Решение варианта №3 (Математика - 10 класс)

1. Дробь $\frac{1}{5}$ записана в виде бесконечной двоичной дроби. Сколько единиц среди первых 2022 цифр после запятой содержится в такой форме записи? (12 баллов)

Решение. Наименьшим числом вида $2^n - 1$, делящимся на 5, будет число 15. Тогда

$$\frac{1}{5} = \frac{3}{15} = \frac{3}{16-1} = \frac{3}{2^4-1} = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{1-2^{-4}} = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8}\right)(1 + 2^{-4} + 2^{-8} + 2^{-12} + \cdots) =$$

$(2^{-3} + 2^{-4})(1 + 2^{-4} + 2^{-8} + 2^{-12} + \cdots) = 0{,}001100110011 \ldots = 0,(0011)$ в двоичной системе счисления. Поскольку $2022 = 4 \cdot 505 + 2$, то среди первых 2022 цифр после запятой будет 1010 единиц.

Ответ: 1010.

2. Имеется куб, зафиксированный на ножках, и шесть различных красок. Сколькими способами можно покрасить все грани куба (каждую в один цвет, все краски использовать не обязательно) так, чтобы соседние грани (имеющие общее ребро) были разного цвета? (16 баллов)

Решение. Рассмотрим 4 варианта раскраски куба.

1) Верхняя и нижняя грани одного цвета, левая и правая грани одного цвета. Выбираем цвет верхней и нижней граней 6 способами, затем цвет левой и правой 5 способами, затем цвет передней 4 способами и цвет задней 4 способами. Итого, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 480$ способов.

2) Верхняя и нижняя грани одного цвета, левая и правая грани разного цвета. Выбираем цвет верхней и нижней граней 6 способами, затем цвет левой 5 способами, потом цвет правой 4 способами, затем цвет передней 3 способами и цвет задней 3 способами.
Итого, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 1080$ способов.

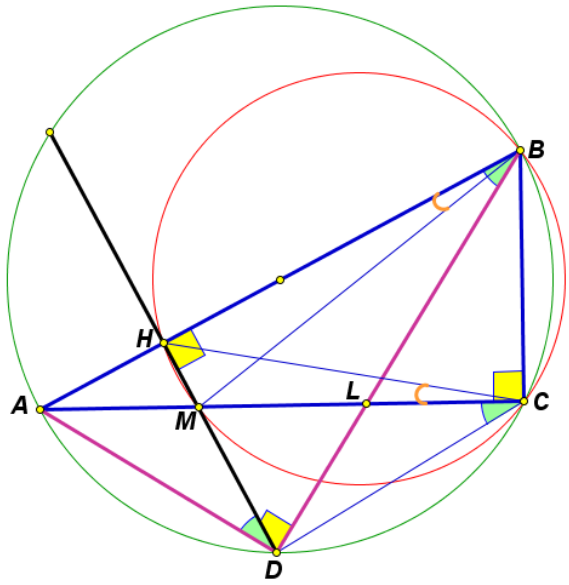
3) Верхняя и нижняя грани разного цвета, левая и правая грани одного цвета. Выбираем цвет левой и правой граней 6 способами, затем цвет верхней 5 способами, потом цвет нижней 4 способами, затем цвет передней 3 способами и цвет задней 3 способами.
Итого, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 1080$ способов.

4) Верхняя и нижняя грани разного цвета, левая и правая грани разного цвета. Выбираем цвет верхней грани 6 способами, затем цвет нижней грани 5 способами, потом цвет левой грани 4 способами, затем цвет правой 3 способами, далее цвет передней грани 2 способами и задней 2 способами.
Итого, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 1440$ способов.

Окончательно имеем $480 + 1080 + 1080 + 1440 = 4080$.

Ответ: 4080.

3. Точка M принадлежит катету AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, причем $AM = 2, MC = 16$. Отрезок MH – высота треугольника AMB. Точка D расположена на прямой MH так, что угол ADB равен 90°, и точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите длину отрезка BL, если L – точка пересечения BD и AC, а тангенс угла ACH равен $1/18$. (16 баллов)



Решение. 1. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность с диметром AB (углы ADB и ACB прямые). Тогда $\angle ABD = \angle ACD$,

$$\angle HAD = 90° - \angle ABD, \angle ADH = \angle ABD = \angle ACD.$$

Треугольники ACD и ADM подобны, и $\frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AD} = \frac{MD}{DC}$, $AD^2 = AC \cdot AM = 2 \cdot 18 = 36$, $AD = 6$.

