Решение варианта №1 (Математика - 10 класс)

1. Числа u, v, w являются корнями уравнения $x^3 - 3x - 1 = 0$. Найдите $u^9 + v^9 + w^9$. (12 баллов)

Решение. Согласно теореме Виета, $u + v + w = 0$, $uv + vw + vw = -3, uvw = 1$. Рассмотрим последовательность $S_n = u^n + v^n + w^n$. Имеем $S_0 = 3$, $S_1 = 0$. Найдем S_2: S_2=$u^2 + v^2 + w^2 = (u + v + w)^2 - 2(uv + vw + vw) = 6$. Поскольку $u^3 = 3u + 1, v^3 = 3v + 1$, $w^3 = 3w + 1$, то S_3=$u^3 + v^3 + w^3 = 3S_1 + S_0$. Далее $u^n = 3u^{n-2} + u^{n-3}, v^n = 3v^{n-2} + v^{n-3}$, $w^n = 3w^{n-2} + w^{n-3}$, то $S_n = 3S_{n-2} + S_{n-3}$. Находим $S_3 = 3, S_4 = 18$, $S_5 = 15, S_6 = 57, S_7 = 63, S_9 = 246$.

Ответ: 246

2. В лаборатории имеются колбы двух размеров (объемом V и объемом $V/3$) в суммарном количестве 100 штук, причем колб каждого размера не менее 2. Лаборант поочередно случайно выбирает две колбы, и первую из них полностью заполняет 70-процентным раствором соли, а вторую полностью заполняет 40-процентным раствором соли. Затем он сливает содержимое этих двух колб в одну чашу и определяет процентное содержание соли в ней. При каком наименьшем количестве больших колб N событие «процентное содержание соли в чаше находится в пределах от 50% до 60% включительно» будет случаться реже события «при случайном бросании двух симметричных монет выпадает орел и решка (в любом порядке)»? Ответ обосновать. (16 баллов)

Решение. Пусть N — имеющееся количество больших колб в лаборатории, N = 2, 3, . . . , 98, n = 100 −N — имеющееся количество малых колб в лаборатории, n = 2, 3, . . . , 98, и P(A) — вероятность события A ={содержание соли в чаше находится в пределах от 50% до 60% включительно}. Необходимо найти такое наименьшее N, чтобы было P(A) < ½.

Мысленно перенумеруем все имеющиеся в лаборатории колбы — присвоим им личные номера от 1 до 100. И тогда равновероятными исходами этого эксперимента будут упорядоченные пары различных личных номеров последовательно выбираемых лаборантом колб: $\omega = (i_1, i_2)$, $i_j \in \{1, 2, 3, . . . , 100\}$, $i_j \neq i_k$, j, k = 1, 2. Общее количество таких исходов равно $100 \cdot 99 = 9900$.

Вычислим теперь количество благоприятных исходов для появления события A. Рассмотрим следующие случаи, определяемые размерными типами выбранных колб.

1) Лаборант выбирает две большие колбы - тип [Б, Б]. Тогда процентное содержание соли в чаше в результате описанных манипуляций лаборанта окажется равным величине: $\frac{(0,7V+0,4V)100}{2V} = 55\% \in [50\%; 60\%]$. Такой выбор колб **благоприятствует** появлению события A. Количество элементарных исходов данного типа, очевидно, равно $N \cdot (N - 1)$.
2) Лаборант выбирает две маленькие колбы - тип [м, м]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0,7V/3+0,4V/3)100}{2V/3} = 55\% \in [50\%; 60\%]$. Такой выбор колб **благоприятствует** появлению события A. Количество исходов в этом случае равно $n \cdot (n - 1)$.
3) Лаборант выбирает сначала большую колбу, затем маленькую - тип [Б, м]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0,7V+0,4V/3)100}{4V/3} = 62,5\% \notin [50\%; 60\%]$. Такой выбор колб не благоприятствует появлению события A.
4) Лаборант выбирает сначала малую колбу, затем большую колбу - тип [м, Б]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0,7V/3+0,4V)100}{4V/3} = 47,5\% \notin [50\%; 60\%]$. Такой выбор колб также не благоприятствует появлению события A.

