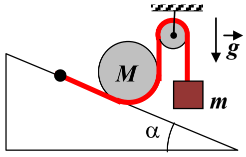
Задача 1 (*5 баллов)* На наклонной плоскости с углом наклона α = 45° лежит бревно, имеющее форму цилиндра, масса которого равна M = 5 кг. Бревно удерживается от скатывания по наклонной плоскости с помощью веревки, огибающей бревно (см. рисунок). Один конец веревки закреплен на наклонной плоскости, а другой конец перекинут через блок, и на нем подвешен груз.

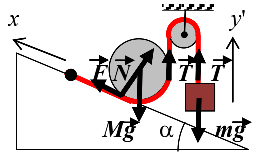


Чему равна масса m груза, при которой эта система находится в равновесии? Массой веревки пренебречь. Свисающие с блока отрезки веревки – вертикальны. Блок – гладкий.

Ответ. $m=\dfrac{M\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\dfrac{M}{1+\sqrt{2}}=M\left(\sqrt{2}-1\right)=2{,}1\,\text{кг}.$

Решение.

На рисунке показаны силы, действующие на бревно и груз. Т.к. бревно в равновесии, то из правила моментов сил, действующих на бревно, относительно оси, проходящей через центр бревна, следует: $Fr=Tr$, где r – радиус бревна, $\Rightarrow$ $F=T$.



Т.к. бревно и груз неподвижны, то в проекциях на оси x и y', получим уравнения:

$$\begin{cases} F+T\sin\alpha-Mg\sin\alpha=0, \\ T-mg=0. \end{cases} \Rightarrow m=\frac{M\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{M}{1+\sqrt{2}}=M\left(\sqrt{2}-1\right)=2{,}1\,\text{кг}.$$

Замечание. *Балл, не снижается, если без доказательства считается, что* $F=T$. *Возможны также альтернативные решения задачи.*

Критерии оценивания задачи 1.

	Элементы решения	Баллы (макс. 5 баллов)
1	Сделан рисунок, на котором показаны все силы, действующие на бревно и груз	+1 балл
2	Записаны уравнения, необходимые для решения задачи (условия равновесия бревна и груза) 1 балл, если не хватает только одного верного уравнения, необходимого для решения задачи	+2 балла
3	При наличии всех верных формул проделаны необходимые алгебраические преобразования.	+1 балл
4	Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	+1 балл

Задача 2 (*10 баллов*). Небольшое тело массы m, имеющее положительный заряд $+q$, бросают с горизонтальной поверхности под углом α = 60° к горизонту. Тело, пролетев некоторое расстояние, падает на поверхность. Чтобы увеличить горизонтальную дальность полета тела при той же начальной скорости и том же угле α, сразу в момент броска включается однородное электрическое поле, силовые линии которого параллельны горизонтальной поверхности. Чему равна величина напряженности этого электрического поля, при котором дальность полета тела увеличивается в 2 раза, по сравнению с дальностью полета тела в отсутствии поля. Во сколько раз при этом увеличивается скорость тела в момент падения на горизонтальную поверхность, по сравнению со скоростью падения на поверхность в отсутствии поля? Считать, что в процессе движения тела ускорение свободного падения не меняется и равно g. Траектория тела в процессе движения лежит в одной и той же вертикальной плоскости. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ. $E=\dfrac{mg}{q}\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{mg}{q\sqrt{3}}$, $\dfrac{v_n}{v_0}=\sqrt{9\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\sqrt{3}$.

Решение.

Уравнения движения тела вдоль горизонтальной и вертикальной осей: $x(t) = v_0 t\cos\alpha + \dfrac{at^2}{2}$, $y(t) = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}$, где v_0 – начальная скорость тела, $a = \dfrac{qE}{m}$ (1) – горизонтальное ускорение тела.

Время падения $t_п$ на землю получим из условия: $y(t_п) = 0$, $\Rightarrow$ $t_п = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$ (2).

Дальность $s = x(t_п) = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} + \dfrac{2av_0^2\sin^2\alpha}{g^2}$, а в отсутствии поля $s_0 = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$. С учетом условия: $s = 2s_0$, $\Rightarrow$ $\dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} + \dfrac{2av_0^2\sin^2\alpha}{g^2} = \dfrac{2v_0^2\sin 2\alpha}{g}$ (3),

$\Rightarrow$ $a = g\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\Rightarrow$ $E = \dfrac{mg}{q}\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{mg}{q\sqrt{3}}$ (4).