2. Около четырехугольника $CBHM$ можно описать окружность с диметром MB (углы MHB и MCB прямые).

$$\angle MCH = \angle MBH = \alpha, \operatorname{tg} \alpha = 1/18.$$

Обозначим $BH = x, BC = y, MH = z$. Тогда $\frac{z}{x} = \frac{1}{18}$, $x = 18z$. Треугольники AMH и ABC подобны. Тогда $\frac{AM}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{MH}{BC}$, или $\frac{2}{\sqrt{y^2+324}} = \frac{\sqrt{y^2+324}-18z}{18} = \frac{z}{y}$, или

$$\begin{cases} 36 = y^2 + 324 - 18z\sqrt{y^2+324}, \\ 2y = z\sqrt{y^2+324}, \end{cases} \Rightarrow 36 = y^2 + 324 - 36y, y^2 - 36y + 288 = 0,$$

$y_1 = 12, y_2 = 24.$

1) $BC = y = 12, z = \frac{4}{\sqrt{13}}, AB = 6\sqrt{13}$, 2) $BC = y = 24, z = \frac{8}{5}, AB = 30$.

3. Треугольники ADL и BCL подобны, $\frac{AD}{BC} = \frac{AL}{BL} = \frac{LD}{LC}$, $\frac{AD}{BC} = \frac{AL}{BL} = \frac{LD}{LC}$. Пусть $u = BL, v = AL$.

Рассмотрим треугольник ABD. Имеем в **первом случае:** $AB = 6\sqrt{13}, AD = 6$, $BD = \sqrt{36 \cdot 13 - 36} = 12\sqrt{3}$. Тогда $\frac{6}{12} = \frac{v}{u} = \frac{12\sqrt{3}-u}{18-v}$, $u = 2v, 18 - v = 24\sqrt{3} - 4v, v = 8\sqrt{3} - 6$, $BL = 16\sqrt{3} - 12$.

Имеем во **втором случае:** $AB = 30, AD = 6, BD = \sqrt{900 - 36} = 12\sqrt{6}$. Тогда $\frac{6}{24} = \frac{v}{u} = \frac{12\sqrt{6}-u}{18-v}$, $u = 4v, 18 - v = 48\sqrt{6} - 16v, 15v = 48\sqrt{6} - 18$, $BL = \frac{16\sqrt{6}-6}{5}$.

Ответ: $16\sqrt{3} - 12$ или $\frac{16\sqrt{6}-6}{5}$.

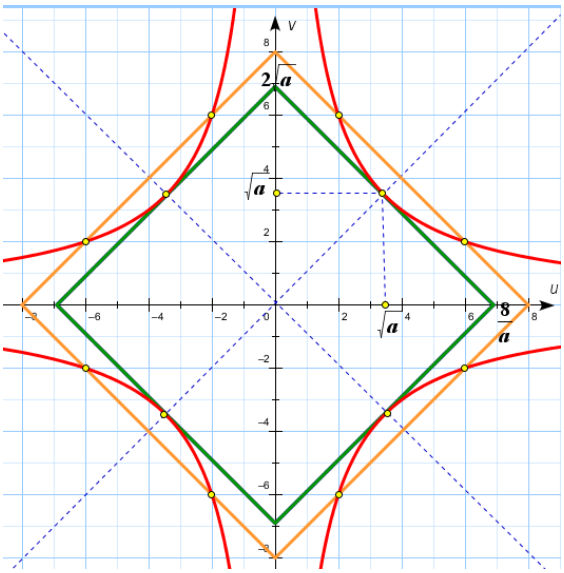
4. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (a|y^3| + a|x^3| - 8)(x^6 + y^6 - 3a^2) = 0, \\ \sqrt{x^6y^6} = a \end{cases}$$

имеет восемь различных решений. (16 баллов)