Вычисляем вероятность события A (по формуле классической вероятности):

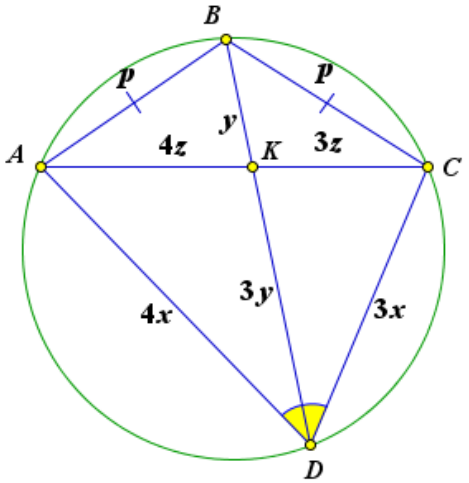
$$P(A)=\frac{N\cdot(N-1)+n\cdot(n-1)}{100\cdot 99}=\frac{N^2-N+n^2-n}{100\cdot 99}=\frac{N^2-N+(100-N)^2-(100-N)}{100\cdot 99}=\frac{2N^2-200N+100^2-100}{100\cdot 99}=$$
$$\frac{2N^2-200N+9900}{9900}=\frac{N^2-100N+4950}{4950}=\frac{(N-50)^2+2450}{4950}.$$

Отсюда имеем $P(A)=\frac{(N-50)^2+2450}{4950}<\frac{1}{2}$ <=> $45<N<55$. И значит, $N_{\min}=46$.

Ответ: при $N=46$.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон AB и BC равны, DB – биссектриса угла ADC, $AD:DC=4:3$. Найдите косинус угла AKB, если K – точка пересечения диагоналей AC и BD, и $BK:KD=1:3$. (16 баллов)

Решение.



1) $AD:DC=4:3$, пусть $AD=4x, DC=3x$,

$BK:KD=1:3$, пусть $BK=y, KD=3y$.

2) DK – биссектриса треугольника ADC,

$AK:KC=AD:DC=4:3$, $AK=4z, KC=3z$.

3) Точка B является точкой пересечения серединного перпендикуляра к диагонали AC и биссектрисы угла D в выпуклом четырехугольнике $ABCD$. Следовательно, около этого четырехугольника можно описать окружность. Действительно, опишем окружность около треугольника ACD, обозначим точку пересечения биссектрисы угла D с окружностью через B_1. Тогда по свойству вписанных углов дуги AB_1 и B_1C будут равны, хорды AB_1 и B_1C тоже будут равны, треугольник AB_1C будет равнобедренным, и серединный перпендикуляр к диагонали AC и биссектриса угла D будут пересекаться в точке B_1. Следовательно, $B_1=B$.

4) Поскольку около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, то для его диагоналей верно равенство $AK\cdot KC=BK\cdot KD$, $4z^2=y^2, y=2z$.

5) Треугольник ABK подобен DCK, и $\frac{AB}{CD}=\frac{BK}{KC}$, пусть $AB=p$, $\frac{p}{3x}=\frac{y}{3z}=\frac{2}{3}$, $p=2x$, $x=\frac{p}{2}$.

6) $AD=2p, DC=\frac{3p}{2}$.

7) По теореме косинусов для треугольников ABC и ADC с учетом $\angle B+\angle D=180°$ имеем

$49z^2=2p^2-2p^2\cos\angle B$, $49z^2=4p^2+\frac{9p^2}{4}+6p^2\cos\angle B$. Отсюда $z=\frac{p}{4}, y=\frac{p}{2}, AK=p, BK=\frac{p}{2}$.

8) Для равнобедренного треугольника ABK имеем $\cos\angle AKB=\frac{BK}{2AK}=\frac{1}{4}$.