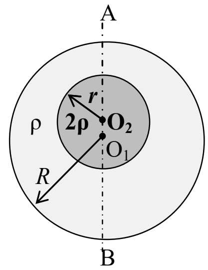
Проекции скорости тела в момент падения равны $v_x(t_n) = v_0\cos\alpha + at_п = 3v_0\cos\alpha$ и $v_y(t_n) = v_0\sin\alpha - gt_n = -v_0\sin\alpha$ (5).

Модуль скорости в момент падения $v_n = \sqrt{v_x^2(t_n) + v_y^2(t_n)} = v_0\sqrt{9\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$. В отсутствие поля скорость падения равна v_0. Тогда $\dfrac{v_n}{v_0} = \sqrt{9\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$ (6).

Подставляя $\alpha = 60°$, получим $\dfrac{v_n}{v_0} = \sqrt{9\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sqrt{3}$.

Критерии оценивания задачи 2.

	Элементы решения	Баллы (макс. 10 баллов)
1	Получена формула (1) для горизонтального ускорения a заряженного тела в однородном электрическом поле	+1 балл
2	Получена формула для нахождения времени падения тела на землю t_n (2)	+1 балл
3	Записано алгебраическое уравнение (3), связывающее дальность полета тела с учетом поля и без поля	+2 балла
4	При наличии всех верных формул проделаны необходимые алгебраич. преобразования и получена формула для E (4). 1 балл, если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные 0 баллов, если преобразования отсутствуют или в них допущены ошибки	+2 балла
5	Записаны верные формулы для проекций скорости v_x и v_y (5)	+1 балл
6	При наличии всех верных формул проделаны необходимые алгебраич. преобразования и получена формула для v_n/v_0 (6). 1 балл, если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные 0 баллов, если преобразования отсутствуют или в них допущены ошибки	+2 балл
7	Сделана подстановка $\alpha = 60°$ и получен правильный ответ для отношения v_n/v_0.	+1 балл



Задача 3 (*10 баллов*). При исследовании планеты Икс было обнаружено, что ускорение свободного падения в разных точках поверхности планеты разное. Точные измерения ускорения свободного падения в двух полюсах планеты A и B, показали, что на полюсе A ускорение свободного падения на 10% больше, чем на полюсе B. Для объяснения этого эффекта была предложена следующая модель. Будем считать планету Икс однородным шаром радиусом R, имеющим плотность вещества ρ во всех точках планеты, за исключением точек, находящихся внутри аномальной сферической области, где плотность вещества 2ρ (см. рисунок).

Принимая расстояние между центром планеты O_1 и центром аномальной области O_2 равным $O_1O_2 = \frac{R}{4}$, определите радиус r аномальной области, при котором соотношение между ускорениями свободного падения на полюсах планеты соответствует измеренным значениям. Какую долю составляет при этом масса вещества, заполняющего аномальную область, по отношению к массе всей планеты? *Объем V шара радиусом R вычисляется по формуле*: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Ответ. $r = R\cdot\sqrt[3]{\frac{225}{2416}} = 0,45R$, $\frac{m_{ан.}}{M} = \frac{450}{2641} = 0,17$.

Решение.

Планету Икс с аномальной областью внутри можно представить, как два однородных шара, имеющих одинаковую плотность ρ, с центрами в точках O_1 и O_2, и радиусами R и r соответственно. Тогда массы каждого из этих шаров равны $M_1 = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$ и $M_2 = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$. Масса планеты равна $M = M_1 + M_2 = \frac{4}{3}\pi\rho\left(R^3 + r^3\right)$.

Сила притяжения точечной массы m, действующая в полюсе A равна $F_A = F_1 + F_{2A}$, а сила притяжения такой же массы m но в полюсе B равна $F_B = F_1 + F_{2B}$, где $F_1 = G\frac{mM_1}{R^2}$, $F_{2A} = G\frac{mM_1}{\left(R - \frac{R}{4}\right)^2}$, $F_{2B} = G\frac{mM_1}{\left(R + \frac{R}{4}\right)^2}$. Тогда ускорения свободного падения в точках A и B равны соответственно $g_A = \frac{F_A}{m} = \frac{4}{3}\pi G\rho\left(R + \frac{16r^3}{9R^2}\right)$ и $g_B = \frac{F_B}{m} = \frac{4}{3}\pi G\rho\left(R + \frac{16r^3}{25R^2}\right)$.