Решение. Сделаем замену переменных: $x^3 = u, y^3 = v$. Переменные u и v могут принимать любые значения, x и y находятся однозначно. Тогда получим

$$\begin{cases}(a|v|+a|u|-8)(u^2+v^2-3a^2)=0,\\ |uv|=a, a>0,\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|v|+|u|=8/a\,,\\ |uv|=a,\ \ a>0,\end{cases}\\ \begin{cases}u^2+v^2=3a^2,\\ |uv|=a,\ \ a>0.\end{cases}\end{array}\right.$$



I. $\begin{cases}|v|+|u|=8/a\,,\\ |uv|=a,\ \ a>0.\end{cases}$

1) Система имеет 4 различных решения, если

$$\frac{8}{a}=2\sqrt{a},\ \ a=2\sqrt[3]{2}.$$

2) Система имеет 8 различных решений, если

$$\frac{8}{a}>2\sqrt{a},\ \ 0<a<2\sqrt[3]{2}.$$

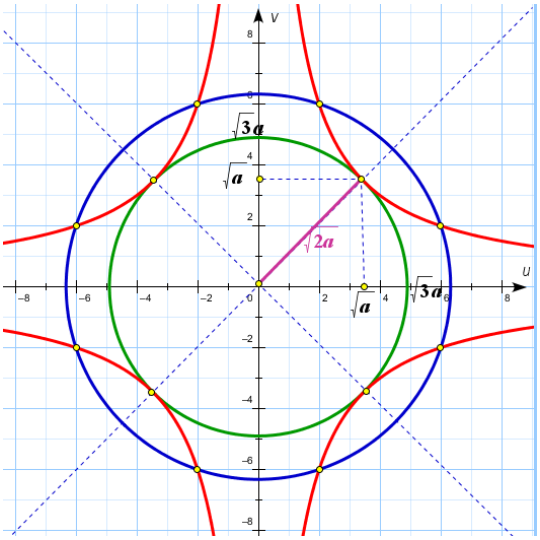
II. $\begin{cases}u^2+v^2=3a^2,\\ |uv|=a,\ \ a>0.\end{cases}$

1) Система имеет 4 различных решения, если

$$\sqrt{3}a=\sqrt{2a},\qquad a=2/3.$$

2) Система имеет 8 различных решений, если

$\sqrt{3}a>\sqrt{2a},\ \ a>2/3$.



Возможные **совпадения** решений в I и II случаях:

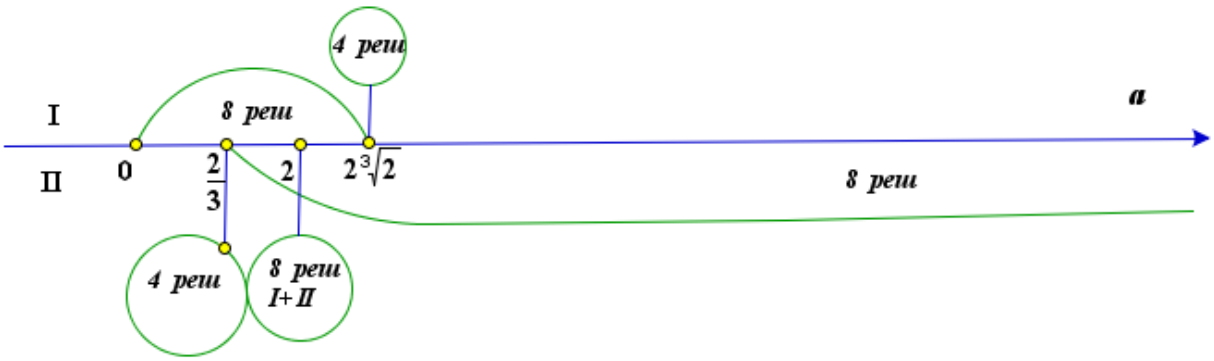
$$\begin{cases}|v|+|u|=8/a\,,\\ u^2+v^2=3a^2,\\ |uv|=a,\ \ a>0.\end{cases}$$

Из соображения симметрии можно рассмотреть только случай, когда $u>0, v>0$. Тогда

$$\begin{cases}v+u=8/a\,,\\ u^2+v^2=3a^2,\\ uv=a,\ \ a>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v+u=8/a\,,\\ (u+v)^2=3a^2+2a,\\ uv=a,\ \ a>0.\end{cases}$$

