Олимпиада: 5 февраля

Вариант: 1 Класс: 8

Задача 1 (*15 баллов*). В городе N ателье «Волшебный стежок», «Швейный блюз», «Шитьё с душой» и «Тканевые сны» распределяют 20 городских заказов. Каждое ателье хочет забрать наибольшее количество заказов. Ателье перечислены в порядке убывания числа работников и швейных мощностей. Правила обсуждения распределения заказов такие: сначала самое крупное ателье предлагает свой вариант. Если больше половины всех ателье этот вариант отвергают, то второе по мощности ателье вносит свое предложение (первое ателье никакого участия в дальнейшем распределении заказов не принимает и заказов не получает). Если новое предложение отвергается большинством голосов, то предлагавшее его ателье также отстраняется от обсуждения, и процедура повторяется для оставшихся двух ателье. Каким в итоге будет распределение заказов, если каждое ателье предпочитает то, в котором доля его заказов больше? (Решение предполагает рассмотрение всех случаев и обоснования).

Решение.

Рассмотрим стратегии. Если два ателье(20;0). Если три ателье:1)(20,0,0)-первое ателье теряет всё;2)(19,1,0)-если откажется второе, то будет (20,0);3)(19,0,1)-третье ателье отказываться не будет, тк иначе получит 0 заказов. Если четыре ателье:1)(20,0,0,0)⇨(19,0,1);2)(19,1,0,0)-если второе ателье откажется, то будет (19,0,1);3)(19,0,1,0)-если третье ателье откажется, то получит 0⇨это оптимальная стратегия;4)(19,0,0,1)-четвертое ателье может и отказаться, т.к. для него ничего не изменится⇨первому ателье так поступать не стоит.

Ответ: (19,0,1,0).

Баллы	Критерии
15	Верное обоснованное решение
10	Верный ответ с недостатками обоснования
5	Разобраны не все варианты

Задача 2 (*15 баллов*). Решите уравнение. $1-|x-2|^2-(2-x)^2\left(1-(x-2)^2\right)=\left(x^2-4x+4\right)^2$

Решение.

$t=|x-2|^2;1-t+t(t-1)=t^2;(1-t)(1-t)=t^2;1-t=t\vee 1-t=-t;t=\frac{1}{2};|x-2|=\frac{1}{\sqrt{2}};$

$x=2\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

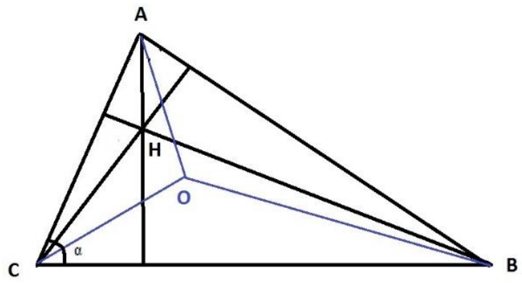
Ответ: $x=2\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Баллы	Критерии
15	Решение верно.
10	Ход решения верный, но допущена одна арифметическая ошибка.
5	Сделана замена переменной, но есть ошибки в применении формул или раскрытии модуля.

Задача 3 (*15 баллов*). В остроугольном $\triangle ABC$ точка H - точка пересечения высот, точка О – центр вписанной окружности. Угол AHB в k раз больше угла AOB. Найти величину угла ACB. Какие значения может принимать коэффициент k?

Решение.

Обозначим $\angle ACB = \alpha$



$$\angle AOB = 180 - \frac{180-\alpha}{2} = 90 + \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle AHB = 180 - \alpha$$