По условию $g_A = 1,1g_B$. $\Rightarrow$ $R + \frac{16r^3}{9R^2} = 1,1\left(R + \frac{16r^3}{25R^2}\right)$, $\Rightarrow$ $r = R\cdot\sqrt[3]{\frac{225}{2416}} = 0,45R$.

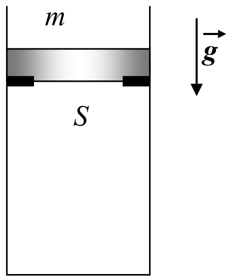
Масса вещества аномальной области равна $m_{ан.} = \frac{4}{3}\pi\cdot 2\rho r^3$. Тогда $\frac{m_{ан.}}{M} = \frac{2}{1 + \left(\frac{R}{r}\right)^3}$.

$\Rightarrow \frac{m_{ан.}}{M} = \frac{450}{2641} = 0,17$.

Критерии оценивания задачи 3.

	Элементы решения	Баллы (макс. 10 баллов)
1	Указано, что планету с аномалией можно представить как два однородных шара	+1 балл
2	Записана связь ускорения свободного падения и силы притяжения	+1 балл
3	Получена формула для ускорения свободного падения в т. А	+2 балла
4	Получена формула для ускорения свободного падения в т. В	+2 балла
5	При наличии всех верных формул проделаны необходимые алгебраические преобразования и получена формула для *r*. 1 балл, если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные 0 баллов, если преобразования отсутствуют или в них допущены ошибки	+2 балла
6	Проделаны необходимые алгебраические преобразования и получена формула для отношения m_a/M. 1 балл, если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные 0 баллов, если преобразования отсутствуют или в них допущены ошибки	+2 балл

Задача 4 (*10 баллов*). В вертикальном теплоизолированном сосуде под поршнем массы m находится идеальный газ, молярная теплоемкость которого при постоянном объёме равна $c_{мV}$. Снаружи сосуда – вакуум, поршень удерживается от падения тонкими упорами (см. рисунок). Начальное давление газа под поршнем p_1. Площадь поперечного сечения сосуда и поршня S. Под тяжестью поршня оба упора внезапно отваливаются и поршень падает вниз, так, что объём газа уменьшается в N раз. Чему при этом будет равно относительное увеличение температуры газа $\dfrac{\Delta T}{T_1}$?



Начальную температуру газа T_1 считать неизвестной. Трение между поршнем и стенками сосуда отсутствует.

Ответ. $\dfrac{\Delta T}{T_1} = \dfrac{mgR}{c_{мV} S p_1}\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)$.

Решение.

Для теплоизолированного сосуда $Q = \Delta U + A = 0$, где $\Delta U = c_{мV} \nu \Delta T$, Количество вещества ν найдем из уравнения состояния идеального газа: $\nu = \dfrac{p_1 V_1}{R T_1}$, где V_1 и T_1 – начальные объём и температура газа. По условию, конечный объём $V_2 = \dfrac{V_1}{N}$.

Работа, совершаемая поршнем, равна $A' = mg\Delta h = \dfrac{mg}{S}\left(V_1 - V_2\right)$. Тогда работа газа $A = -A' = -\dfrac{mgV_1}{S}\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)$. Пользуясь первым началом термодинамики для теплоизолированной системы и формулой для изменения внутренней энергии, получим

$$c_{мV}\,\frac{p_1 V_1}{R T_1}\Delta T = \frac{mgV_1}{S}\left(1 - \frac{1}{N}\right), \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_1} = \frac{mgR}{c_{мV} S p_1}\left(1 - \frac{1}{N}\right).$$

Критерии оценивания задачи 4.

