

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: математика.

Вариант: 4

Класс: 8

**Задача 1** (15 баллов). На занятии математического кружка Антон предложил отгадать задуманную им обыкновенную дробь и дал 2 подсказки. Если числитель дроби оставить без изменения, а знаменатель возвести в квадрат, то получится дробь, равная  $1/9$ . Если же числитель дроби увеличить на 1, а знаменатель уменьшить на 1, то получится дробь, равная 1. Через некоторое время ученики попросили еще подсказку. Узнав, что эта дробь больше, чем  $1/2$ , дали ответ. Какую дробь задумал Антон? В ответ записать дробь без сокращений.

Решение.

Пусть  $a$  - числитель,  $b$  - знаменатель, получим

$$\begin{cases} \frac{a}{b^2} = \frac{1}{9} \\ \frac{a+1}{b-1} = 1 \end{cases}.$$

Из второго уравнения  $a = b - 2$ , подставим в первое  $b^2 - 9a + 18 = 0$ ,  $b = 6; 3$ . Получим дроби  $4/6; 1/3$ . В ответ идет первая дробь, но сокращать ее нельзя (убеждаемся проверкой).

Ответ:  $4/6$ .

Баллы	Критерии оценивания
15	Полное обоснованное решение.
12	Допущена арифметическая ошибка на последнем этапе при верном ходе рассуждений.
10	Дробь сокращена верно или недостаточно обоснованное решение.
5	Верно составлена система уравнений.
0	Неверные рассуждения или записан только ответ.

**Задача 2** (15 баллов). Найдите все варианты троек  $(x; y; z)$ , при которых выполняется уравнение

$$\sqrt{|2x| + x - 6} + \sqrt{|2y| \cdot |2 - x|} + \sqrt{|2z| + |x - 2| \cdot |x + 6|} = 0$$

Решение.

Все три слагаемые должны быть равны нулю одновременно.

$$(1) |2x| = 6 - x; x = 2; x = -6$$

$$(2) y = 0 \text{ либо } x = 2$$

$$(3) z = 0 \text{ и одновременно либо } x = 2; \text{ либо } x = -6$$

Таким образом,  $x = 2; y \in R; z = 0$ ; либо  $x = -6; y = 0; z = 0$

Ответ:  $x = 2; y \in R; z = 0$ ; либо  $x = -6; y = 0; z = 0$

Баллы	Критерии оценивания
15	Полное обоснованное решение
10	Упущено одно из решений
5	Совершен переход к системе трех уравнений

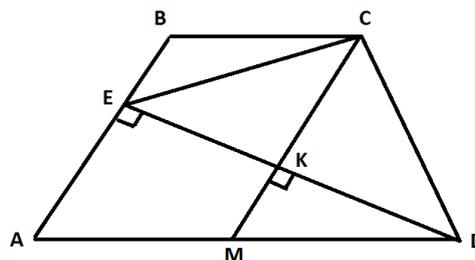
**Задача 3** (15 баллов). В трапеции  $ABCD$ ,  $AD \parallel BC$  так,  $AD = 2BC$ . Точка  $E$  принадлежит  $AB$  так, что  $AB \perp DE$ . Найти периметр  $\triangle ECD$  если  $ED=m$ ,  $CD=n$ .  
Решение.

Пусть точка  $M$  середина  $AD$ , тогда  
 $AM = BC \Rightarrow ABCM$  параллелограмм.

Пусть

$$DE \cap CM = K \Rightarrow \angle AED = \angle MKD = 90^\circ$$

$$KM \text{ средняя линия } \triangle AED \Rightarrow EK = KD.$$



В треугольнике  $ECD$   $CK$  - высота и медиана  $\Rightarrow \triangle ECD$  равнобедренный,  $EC = CD$ .

$$P_{\triangle ECD} = m + 2n$$

Ответ:  $m + 2n$ .

Баллы	Критерии оценивания
15	Решение верно.
10	Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна ошибка.
5	Доказано одно из промежуточных утверждений.
0	Решение не верно или отсутствует

**Задача 4** (15 баллов). Известно, что окружность с центром  $E\left(0; \frac{1}{3}\right)$  проходит через точку  $K\left(\frac{1}{3}; \frac{1+\sqrt{8}}{3}\right)$ . Какую площадь имеет фигура, ограниченная этой окружностью и

графиками функций  $y = 3 - |x|$  и  $5y - x = -9$ ?

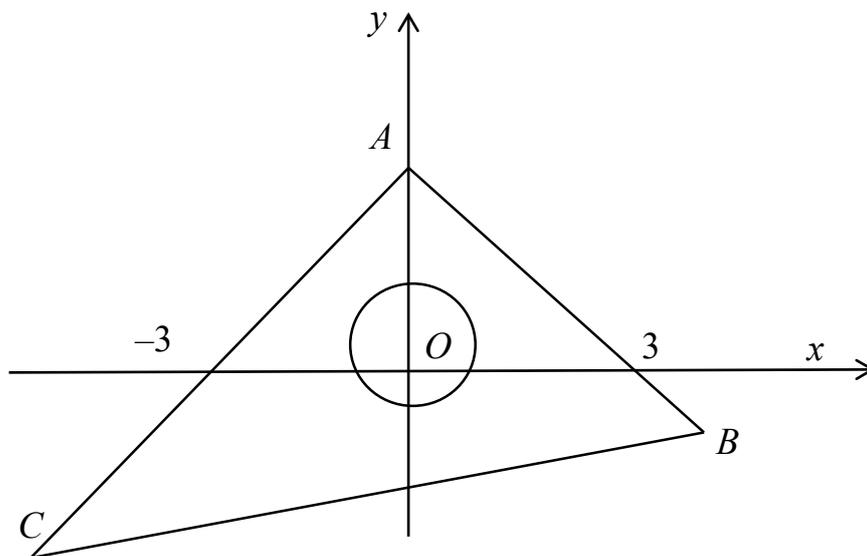
Решение.