$$180 - \alpha = k \cdot (90 + \frac{\alpha}{2})$$

$$2 \cdot 90 - k \cdot 90 = \alpha + k \cdot \frac{\alpha}{2}$$

$$90 \cdot (2-k) = \frac{\alpha \cdot (2+k)}{2}$$

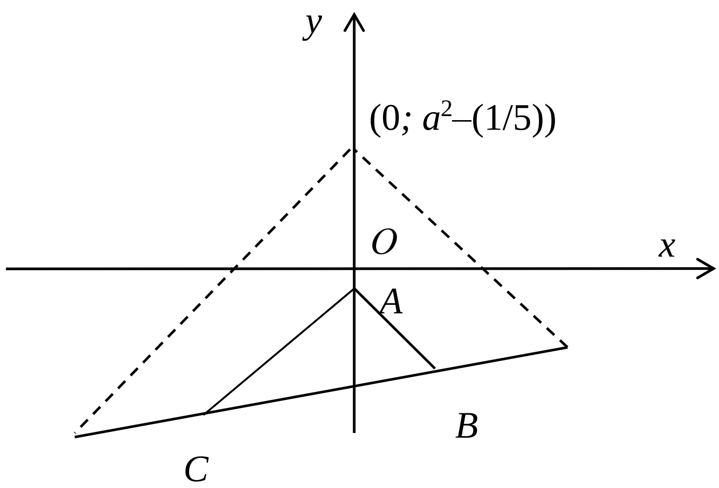
$$\alpha = \frac{180 \cdot (2-k)}{2+k}, 0 < k < 2$$

Ответ: $\angle ACB = \dfrac{180 \cdot (2-k)}{2+k}, 0 < k < 2$

Баллы	Критерии
15	Решение верно.
13	Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна ошибка.
5	За правильно найденное значение каждого из углов: $\angle AOB$ или $\angle AHB$.
0	Решение не верно или отсутствует

Задача 4 (*15 баллов*). При каких значениях параметра *а* фигура, ограниченная графиками $y = a^2 - \frac{1}{5} - |x|$ и $5y - x = -9$ имеет наименьшую площадь? Найдите эту наименьшую площадь.

Решение.



Изобразим на плоскости xOy графики, для $y = a^2 - \frac{1}{5} - |x|$ получаем при $x > 0,\ \ y = a^2 - \frac{1}{5} - x$, при $x < 0,\ \ y = a^2 - \frac{1}{5} + x$, при $x = 0,\ \ y = a^2 - \frac{1}{5}$. График показан на рисунке пунктиром. Самое нижнее положение точки пересечения с осью Oy будет при $a = 0$, это точка $A\left(0, -\frac{1}{5}\right)$. Графиком $5y - x = -9$ будет прямая BC. На прямой BC при $x = 0,\ \ y = -\frac{9}{5}$, эта точка ниже $A\left(0, -\frac{1}{5}\right)$, поэтому при любом значении параметра графики ограничивают треугольник. Наименьшее значение площади будет при $a = 0$, это площадь треугольника ABC с вершинами $A\left(0, -\frac{1}{5}\right)$, $B\left(\frac{4}{3}, -\frac{23}{15}\right)$, $C\left(-2, -\frac{11}{5}\right)$.

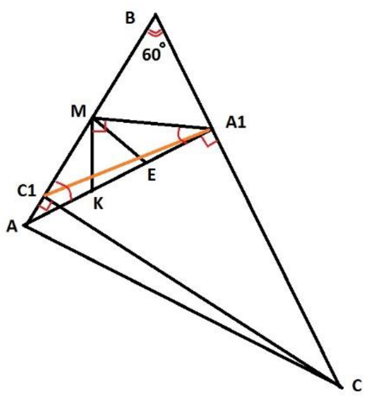
Надо найти площадь прямоугольного треугольника ABC. Находим катеты $AB = \frac{4}{3}\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}, AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, площадь равна $\frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{8}{3}$.

Ответ: $a = 0$, площадь $\frac{8}{3}$.

Баллы	Критерии
15	Полное обоснованное решение
12	Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение.
10	При любом верном ходе решения решена значительная часть задачи
5	Верно «раскрыт» модуль или другое верное начало решения
0	Неверные рассуждения или записан только ответ.

Задача 5 (*20 баллов*). В $\triangle ABC$, AA_1 *и* CC_1 - высоты. Точка M - середина стороны AB . Точка $K \in AA_1$ и делит ее в отношении 1:2, считая от точки A. Найти длину стороны AC, если длина отрезка $A_1C_1 = 5$ *и* $\angle A_1MK = 90^0$.

Решение.