	Элементы решения	Баллы (макс. 10 баллов)
1	Для решения задачи используется уравнение состояния идеального газа	+1 балл
2	Для решения задачи используется формула для внутренней энергии одноатомного газа через молярную теплоемкость	+2 балл
3	Используется первое начало термодинамики для теплоизолированной системы	+1 балл
4	Получена верная формула для работы газа А	+2 балла
5	При наличии всех верных формул проделаны необходимые алгебраические преобразования и получен правильный ответ. 3 балла, если ответ – верный, но имеются лишние (неверные) записи 1 балл, если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные 0 баллов, если преобразования отсутствуют или в них допущены ошибки	+4 балла

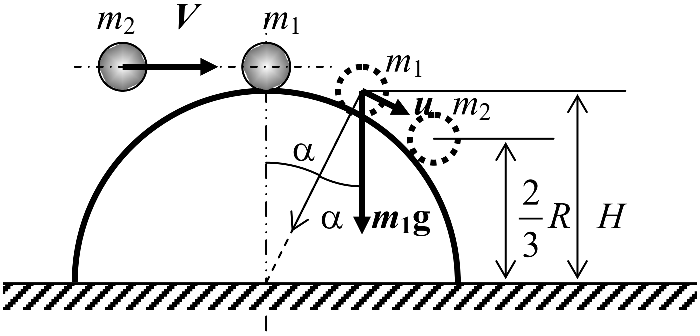
Задача 5 (*15 баллов*). На вершине гладкого полусферического купола радиуса R находится небольшой шарик. На него налетает такой же по размерам шарик. В результате упругого центрального удара шарики начинают двигаться по поверхности купола. Один из шариков отрывается от поверхности полусферы на высоте $h=\frac{2}{3}R$, а другой на высоте $H=\frac{3}{4}R$ от основания купола. Определите отношение масс шариков и скорость налетающего шарика сразу перед ударом.

Ответ. $\frac{m_2}{m_1}=1$, $V=\sqrt{g(3H-2R)}=\frac{\sqrt{gR}}{2}$.

Решение.

Предположим, что масса шарика на вершине купола равна m_1, а масса налетающего шарика – m_2 (см. рис.). Скорость налетающего шарика $\boldsymbol{V}$. Сначала выясним, какой из шариков после удара оторвется на высоте $h=\frac{2}{3}R$. Пусть масса этого шарика m_i, а скорость, полученная после столкновения шаров u_i.

Тогда для этого шарика получим следующую систему (в момент отрыва сила реакции $N=0$), u – скорость в момент отрыва, α – угол отрыва.



$$\begin{cases} \frac{m_i V_i^2}{2}+m_i gR=\frac{m_i u^2}{2}+m_i gh, \\ \frac{m_i u^2}{R}=m_i g\cos\alpha, \\ h=R\cos\alpha. \end{cases}$$

Данная система описывает движение любого из шариков до точки отрыва. Решая эту систему, получим, что $V_i=\sqrt{g(3h-2R)}$. Если $h=\frac{2}{3}R$, то получается что $V_i=0$. Т.к. шарик m_1, неподвижно лежащий на вершине купола до столкновения, не может после столкновения остаться неподвижным, значит шарик, который отрывается на высоте

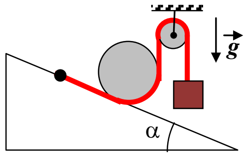
$h = \frac{2}{3}R$, это налетающий шарик, т.е. шарик m_2. При этом после столкновения его скорость становится равной нулю. Такое возможно, только если упругий удар происходит между шариками одинаковой массы, значит $\frac{m_2}{m_1} = 1$, в этом случае шарики обмениваются скоростями. Таким образом, шарик m_1 приобретает после столкновения скорость V, которая была у налетающего шарика. Чтобы ее найти, необходимо снова записать систему, аналогичную приведенной выше. Можно воспользоваться уже полученным результатом, заменив в нем h на $H = \frac{3}{4}R$: $V = \sqrt{g(3H - 2R)} = \frac{\sqrt{gR}}{2}$.

Критерии оценивания задачи 5.

	Элементы решения	Баллы (макс. 15 баллов)
1	Используется условие отрыва N=0	+1 балл
2	Записаны все необходимые уравнения для описания отрыва одного из шариков, приводящие к верному ответу По +1 баллу за каждое верное уравнение (максимум 3 балла) +3 балла за верные и полные алгебраические преобразования Если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные, то можно добавить только 1 балл При ошибке в преобразованиях или их отсутствии баллы не добавляются	Максимум 6 баллов
3	Записаны все необходимые уравнения или приведены верные рассуждения, приводящие к правильному ответу, при описании столкновения шариков В случае неверного ответа, если записаны только верные уравнения, описывающие столкновения шаров (законы сохранения импульса, и энергии), то +1 балл за каждое верное уравнение.	Максимум 6 баллов
4	Получен верный ответ на первый вопрос (чему равно отношение масс шариков)	+1 балл
5	Получен верный ответ на второй вопрос (скорость V налетающего шарика перед ударом)	+1 балл