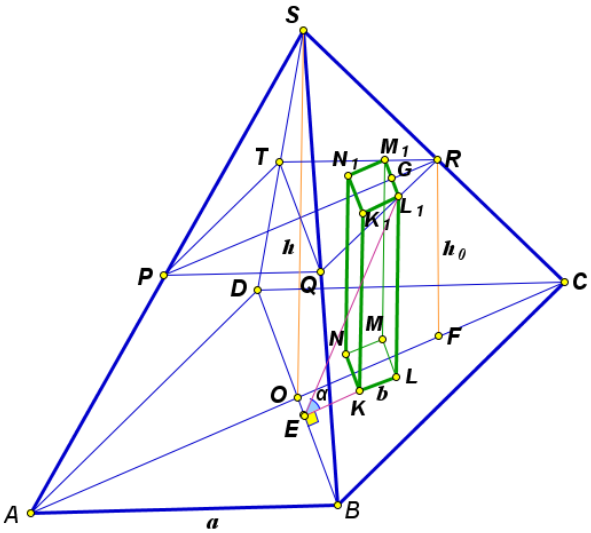
Имеем $64/a^2=3a^2+2a,\quad 3a^4+2a^3-64=0,$

$a=2, 3a^4+2a^3-64=(a-2)(3a^3+8a^2+16a+32)$. Многочлен $3a^3+8a^2+16a+32$ положительных корней не имеет. При $a=2$ решения I и II случаев совпадают, и система будет иметь 8 решений.



Ответ: $a \in (0;\ 2/3) \cup \{2\} \cup (2\sqrt[3]{2};\ +\infty)$.

5. Внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ расположена правильная четырехугольная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$, основание $KLMN$ которой лежит в плоскости ABC. Центр основания $KLMN$ призмы расположен на отрезке AC, $KL \parallel AC$, $KN \parallel BD$ (точки K и B лежат по одну сторону от AC), сторона основания призмы равна 2, боковое ребро KK_1 призмы равно 3. Вершины L_1 и M_1 верхнего основания призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ принадлежат боковым граням SBC и SCD пирамиды $SABCD$ соответственно. Плоскость γ проходит через прямую BD и точку L_1. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью γ, если сторона пирамиды равна $8\sqrt{2}$, а её высота равна 12. (20 баллов)



Решение. По условию имеем $AB = a = 8\sqrt{2}$, $SO = h = 12$, $KL = b = 2, KK_1 = h_0 = 3$.

$PR \parallel AC \parallel KL, RF \parallel SO, RF = h_0$.

$\Delta RCF \sim \Delta SCO$, $\frac{CF}{CO} = \frac{RF}{SO} = \frac{h_0}{h} = \frac{1}{4}, CF = \frac{CO}{4}$.

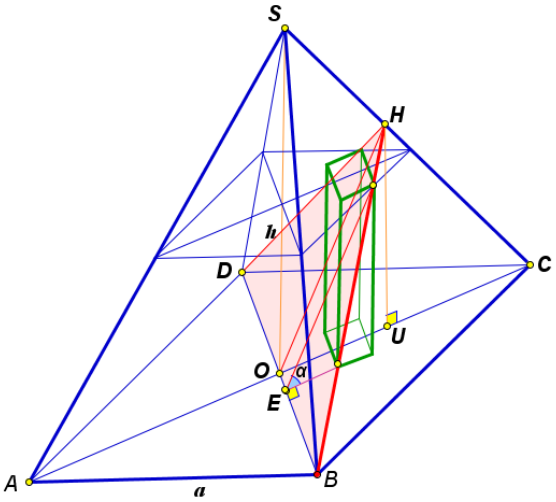
Плоскость PQR параллельна ABC.

$GR \perp M_1L_1, GR = \frac{b}{2} = 1. KE \perp BD$,

$LE = CO - CF - GR = \frac{3CO}{4} - \frac{b}{2} = 6 - 1 = 5$.

Обозначим через α угол наклона плоскости γ к плоскости основания ABC. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h_0}{LE} = \frac{3}{5}$.

Пусть точка H – точка пересечения плоскости γ и ребра SC. Тогда $\angle HOC = \alpha$. Если HU – перпендикуляр, опущенный на плоскость ABC, то $\frac{HU}{OU} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$.