1) $\triangle KMA_1$ прямоугольный.
Пусть E – середина

$KA_1 \Rightarrow ME = \frac{1}{2}KA_1 = EK = EA_1$

2) $\triangle AA_1B$ - прямоугольный.
M – середина AB (по условию)

$\Rightarrow AM = MA_1 \Rightarrow \triangle AMK = \triangle MA_1E$

$\Rightarrow MK = ME \Rightarrow MK = \frac{1}{2}KA_1 \Rightarrow$

$\angle MA_1A = 30^0 \Rightarrow \angle MAA_1 = 30^0 \Rightarrow$

из $\triangle AA_1B$ $\angle ABA_1 = 60^0$

3) $\triangle AA_1B \sim \triangle CC_1B$ (по двум углам) $\Rightarrow \dfrac{BC_1}{BC} = \dfrac{BA_1}{BA} \Rightarrow \triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$

(по двум сторонам и углу между ними), где $k = \dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{BC_1}{BC} = \cos\angle ABC = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow AC = 2A_1C_1 = 10$$

Ответ: 10

Баллы	Критерии
20	Решение верно.
15	Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна ошибка.
10	Найден угол А или угол В или доказано подобие треугольников.
5	Верно выполнен один из пунктов решения, в том числе использовано свойство медианы прямоугольного треугольника.
0	Решение не верно или отсутствует

Задача 6 (*20 баллов*). Малое предприятие производит комплекты пластиковых деталей и датчиков для измерительных приборов. В затраты на один комплект входит стоимость материалов, ежедневно закупаемых у фирмы-поставщика. Первого числа некоторого месяца эта стоимость составляла 1,975 тысяч рублей. В связи с сезонным снижением цен стоимость материалов уменьшается каждый день в течение месяца на одну и ту же величину по сравнению с предыдущим днем. Так, седьмого числа стоимость материалов будет 1,675 тысяч рублей. Стоимость одного комплекта равна стоимости материалов в данный день, умноженной на коэффициент k, (с помощью которого учитываются расходы на оплату труда работников, а также затраты на упаковку, этикетки, цены на которые зависят от валютного курса). В течение месяца можно считать, что k(t)=1+0,1t, где t – номер дня. Партия состоит из 40 комплектов, стоимость партии рассчитывается по ценам текущего дня. При оформлении заказа стоимость партии увеличивается на 20 %.

Для информирования заказчиков необходимо ответить на вопрос: в какой из 30 дней месяца стоимость партии будет наибольшей с учетом оформления заказа и чему она равна?

Решение.

Стоимость материалов уменьшается каждый день в течение месяца на одну и ту же величину по сравнению с предыдущим днем, поэтому стоимость материалов $S(t) = at + b$, где t – номер дня, $S(1) = 1{,}975 = a + b$, $S(7) = 1{,}675 = 7a + b$. Получим $S(t) = -\dfrac{1}{20}t + \dfrac{81}{40} = \dfrac{1}{40}\cdot\left(81 - 2t\right)$.

Стоимость одного комплекта равна $S(t)\cdot k(t) = \dfrac{1}{40}\cdot\left(81-2t\right)\cdot\dfrac{1}{10}\left(10+t\right)$, где $t = 1, 2, \ldots, 30$.

Стоимость партии из 40 комплектов после оформления заказа $f(t) = 40\cdot 1{,}2\cdot S(t)\cdot k(t) = 40\cdot 1{,}2\cdot\dfrac{1}{40}\cdot\left(81-2t\right)\cdot\dfrac{1}{10}\left(10+t\right)$.

Абсцисса вершины $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{81}{2} - 10\right) = \dfrac{61}{4} = 15\dfrac{1}{4}$. Наибольшее значение стоимости партии из 40 комплектов после оформления заказа равно $f(15) == 40\cdot 1{,}2\cdot\dfrac{1}{40}\cdot\left(81-30\right)\cdot\dfrac{25}{10} = 51\cdot 3 = 153$ тысячи рублей.

Ответ: 15 день, 153 тысячи рублей.

Баллы	Критерии
20 баллов	Полное обоснованное решение
18 баллов	Допущена арифметическая ошибка на последнем этапе при верном ходе рассуждений
15 баллов	Верно найден номер дня, в который стоимость заказа наибольшая.
10 баллов	Верно составлено выражение для стоимости заказа.
5 баллов	Верно составлено выражение для стоимости материалов.
0 баллов	Неверные рассуждения или записан только ответ.