Ответ: 1/4.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система

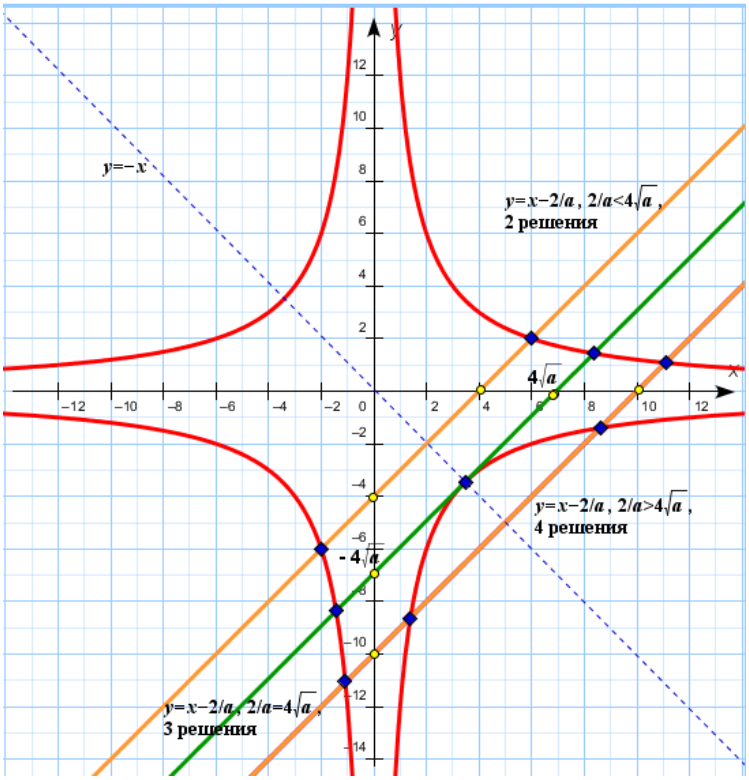
$$\begin{cases}(ay-ax+2)(4y-3|x-a|-x+5a)=0,\\ \sqrt{x^2y^2}=4a\end{cases}$$

имеет шесть различных решений. (16 баллов)

Решение. Имеем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}ay-ax+2=0,\\ |xy|=4a,\ \ a>0,\end{cases}\\ \begin{cases}4y-3|x-a|-x+5a=0,\\ |xy|=4a,\ \ a>0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x-2/a\,,\\ |xy|=4a,\ \ a>0,\end{cases}\\ \begin{cases}y=3|x-a|/4+x/4-5a/4\,,\\ |xy|=4a,\ \ a>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

I. $\begin{cases}y=x-2/a\,,\\ |xy|=4a,\ \ a>0.\end{cases}$



1) Система имеет 2 различных решения, если

$$\frac{2}{a}<4\sqrt{a},\ \ a>\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Найдем эти решения:

$x-\frac{2}{a}=\frac{4a}{x}, x^2-\frac{2}{a}x-4a=0,$

$x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4a^3}}{a}, y_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a^3}}{a}.$

2) Система имеет 3 различных решения, если

$$\frac{2}{a}=4\sqrt{a},\ \ a=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Найдем эти решения:

$x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4a^3}}{a}, y_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a^3}}{a},$