Олимпиада «Шаг в Будущее» 2024 год
Профиль: Инженерное дело, специализация «Техника и технологии - физика» 10 класс
РЕШЕНИЯ **Вариант: 12**

Задача 1 (*5 баллов)* На наклонной плоскости лежит бревно, имеющее форму цилиндра. Бревно удерживается от скатывания по наклонной плоскости с помощью веревки, огибающей бревно (см. рисунок). Один конец веревки закреплен на наклонной плоскости, а другой конец перекинут через блок, и на нем подвешен груз, масса которого в 3 раза меньше массы бревна.



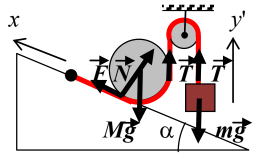
Чему равен угол наклона α наклонной плоскости, при котором эта система находится в равновесии? Массой веревки пренебречь. Свисающие с блока отрезки веревки – вертикальны. Блок – гладкий.

Ответ. α = 30°.

Решение.

Обозначим: M – масса бревна, m – масса груза, тогда $k = \dfrac{M}{m} = 3$.

На рисунке показаны силы, действующие на бревно и груз. Т.к. бревно в равновесии, то из правила моментов сил, действующих на бревно, относительно оси, проходящей через центр бревна, следует: $Fr = Tr$, где r – радиус бревна, $\Rightarrow\ F = T$.



Т.к. бревно и груз неподвижны, то в проекциях на оси x и y', получим уравнения:

$$\begin{cases} F + T\sin\alpha - Mg\sin\alpha = 0, \\ T - mg = 0. \end{cases} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{m}{M-m} = \frac{1}{k-1} = \frac{1}{2}, \Rightarrow \alpha = 30°.$$

<u>Замечание.</u> *Балл, не снижается, если без доказательства считается, что* $F = T$. *Возможны также альтернативные решения задачи.*

Критерии оценивания задачи 1.

	Элементы решения	Баллы (макс. 5 баллов)
1	Сделан рисунок, на котором показаны все силы, действующие на бревно и груз	+1 балл
2	Записаны уравнения, необходимые для решения задачи (условия равновесия бревна и груза) 1 балл, если не хватает только одного верного уравнения, необходимого для решения задачи	+2 балла
3	При наличии всех верных формул проделаны необходимые алгебраические преобразования.	+1 балл
4	Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	+1 балл

Задача 2 (*10 баллов*). Небольшое тело массы m, имеющее положительный заряд $+q$, бросают с горизонтальной поверхности со скоростью v_0 под углом α = 60° к горизонту. На тело, в процессе движения, помимо гравитационного поля Земли, действует однородное электрическое поле, силовые линии которого параллельны горизонтальной поверхности и направлены так, что поначалу электрическое поле тормозит движение тела. Чему равна величина напряженности этого электрического поля, если тело спустя некоторое время возвращается в исходную точку? На какое максимальное расстояние по горизонтали от точки броска смещается тело в процессе движения? Считать, что в процессе движения тела ускорение свободного падения не меняется и равно g. Траектория тела в процессе движения лежит в одной и той же вертикальной плоскости. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ. $E=\dfrac{mg}{q}\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{mg}{q\sqrt{3}}$, $x_{\max}=\dfrac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{2g}=\dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{4g}=\dfrac{v_0^2\sqrt{3}}{8g}$.

Решение.

Уравнения движения тела вдоль горизонтальной и вертикальной осей: $x(t)=v_0 t\cos\alpha-\dfrac{at^2}{2}$, $y(t)=v_0 t\sin\alpha-\dfrac{gt^2}{2}$, где v_0 – начальная скорость тела, $a=\dfrac{qE}{m}$ (1) – горизонтальное ускорение тела.

Время падения $t_п$ на землю получим из условия: $y(t_п)=0$, $\Rightarrow$ $t_п=\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$ (2). Из условия: $x(t_п)=\dfrac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}-\dfrac{2av_0^2\sin^2\alpha}{g^2}=0$ (3),

$\Rightarrow$ $a=g\operatorname{ctg}\alpha$, $\Rightarrow$ $E=\dfrac{mg}{q}\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{mg}{q\sqrt{3}}$ (4).

