} < 0$

совпадение может быть только

$\left[\begin{array}{l} x_2 = x_4 \\ x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2-a+\sqrt{12-4a-a^2} = -4+2\sqrt{8-a^2} \\ 2-a-\sqrt{12-4a-a^2} = -4+2\sqrt{8-a^2} \end{array}\right.$

~~для этого у первого уравнения должно быть 2 корня~~ -

$6-a = 2\sqrt{8-a^2} \pm \sqrt{12-4a-a^2}$

$36-12a+a^2 = 32-4a^2+12-4a-a^2 \pm 4\cdot\sqrt{8-a^2}\cdot\sqrt{12-4a-a^2}$

$\cancel{4-12a}\ 6a^2-8a+8 = \pm 4\cdot\sqrt{8-a^2}\cdot\sqrt{12-4a-a^2}$

$3a^2-4a+4 = \pm 2\cdot\sqrt{8-a^2}\cdot\sqrt{12-4a-a^2}$

$9a^4$

4) $\begin{cases} x_1 \geq 0 \ (\text{и}) \\ x_2 < 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 < 0 \ (\text{и}) \\ \frac{D_1}{4} > 0 \\ \frac{D_2}{4} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{2-a-\sqrt{12-4a-a^2}}{2} < 0 \\ -2+\sqrt{8-a^2} \geq 0 \\ \cancel{12-4a}\ -6<a<2 \\ -2\sqrt2 < a < 2\sqrt2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4-4a+a^2 < 12-4a-a^2 \\ 8-a^2 \geq 4 \\ -2\sqrt2 < a < 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -2<a<2 \\ -2<a<2 \\ -2\sqrt2<a<2 \end{cases}$

$a \in (-2;2)$ $x_1 = \dfrac{2-a+\sqrt{12-4a-a^2}}{2}$, $x_4 = -2-\sqrt{8-a^2}$

5) $\frac{D_1}{4} = 0$ $\left[\begin{array}{l} a=-6 \Rightarrow x_1=x_2=8 \\ a=2 \Rightarrow x_1=x_2=0 \end{array}\right.$ 2-ое ур. не им. корней 1 реш.

$x_3 = -2+\sqrt{8-2^2} = 0$ н.к.

$x_4 = -2-\sqrt{8-2^2} = -4$. корни x_1 и x_4 (п. 4)

6) $\frac{D_2}{4} = 0$ $\left[\begin{array}{l} a = 2\sqrt2 \Rightarrow x_3 = x_4 = -2 \\ a = -2\sqrt2 \end{array}\right.$ $a = 2\sqrt2$ 1-ое ур. не им. корней 1 реш.

$a = -2\sqrt2$ $x_1 = 2+2\sqrt2+\sqrt{12+8\sqrt2-8}$

$x_2 = 2+2\sqrt2-2\sqrt{1+2\sqrt2} > 0$ 3 реш.

7) при $a=-2$ $\begin{cases} x_1 = 4+\sqrt{16} = 8 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -4 \end{cases}$ 3 реш.

12

8) совпадение корней разных уравнений м/б только в 0.

Ответ: при $a \in (-6; -2\sqrt2)$ $x = \dfrac{2-a \pm \sqrt{12-4a-a^2}}{2}$

при $a \in (-2; 2]$ $x_1 = \dfrac{2-a+\sqrt{12-4a-a^2}}{2}$ и $x = -2-\sqrt{8-a^2}$

при $a \in (2; 2\sqrt2)$ $x = -2 \pm \sqrt{8-a^2}$

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Шифр 2270об

(заполняется ответственным секретарем приёмной комиссии)

Вариант № 14

№ 7.