$$x_3=2\sqrt{a}, y_3=-2\sqrt{a}.$$

3) Система имеет 4 различных решения, если

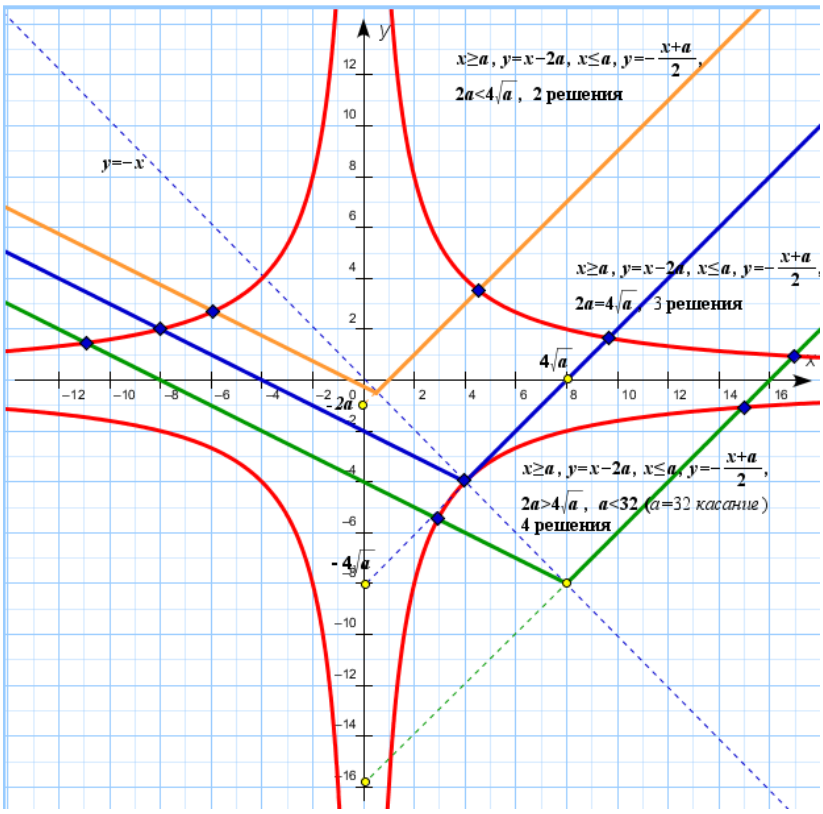
$$\frac{2}{a}>4\sqrt{a},\ \ 0<a<\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Найдем эти решения:

$x-\frac{2}{a}=\frac{4a}{x}, x^2-\frac{2}{a}x-4a=0,\ x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4a^3}}{a}, y_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a^3}}{a}.$

$x-\frac{2}{a}=-\frac{4a}{x}, x^2-\frac{2}{a}x+4a=0,\ x_{3/4}=\frac{1\pm\sqrt{1-4a^3}}{a}, y_{3/4}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4a^3}}{a}.$

II. $\begin{cases} y = 3|x-a|/4 + x/4 - 5a/4, \\ |xy| = 4a, \quad a > 0. \end{cases}$



$y = 3|x-a|/4 + x/4 - 5a/4$,
при $x \geq a$ имеем $y = x - 2a$, при $x \leq a$ имеем $y = -\frac{x+a}{2}$.

1) Система имеет 2 различных решения, если

$$2a < 4\sqrt{a}, \quad a < 4.$$

Найдем эти решения:

$x - 2a = \frac{4a}{x}, x^2 - 2ax - 4a = 0,$

правый корень $x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a}$,

$y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a}$;

$-\frac{x+a}{2} = -\frac{4a}{x}, x^2 + ax - 8a = 0$, левый корень $x_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2+32a}}{2}$, $y_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+32a}}{4}$.