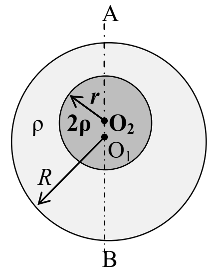
Максимальное расстояние по горизонтали тело пройдет в момент t_1, который можно найти из условия: $v_x(t_1)=v_0\cos\alpha-at_1=0$, тогда $x_{\max}=v_0 t_1\cos\alpha-\dfrac{at_1^2}{2}$ (5).

$\Rightarrow$ $t_1=\dfrac{v_0\cos\alpha}{a}=\dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$, $\Rightarrow$ $x_{\max}=\dfrac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{2g}=\dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{4g}$ (6).

Подставляя $\alpha=60°$, получим $x_{\max}=\dfrac{v_0^2\sqrt{3}}{8g}$.

Критерии оценивания задачи 2.

	Элементы решения	Баллы (макс. 10 баллов)
1	Получена формула (1) для горизонтального ускорения *a* заряженного тела в однородном электрическом поле	+1 балл
2	Получена формула для нахождения времени падения тела на землю t_n (2)	+1 балл
3	Записано алгебраическое уравнение (3), учитывающее, что тело вернулось в исходную точку	+2 балла
4	При наличии всех верных формул проделаны необходимые алгебраич. преобразования и получена формула для E (4). 1 балл, если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные 0 баллов, если преобразования отсутствуют или в них допущены ошибки	+2 балла
5	Записаны верные выражения для v_x и x_{max} (5)	+1 балл
6	При наличии всех верных формул проделаны необходимые алгебраич. преобразования и получена формула для x_{max} (6). 1 балл, если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные 0 баллов, если преобразования отсутствуют или в них допущены ошибки	+2 балл
7	Сделана подстановка $\alpha = 60°$ и получен правильный ответ для отношения x_{max}.	+1 балл



Задача 3 (*10 баллов*). При исследовании планеты Икс было обнаружено, что ускорение свободного падения в разных точках поверхности планеты разное. Точные измерения ускорения свободного падения в двух полюсах планеты A и B, показали, что на полюсе A ускорение свободного падения на 10% больше, чем на полюсе B. Для объяснения этого эффекта была предложена следующая модель. Будем считать планету Икс однородным шаром радиусом R, имеющим плотность вещества ρ во всех точках планеты, за исключением точек, находящихся внутри аномальной сферической области, где плотность вещества 2ρ (см. рисунок).

Принимая расстояние между центром планеты O_1 и центром аномальной области O_2 равным $O_1O_2 = \dfrac{R}{5}$, определите радиус r аномальной области, при котором соотношение между ускорениями свободного падения на полюсах планеты соответствует измеренным значениям. Какую долю составляет при этом масса вещества, заполняющего аномальную область, по отношению к массе всей планеты? *Объем V шара радиусом R вычисляется по формуле*: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Ответ. $r = R\cdot\sqrt[3]{\dfrac{72}{575}} = 0,5R$, $\dfrac{m_{ан.}}{M} = \dfrac{144}{647} = 0,22$.

Решение.

Планету Икс с аномальной областью внутри можно представить, как два однородных шара, имеющих одинаковую плотность ρ, с центрами в точках O_1 и O_2, и радиусами R и r соответственно. Тогда массы каждого из этих шаров равны $M_1 = \dfrac{4}{3}\pi\rho R^3$ и $M_2 = \dfrac{4}{3}\pi\rho r^3$. Масса планеты равна $M = M_1 + M_2 = \dfrac{4}{3}\pi\rho\left(R^3 + r^3\right)$.

Сила притяжения точечной массы m, действующая в полюсе A равна $F_A = F_1 + F_{2A}$, а сила притяжения такой же массы m но в полюсе B равна $F_B = F_1 + F_{2B}$, где $F_1 = G\dfrac{mM_1}{R^2}$, $F_{2A} = G\dfrac{mM_1}{\left(R - \dfrac{R}{5}\right)^2}$, $F_{2B} = G\dfrac{mM_1}{\left(R + \dfrac{R}{5}\right)^2}$. Тогда ускорения свободного падения в точках A и B равны соответственно $g_A = \dfrac{F_A}{m} = \dfrac{4}{3}\pi G\rho\left(R + \dfrac{25r^3}{16R^2}\right)$ и $g_B = \dfrac{F_B}{m} = \dfrac{4}{3}\pi G\rho\left(R + \dfrac{25r^3}{36R^2}\right)$.