$\Delta HCU \sim \Delta SCO$, $\frac{HU}{SO} = \frac{CU}{CO}, \frac{HU}{h} = \frac{CO-OU}{CO}$, $\frac{HU}{h} = \frac{CO-3HU}{CO}$, $\frac{HU}{12} = \frac{24-5HU}{24}, 7HU = 24, HU = \frac{24}{7}$.

По теореме Пифагора имеем $OH^2 = OU^2 + HU^2$,

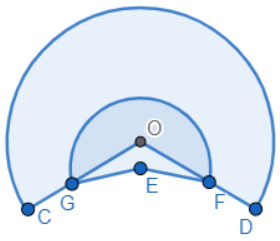
$OH = \frac{HU\sqrt{34}}{3} = \frac{8\sqrt{34}}{7}$.

Площадь сечения пирамиды плоскостью γ:

$S_{\text{сеч}} = \frac{BD \cdot OH}{2} = \frac{64\sqrt{34}}{7}$.

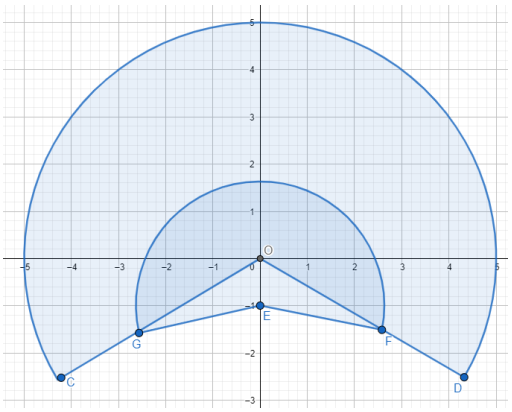
Ответ: $\frac{64\sqrt{34}}{7}$.

6. Для улучшения жилищных условий горожан в некоторых городах реализуется программа реновации - замена не подлежащего сохранению жилищного фонда путем его сноса и капитального строительства на высвобождаемой территории. Как правило, разбор старых домов и расчистка площадки под новое строительство происходит на ограниченной территории. Поэтому нужна техника (вращающиеся экскаваторы), которая могла бы расчистить наибольшую площадь с наименьшим количеством перемещений.



На рисунке изображена схема рабочей зоны и схема перемещений экскаватора. Встав в начальную точку *E*, экскаватор первым делом очищает ближнюю к себе площадку (на ней в основном находится металлический лом). Эта площадка представляет из себя сектор окружности, ограниченный большой дугой *FG* окружности с центром в точке *E* и радиусом $2\sqrt{2}$ *м*, а также отрезками ее радиусов *EF* и *EG*. Затем экскаватор перемещается в точку *O* и очищает дальнюю от себя площадку (на ней в основном находится кирпичный лом). Эта площадка с внешней стороны ограничена большой дугой *CD* окружности с центром в точке *O* и радиусом 6 *м*, отрезками *CG* и *FD* (точки *F* и *G* находятся на соответствующих радиусах *OC* и *OD*), а с внутренней стороны - большой дугой *FG* первой окружности с центром в точке *E*.

Определите площадь под кирпичным ломом (без металлических остатков), если точка *O* находится в 2 метрах от точки *E* по направлению к центру металлического завала, угол *EOD* равен 45°. (20 баллов)



Решение. По теореме синусов для треугольника *OEF* имеем

$$\frac{OE}{\sin\angle OFE} = \frac{EF}{\sin\angle EOF},\ \frac{2}{\sin\angle OFE} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ},\ \sin\angle OFE = \frac{1}{2},$$

$$\angle OFE = 30^\circ, \angle OEF = 105^\circ.$$

$$\frac{OE}{\sin 30^\circ} = \frac{OF}{\sin 75^\circ}, OF = 4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

Площадь сектора *COD*: $S_1 = \frac{\pi\cdot 6^2}{360}\cdot 270 = 27\pi$.

Площадь сектора *FEG*: $S_2 = \frac{\pi\cdot 8}{360}\cdot 210 = \frac{14\pi}{3}$.

$$S = S_1 - S_2 + 2S_{OEF} = 27\pi - \frac{14\pi}{3} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{67\pi}{3} + 2\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Ответ: $\frac{67\pi}{3} + 2\left(1+\sqrt{3}\right)$.