Дано: ABCD-ромб

$K \in AC$

$\rho(K; AB) = 8$

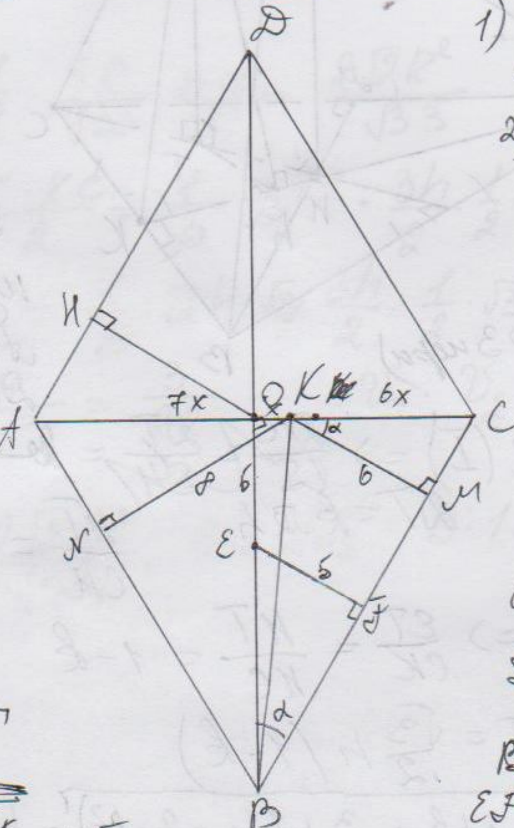
$\rho(K; BC) = 6$

r - радиус окр впис в $\triangle ABC$

$r = 5$

R - рад. окр, впис в ABCD

Найти: AB; R



1) $KM \perp BC$ $KM = \rho(K, BC) = 6$

$KN \perp AB$ $KN = \rho(K, AB) = 8$

2) $AB = BC \Rightarrow$

$$\frac{S_{\triangle ABK}}{S_{\triangle BKC}} = \frac{KN}{KM} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{S_{\triangle ABK}}{S_{\triangle BKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{4}{3}$$

$AO = OC \Rightarrow AO = 7x$

$OK = x$; $KC = 6x$

3) пусть $\angle OBC = \alpha = \angle CKM$

$$\cos\alpha = \frac{6}{6x} = \frac{1}{x}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

~~BE =~~ 4) EF - радиус впис в △ABC окр.

$EF = EO$

5) $BE = \frac{EF}{\sin\alpha} = \frac{5x}{\sqrt{x^2-1}}$

~~BO = OE + BE = 5x~~

$BO = EO + BE = \frac{5x}{\sqrt{x^2-1}} + 5$

$CM = KC \sin\alpha = 6x \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 6\sqrt{x^2-1}$

6) $\triangle BOC \sim \triangle KMC$ (I) $\Rightarrow \frac{BO}{KM} = \frac{OC}{MC}$

$$\frac{\frac{5x}{\sqrt{x^2-1}} + 5}{6} = \frac{7x}{6\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow 7x = 5x + 5\cdot\sqrt{x^2-1}$$

$5\sqrt{x^2-1} = 2x$ $25x^2 - 25 = 4x^2$

12

$21x^2 = 25$ $x = \frac{5}{\sqrt{21}}$

$$BC = \frac{OC}{\sin\alpha} = \cancel{\frac{7\cdot 5}{\sqrt{21}}} \frac{7x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{7\cdot 25}{21\cdot\sqrt{\frac{25}{21} - 1}} = \frac{7\cdot 25\cdot\sqrt{21}}{21\cdot 2} = \frac{25\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = AD$$

$$BO = 5 + \frac{25\cdot\sqrt{21}}{\sqrt{21}\cdot 2} = \frac{35}{2} = OD$$

8) OH - выс. △AOD $R = OH = \frac{AO\cdot OD}{AD} = \frac{35\cdot 35\cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{21}\cdot 2\cdot 25\sqrt{7}} = 7$

Ответ: $AB = \frac{25\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$

$R = 7$

№ 10.