По условию $g_A = 1,1g_B$. $\Rightarrow$ $R + \dfrac{25r^3}{16R^2} = 1,1\left(R + \dfrac{25r^3}{36R^2}\right)$, $\Rightarrow$ $r = R\cdot\sqrt[3]{\dfrac{72}{575}} = 0,5R$.

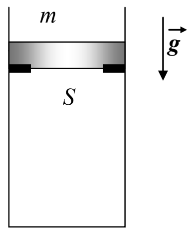
Масса вещества аномальной области равна $m_{ан.} = \dfrac{4}{3}\pi\cdot 2\rho r^3$. Тогда $\dfrac{m_{ан.}}{M} = \dfrac{2}{1 + \left(\dfrac{R}{r}\right)^3}$.

$$\Rightarrow \frac{m_{ан.}}{M} = \frac{144}{647} = 0,22.$$

Критерии оценивания задачи 3.

	Элементы решения	Баллы (макс. 10 баллов)
1	Указано, что планету с аномалией можно представить как два однородных шара	+1 балл
2	Записана связь ускорения свободного падения и силы притяжения	+1 балл
3	Получена формула для ускорения свободного падения в т. A	+2 балла
4	Получена формула для ускорения свободного падения в т. B	+2 балла
5	При наличии всех верных формул проделаны необходимые алгебраические преобразования и получена формула для *r*. 1 балл, если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные 0 баллов, если преобразования отсутствуют или в них допущены ошибки	+2 балла
6	Проделаны необходимые алгебраические преобразования и получена формула для отношения m_a/M. 1 балл, если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные 0 баллов, если преобразования отсутствуют или в них допущены ошибки	+2 балл

Задача 4 (*10 баллов*). В вертикальном теплоизолированном сосуде под массивным поршнем находится идеальный газ, молярная теплоемкость которого при постоянном объёме равна $c_{мV}$. Снаружи сосуда – вакуум, поршень удерживается от падения тонкими упорами (см. рисунок). Начальное давление газа под поршнем p_1. Площадь поперечного сечения сосуда и поршня *S*. Под тяжестью поршня оба упора внезапно отваливаются и поршень падает вниз.



Считая известными значения относительного уменьшения объема газа $\varepsilon_V = \dfrac{|\Delta V|}{V_1}$ и относительного увеличения его температуры $\varepsilon_T = \dfrac{\Delta T}{T_1}$ после того, как поршень снова окажется в равновесии, найдите массу *m* поршня. Начальный объем газа V_1 и его начальная температура T_1 не известны. Трение между поршнем и стенками сосуда отсутствует.

Ответ. $m = \dfrac{c_{мV}\, p_1 S \varepsilon_T}{gR\varepsilon_V}$.

Решение.

Для теплоизолированного сосуда $Q = \Delta U + A = 0$, где $\Delta U = c_{мV}\nu\Delta T$, Количество вещества ν найдем из уравнения состояния идеального газа: $\nu = \dfrac{p_1 V_1}{RT_1}$, где V_1 и T_1 – начальные объём и температура газа.

Работа, совершаемая поршнем, равна $A' = mg\Delta h = \dfrac{mg}{S}\left(V_1 - V_2\right)$, где V_2 – конечный объём газа. Тогда работа газа $A = -A' = -\dfrac{mg|\Delta V|}{S} = -\dfrac{mgV_1}{S}\varepsilon_V$. Пользуясь первым началом термодинамики для теплоизолированной системы и формулой для изменения внутренней энергии, получим

$$c_{мV}\frac{p_1V_1}{RT_1}\Delta T=\frac{mgV_1}{S}\varepsilon_V\,,\Rightarrow\ c_{мV}\frac{p_1}{R}\varepsilon_T=\frac{mg}{S}\varepsilon_V\,,\Rightarrow\ m=\frac{c_{мV}\,p_1S\varepsilon_T}{gR\varepsilon_V}\,.$$

Критерии оценивания задачи 4.

