

Задача 1 (12 баллов). Числа u, v, w являются корнями уравнения $x^3 - 3x - 1 = 0$. Найдите $u^9 + v^9 + w^9$.

Задача 2 (16 баллов). В лаборатории имеются колбы двух размеров (объемом V и объемом $V/2$) в суммарном количестве 100 штук, причем колб каждого размера не менее трех. Лаборант поочередно случайно выбирает три колбы, и первую из них полностью заполняет 80-процентным раствором соли, вторую полностью заполняет 50-процентным раствором соли, а третью колбу полностью заполняет 20-процентным раствором соли. Затем он сливает содержимое этих трех колб в одну чашу и определяет процентное содержание соли в ней. При каком наименьшем количестве больших колб N событие «процентное содержание соли в чаше находится в пределах от 45% до 55% включительно» будет случаться реже события «при случайном бросании двух симметричных монет выпадает орел и решка (в любом порядке)»? Ответ обосновать.

Задача 3 (16 баллов). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон AB и BC равны, DB – биссектриса угла ADC , $AD:DC = 4:3$. Найдите косинус угла AKB , если K – точка пересечения диагоналей AC и BD , $BK:KD = 1:3$.

Задача 4 (16 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} (ay - ax + 2)(4y - 3|x - a| - x + 5a) = 0, \\ (\log_a x^2 + \log_a y^2 - 2) \log_2 a^2 = 8 \end{cases}$$

имеет ровно шесть различных решений.

Задача 5 (20 баллов). Шар радиуса $\frac{4}{9}$ лежит внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ со стороной основания 8 и высотой 3. Этот шар касается плоскости основания $ABCD$ пирамиды и боковых граней SBC и SCD . Плоскость γ касается шара, проходит через точку B , середину K ребра CD и пересекает ребро SC в точке M . Найдите объем пирамиды $MBCK$.

Задача 6 (20 баллов). В 2022 году исполняется 65 лет запуска первого искусственного спутника Земли (ИСЗ). В настоящее время для обеспечения бесперебойной работы сотовой связи, систем теле и радиовещания используются различные виды спутников, находящихся на различных орбитах, на различных высотах.

Зоной покрытия спутника назовем часть поверхности земного шара, в пределах которой обеспечивается уровень сигналов к спутнику и от него, необходимый для их приема с заданным качеством в конкретный момент времени. Как правило, эта часть поверхности ограничивается окружностью, проходящей по линии видимого горизонта. На рисунке – линия проходит через точку Γ .

а) Определите площадь земной поверхности (в км^2), которая является зоной покрытия спутника, находящегося на высоте $H = 500$ км относительно земной поверхности, считая ее сферой радиуса $R = 6400$ км с центром в точке O .

б) Найдите все значения $n > 1$, для которых на поверхности земли можно расположить окружности C_1, \dots, C_n , каждая из которых внешним образом касается окружности C_0 , с центром в точке A и радиусом $r < R$, каждая из них является границей зоны покрытия ИСЗ, находящегося на той же высоте H , что и спутник с зоной покрытия C_0 . Каждая из зон покрытия C_i должна внешним образом касаться окружностей C_0 и C_{i+1} , $i = 0, 1, \dots, n - 1$, т.е. первая касается C_0 и C_2 , вторая – C_0 и C_3 , и т.д. Окружность C_n должна касаться C_0 и C_1 .