2) Система имеет 3 различных решения, если

$$2a = 4\sqrt{a}, \quad a = 4.$$

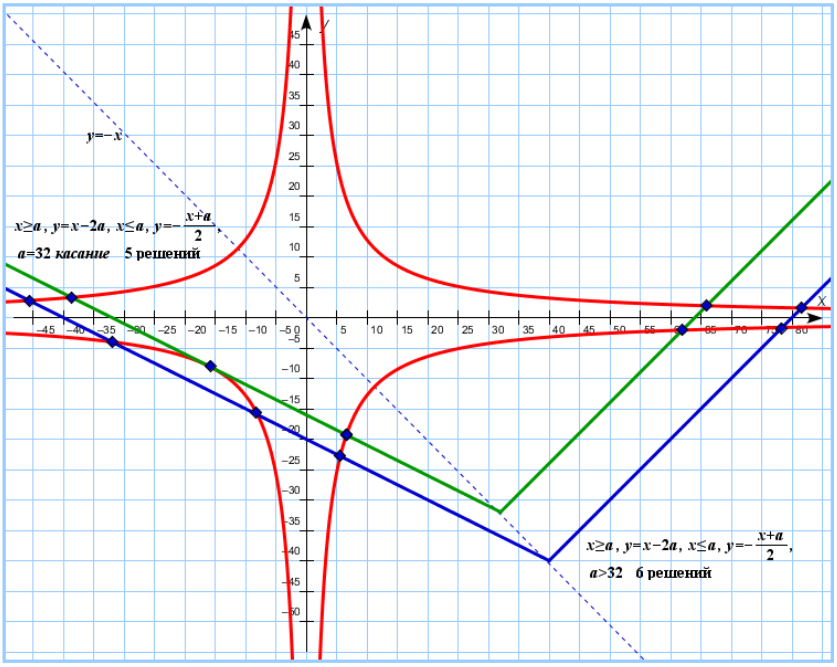
Найдем эти решения:

$x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a}$,

$y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a}$;

$x_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2+32a}}{2}$, $y_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+32a}}{4}$.

$$x_3 = 2\sqrt{a}, y_3 = -2\sqrt{a}.$$



3) Найдем значение параметра $a > 0$, при котором прямая $y = -\frac{x+a}{2}$ будет иметь с гиперболой $y = \frac{4a}{x}$ единственную общую точку.

$$-\frac{x+a}{2} = \frac{4a}{x}, x^2 + ax + 8a = 0,$$

$D = a(a-32) = 0, a = 32$. Тогда при $4 < a < 32$ система будет иметь 4 решения: $x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a}$,

$y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a}$;

$x_{2/3} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2+32a}}{2}$, $y_{2/3} = \frac{-a\mp\sqrt{a^2+32a}}{4}$. Найдем четвертое решение:

$x - 2a = -\frac{4a}{x}, x^2 - 2ax + 4a = 0$, правый корень $x_4 = a + \sqrt{a^2 - 4a}$, $y_4 = -a + \sqrt{a^2 - 4a}$.

4) При $a = 32$ система будет иметь 5 различных решений:

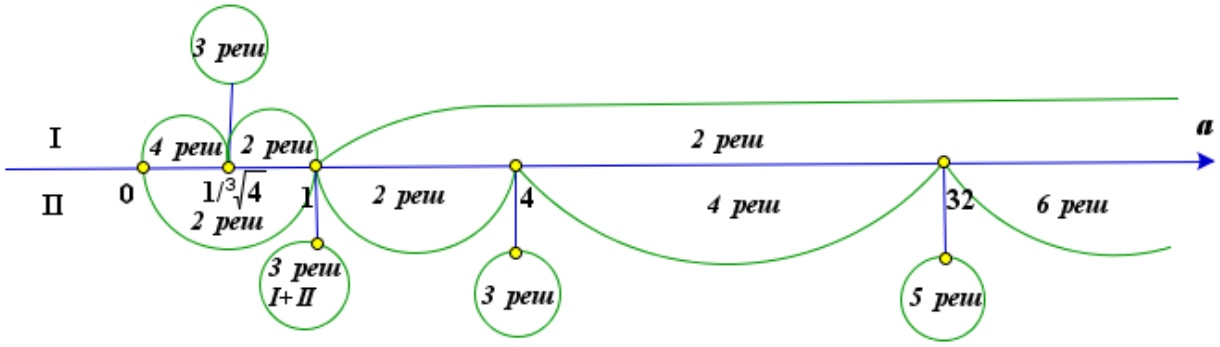
$x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a}$, $y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a}$; $x_{2/3} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2+32a}}{2}$, $y_{2/3} = \frac{-a\mp\sqrt{a^2+32a}}{4}$,

$x_4 = a + \sqrt{a^2 - 4a}$, $y_4 = -a + \sqrt{a^2 - 4a}$, $x_5 = -a/2$, $y_5 = -a/4$.