Дано: $SABC$ – прав пир, впис в сф. рад R

SH – выс

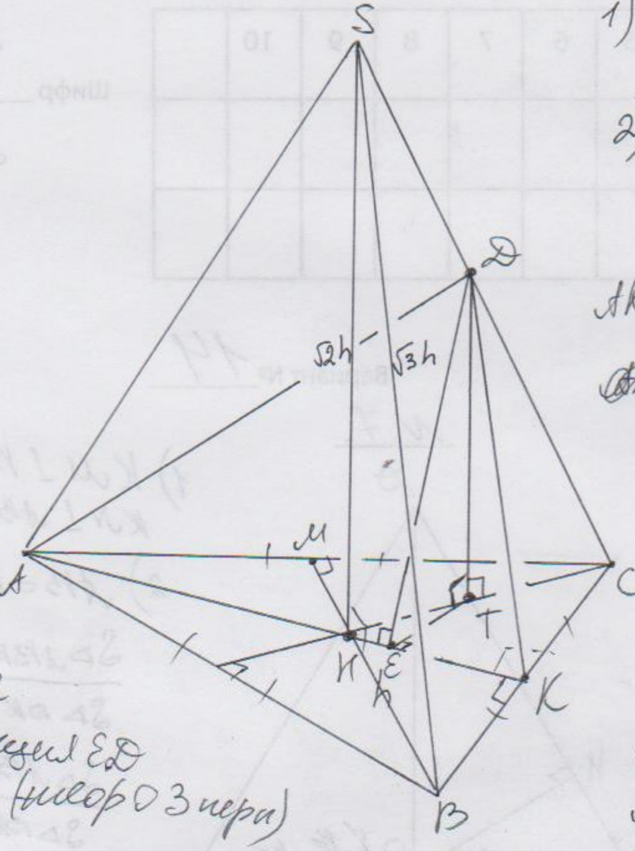
$SH : SA = \sqrt{2} : \sqrt{3}$

AK – выс $\triangle ABC$

$AK \subset \alpha$

α – пл. сеч

Найти: S_{min}



1) пусть BM – выс $\triangle ABC$

$AK \cap BM = H$

2) пусть $SH = h\sqrt{2}$

$SB = h\sqrt{3}$

$HB = \sqrt{SB^2 - SH^2} = h$

$AK = BM = \frac{3}{2} BH = \frac{3h}{2}$

$BM = AB \sin 60°$

$AB = \frac{BM}{\sin 60°} = \frac{3h \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{3} h$

$SABC$ – прав. тетраэдр

3) ~~пусть $\alpha \cap BS =$~~

пусть $\alpha \cap CS = D$

ADK – сечение

DE – выс $\triangle ADK$

4) пусть $DT \perp ABC$

$T \in HC$ $\quad ET$ – проекция ED

$AK \perp DE \Rightarrow ET \perp AK$ (теор о 3 перп)

$ET \parallel CK$

5) ~~пусть~~ $\triangle SHC \sim \triangle DTC$ (I) $\Rightarrow \frac{DC}{CS} = \frac{DT}{SH} = \cancel{k}$ ~~$DT = k\sqrt{2}h$~~

$\frac{DC}{CS} = \frac{CT}{CH} = \frac{DT}{SH} = k$ $\quad DT = k\sqrt{2}h$ $\quad \frac{HT}{CH} = 1 - k$

6) $\triangle HTE \sim \triangle HCK$ (I) $\Rightarrow \frac{ET}{CK} = \frac{HT}{HC} = 1 - k$

$CK = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} h$ $\quad ET = \frac{\sqrt{3}}{2} h (1-k)$

7) $DE = \sqrt{ET^2 + DT^2} = \sqrt{k^2 \cdot 2h^2 + \frac{3}{4} h^2 (1 - 2k + k^2)} = h \cdot \sqrt{2k^2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} k + \frac{3k^2}{4}} =$