Найдем радиус окружности  $KE^2 = \frac{1}{9} + \frac{(\sqrt{8})^2}{9} = 1$ , он равен 1.

Изобразим на плоскости  $xOy$  графики  $y = 3 - x$ ,  $y = 3 + x$ ,  $y = \frac{x-9}{5}$ . Они ограничивают треугольник с вершинами  $A(0;3)$ ,  $B(4;-1)$ ,  $C(-6; -3)$ . Окружность не пересекает прямые. Надо

найти площадь прямоугольного треугольника ABC без площади круга. Находим катеты

$$AB = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}, AC = 6\sqrt{2}, \text{ площадь равна } \frac{AB \cdot AC}{2} - \pi \cdot 1^2 = 24 - \pi$$



Ответ:  $24 - \pi$

Баллы	Критерии оценивания
15	Полное обоснованное решение
12	Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение.
10	При любом верном ходе решения решена значительная часть задачи
5	Верно «раскрыт» модуль или найден радиус окружности или другое верное начало решения
0	Неверные рассуждения или записан только ответ.

**Задача 5 (20 баллов).** На стороне AC равнобедренного  $\triangle ABC$  с основанием BC взята точка  $A_1$ , а на продолжении стороны BC за точку C точка  $C_1$  так, что  $\triangle BA_1C_1$  равнобедренный с вершиной в точке  $A_1$ .

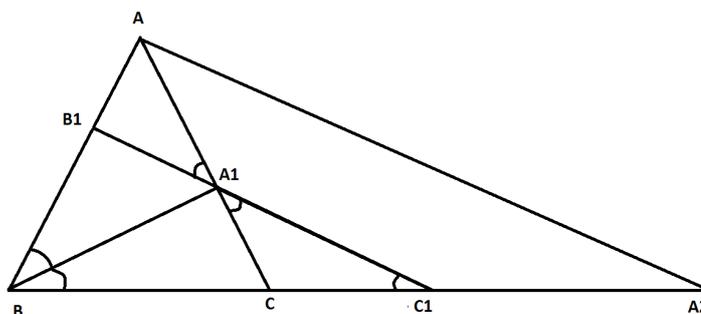
$$\angle A_1BC_1 = \frac{1}{2} \angle ABC, 3AB = 2BC, C_1A_1 \cap AB = B_1.$$

Найти отношение площади  $\triangle ABC$  к площади  $\triangle BB_1C_1$ .

Решение.

Пусть в  $\triangle ABC$  половина угла B равна  $\alpha$ , тогда  $\angle ACB = \angle ABC = 2\alpha$ ,  $\angle C_1A_1C = \angle A_1CB - \angle A_1C_1C = 2\alpha - \alpha = \alpha$ .

Пусть  $AB = 10x$ , тогда  $BC = 15x$ , в  $AA_1 = 4x$ ,  $A_1C = CC_1 = 6x$



Проведем  $AA_2 \parallel B_1C_1 \Rightarrow$  по теореме Фалеса

$$AA_1 : A_1C = CC_1 : C_1A_2 \Rightarrow BB_1 : B_1A = BC_1 : C_1A_2 = 21 : 4.$$

$$\triangle ABC \text{ и } \triangle BB_1C_1 \text{ имеют одинаковый угол} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BB_1C_1}} = \frac{AB \cdot BC}{BB_1 \cdot BC_1} = \frac{25 \cdot 15}{21 \cdot 21} = \frac{125}{147}$$

Ответ:  $\frac{125}{147}$ .

Баллы	Критерии оценивания
20	Решение верно.
15	Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна ошибка.
10	Доказано, что $\triangle A_1C_1C$ равнобедренный и найдено отношение отрезков $B_1B$ к $B_1A$
5	Найдено одно из промежуточных утверждений.
0	Решение не верно или отсутствует.

**Задача 6 (20 баллов).** На горно-обогатительный комбинат привозят руду с трех месторождений. Хранилища комбината имеют фиксированный объём. На месторождениях работают люди и техника - невыгодно, чтобы они простаивали. У каждого месторождения своя система доставки, поэтому скорости доставки различны. Управляющий рассчитывает оптимальные способы подвоза руды, чтобы хранилище было заполнено рудой с разных месторождений. Выяснилось, что можно принимать руду со всех трех месторождений сразу в течение 4 часов. Второй вариант заполнения: с первого месторождения возить руду в течение 6 часов, со второго и третьего в течение 2 часов. Проверяется еще один вариант: возить с первого месторождения 5 часов, со второго 3 часа. Сколько часов надо тогда подвозить руду с третьего месторождения, чтобы заполнить хранилище?

Решение.

Обозначим скорости доставки с 1.2.3 месторождений соответственно.  $H$ - объём хранилища.  $m$ - искомое время.

$$4x + 4y + 4z = H(1); 6x + 2y = 2z = H(2); 5x + 3y + mz = H(3)$$

Сложим первые два уравнения, а третье умножим на 2.

$$10x + 6y + 6z = 2H; 10x + 6y + 2mz = 2H; 10x + 6y = 2H - 6z = 2H - 2mz; m = 3$$

Ответ: 3 часа.

Баллы	Критерии оценивания
20	Полное обоснованное решение.
15	Решение с недостатками обоснования.
10	Решение с вычислительной ошибкой.
5	Написаны уравнения, но не решена система.