5) Система имеет 6 различных решений при $a > 32$:

$x_1 = a + \sqrt{a^2+4a}$, $y_1 = -a + \sqrt{a^2+4a}$; $x_{2/3} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+32a}}{2}$, $y_{2/3} = \frac{-a \mp \sqrt{a^2+32a}}{4}$,

$x_4 = a + \sqrt{a^2-4a}$, $y_4 = -a + \sqrt{a^2-4a}$, $x_{5/6} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-32a}}{2}$, $y_{5/6} = \frac{-a \mp \sqrt{a^2-32a}}{4}$.



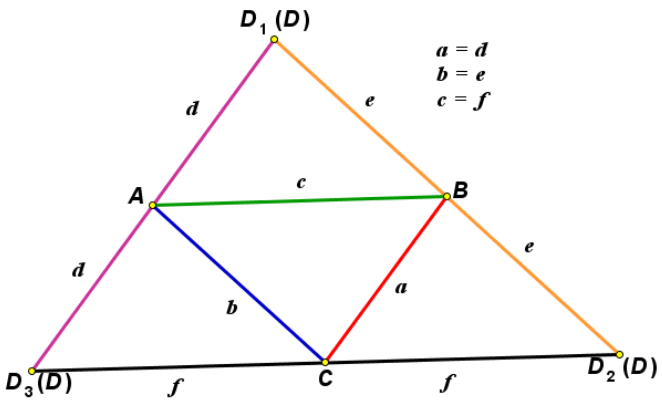
Возможны следующие случаи совпадения решений в I и II случаях:

1) $x - \frac{2}{a} = x - 2a, a = 1$, в этом случае 3 решения;
2) прямые $y = x - \frac{2}{a}$, $y = -\frac{x+a}{2}$ и гипербола $y = \frac{4a}{x}$ пересекаются в одной точке, но этот случай возможен при $a > 32$, и в этом случае будет 7 решений.

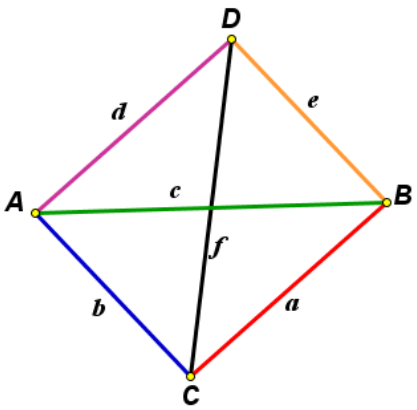
Ответ: $a \in (0;\ 1/\sqrt[3]{4}) \cup (4; 32)$,

5. В тетраэдре *ABCD* суммы трёх плоских углов при каждой вершине равны 180°. Найдите объём тетраэдра, если *BC* = 4, $\cos\angle BAC = 3/4$, $\sin\angle CBD = 5\sqrt{7}/16$. (20 баллов)

Решение. Сделаем развертку тетраэдра на плоскость *ABC* относительно сторон треугольника *ABC*. Поскольку суммы трёх плоских углов при каждой вершине равны 180°, то получим треугольник $D_1D_2D_3$, для которого отрезки *AB*, *AC* и *BC* являются средними линиями. Отсюда получаем, что стороны треугольника ABC равны противоположным ребрам тетраэдра. Следовательно, тетраэдр *ABCD* является равногранным. Обозначим $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBD = \beta$, $AC = b$, $AB = c$. Отметим, что $\angle ACB = \beta$. По теореме синусов для треугольника *ABC* имеем $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\beta}$. Поскольку $a = 4$, $\cos\alpha = 3/4$, $\sin\angle\beta = 5\sqrt{7}/16$, то



$$\frac{16}{\sqrt{7}} = \frac{16c}{5\sqrt{7}}, \qquad c = 5.$$



По теореме косинусов найдем *b*:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$16 = b^2 + 25 - 7{,}5b$, $b^2 - 7{,}5b + 9 = 0, b = 6$. Второй корень $b = 1{,}5$ не подходит, поскольку в этом случае угол ACB тупой.