$= h \cdot \sqrt{\frac{11k^2}{4} - \frac{3k}{2} + \frac{3}{4}} = \frac{h}{2} \sqrt{11k^2 - 6k + 3}$

8) $S_{\triangle сеч} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot AK$ – min $\Rightarrow DE$ – min

$f(k) = \frac{h}{2} \cdot \sqrt{11k^2 - 6k + 3}$ $\quad f'(k) = \frac{h}{2} \cdot \frac{22k - 6}{2\sqrt{11k^2 - 6k + 3}} = \frac{h}{2} \cdot \frac{11k - 3}{\sqrt{11k^2 - 6k + 3}} \vee 0$

$-$ $\quad$ $+$ $\quad$ $\frac{3}{11}$ $\quad$ min $\quad k = \frac{3}{11}$

$DE = \frac{h}{2} \cdot \sqrt{11 \cdot \frac{9}{11^2} - \frac{6 \cdot 3}{11} + 3} = \frac{h}{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{11} - \frac{18}{11} + 3} =$

$= \frac{h}{2} \cdot \sqrt{\frac{24}{11}} = \frac{h}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{6}{11}} = h\sqrt{\frac{6}{11}}$

9) пусть O – центр. опис. сферы $\Rightarrow O \in SH$ ~~пусть~~

$AH = BH = h$, $SA = h\sqrt{3}$ $\quad SH = h\sqrt{2}$ $\quad OH = h\sqrt{2} - R$

$\triangle OHA$ – п/уг

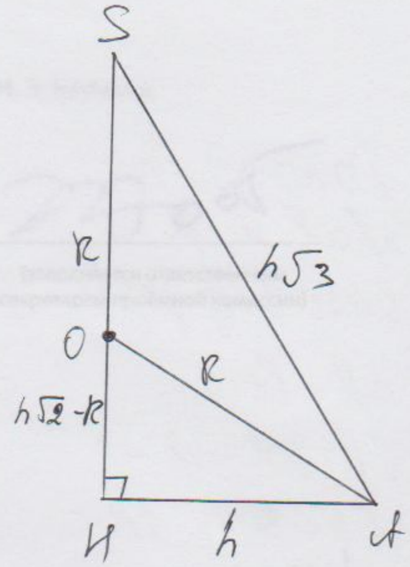
$OA^2 = OH^2 + HA^2$

$R^2 = (h\sqrt{2} - R)^2 + h^2$

$R^2 = 2h^2 - 2\sqrt{2}hR + R^2 + h^2$

$2\sqrt{2}\,hR = 3h^2$

$h = \frac{2\sqrt{2}R}{3}$



$DE = h\sqrt{\frac{6}{11}} = \frac{2\sqrt{2}R}{3}\cdot\sqrt{\frac{6}{11}} = \frac{4R}{\sqrt{33}}$

$AK = \frac{3h}{2} = R\sqrt{2}$

10) $S = \frac{1}{2}\cdot DE \cdot AK = \frac{1}{2}\cdot\frac{4R}{\sqrt{33}}\cdot R\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}R^2}{\sqrt{33}}$

11) $V_1 = \frac{1}{3}\cdot DT\cdot\frac{AK\cdot KC}{2} = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}\cancel{\sqrt{2}}h}{11}\cdot\frac{3h}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cancel{\sqrt{2}}}h = \frac{3\sqrt{3}h^3}{44\sqrt{2}}$

12

$V_{общ} = \frac{1}{3}SH\cdot\frac{AK\cdot AB}{2} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}h\cdot\frac{3h}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}h = \frac{\sqrt{6}h^3}{4}$

$\frac{V_1}{V_{общ}} = \frac{3\sqrt{3}h^3\cdot 4}{44\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}h^3} = \frac{3}{22}$ $\quad V_1 : V_2 = 3:19.$

Ответ: $S = \frac{2\sqrt{2}R^2}{\sqrt{33}}$; $V_1 : V_2 = 3:19$