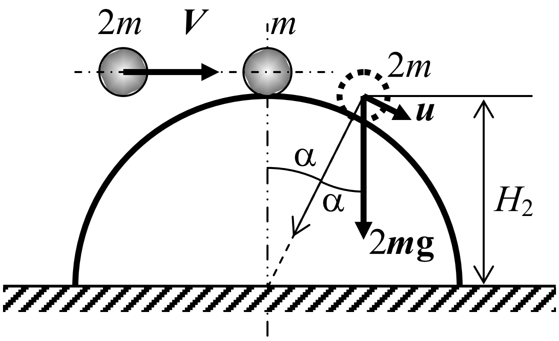
	Элементы решения	Баллы (макс. 10 баллов)
1	Для решения задачи используется уравнение состояния идеального газа	+1 балл
2	Для решения задачи используется формула для внутренней энергии одноатомного газа через молярную теплоемкость	+2 балл
3	Используется первое начало термодинамики для теплоизолированной системы	+1 балл
4	Получена верная формула для работы газа А	+2 балла
5	При наличии всех верных формул проделаны необходимые алгебраические преобразования и получен правильный ответ. 3 балла, если ответ – верный, но имеются лишние (неверные) записи 1 балл, если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные 0 баллов, если преобразования отсутствуют или в них допущены ошибки	+4 балла

Задача 5 (*15 баллов*). На вершине гладкого полусферического купола радиуса R находится небольшой шарик массы m. На него налетает такой же по размерам шарик, но массы $2m$. Происходит упругий центральный удар. Скорость налетающего шарика V – минимально возможная, чтобы шарик массы m сразу же после удара оторвался от купола. Чему равна скорость V? На какой высоте от основания купола оторвется шарик массы $2m$, двигавшийся по куполу после удара?

Ответ. $V=\frac{3}{4}\sqrt{gR}$, $H_2=\frac{33}{48}R$.

Решение.

Обозначим скорость налетающего шарика $\boldsymbol{V}$ (см. рис.). Рассмотрим сначала столкновение шариков, обозначим, скорости шарика массами m и $2m$ после столкновения – u_1 и u_2 соответственно.



$$\begin{cases}2mV=mu_1+2mu_2,\\ \dfrac{2mV^2}{2}=\dfrac{mu_1^2}{2}+\dfrac{2mu_2^2}{2}.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}u_1=\dfrac{4}{3}V,\\ u_2=\dfrac{1}{3}V.\end{cases}$$

Т.к. первый шарик отрывается сразу после удара, то

$$mg=\frac{mu_1^2}{R}\,,\Rightarrow\ u_1^2=gR\,.\ \Rightarrow\ \frac{4}{3}V=\sqrt{gR}\,,\ \Rightarrow\ V=\frac{3}{4}\sqrt{gR}\,.$$

Тогда скорость второго шарика сразу после удара равна $u_2=\frac{1}{3}V=\frac{1}{4}\sqrt{gR}$.

Обозначим скорость второго шарика в момент отрыва u. Тогда для этого шарика получим следующую систему (в момент отрыва сила реакции $N=0$).

$$\begin{cases} \dfrac{2mu_2^2}{2} + 2mgR = \dfrac{2mu^2}{2} + 2mgH_2, \\ \dfrac{2mu^2}{R} = 2mg\cos\alpha, \\ H_2 = R\cos\alpha. \end{cases} \Rightarrow H_2 = \frac{u_2^2}{3g} + \frac{2}{3}R = \frac{R}{16\cdot 3} + \frac{2}{3}R. \Rightarrow H_2 = \frac{33}{48}R.$$

Критерии оценивания задачи 5.

	Элементы решения	Баллы (макс. 15 баллов)
1	Используется условие отрыва *N*=0	+1 балл
2	Записаны все необходимые уравнения или приведены верные рассуждения, приводящие к правильному ответу, при описании столкновения шариков По +1 баллу за каждое верное уравнение (максимум 2 балла) +2 балла за верное решение системы +1 балл за верное уравнение отрыва первого шарика +1 балл за верную формулу для скорости u_2 второго шарика после столкновения	Максимум 6 баллов
3	Записаны все необходимые уравнения для описания отрыва второго шарика, приводящие к верному ответу По +1 баллу за каждое верное уравнение (максимум 3 балла) +3 балла за верные и полные алгебраические преобразования Если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные, то можно добавить только 1 балл При ошибке в преобразованиях или их отсутствии баллы не добавляются	Максимум 6 баллов
4	Получен верный ответ на первый вопрос (чему равна скорость V налетающего шарика)	+1 балл
5	Получен верный ответ на второй вопрос (на какой высоте оторвется второй шарик)	+1 балл