Для того, чтобы найти объем тетраэдра $ABCD$ опишем около него прямоугольный параллелепипед так, что ребра тетраэдра являлись диагоналями граней параллелепипеда. Обозначим стороны параллелепипеда x, y, z. Тогда объем тетраэдра $V = (1 - 4/6)xyz = xyz/3$.

Имеем $x^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$, $z^2 + y^2 = c^2$, $\Rightarrow$

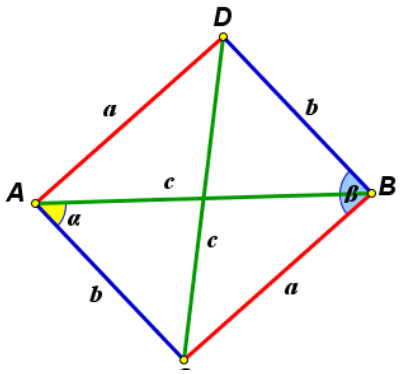
$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$, $x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$,

$y^2 = \frac{1}{2}(-a^2 + b^2 + c^2)$, $z^2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2)$,

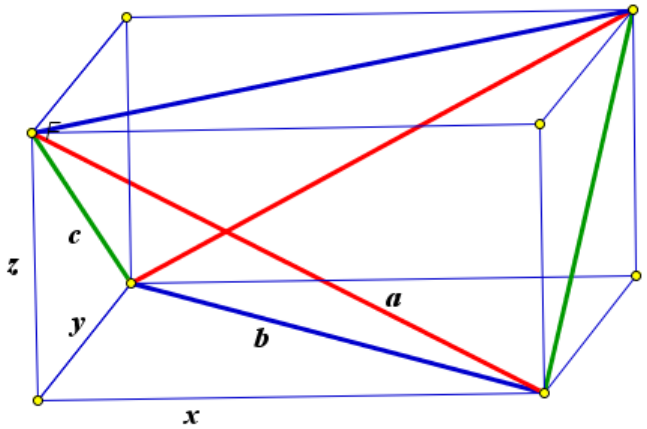
$$V = \frac{1}{12}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)}$$

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{2(4^2+6^2-5^2)(-4^2+6^2+5^2)(4^2-6^2+5^2)}$$

$$= \frac{15\sqrt{6}}{4}.$$

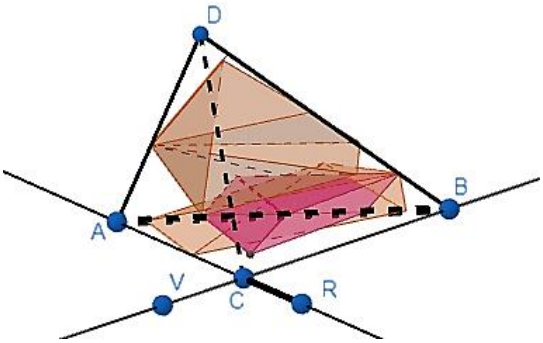


Ответ: $\frac{15\sqrt{6}}{4}$.



6. По программе реновации было решено разобрать старый дом и на его месте построить новый. При разборе старого дома возникло две проблемы.

1) Скопление строительного лома перекрыло подход к некоторым точкам строительной площадки, между которыми необходимо было промерить расстояние. Прораб промерил расстояние от точки C до точки A и от точки C до точки B (см. рис.). Оказалось, что $AC = 4$ м, $BC = 10$ м. Кроме того, ему удалось определить расстояния $CR = 1$ м, $VR = 3$ м, $CV = 2{,}5$ м для точек R и V, расположенных на продолжениях прямых дорожек, соединяющих объекты A, C и C, B соответственно.



Определите расстояние между точками A и B (промерить это расстояние на площадке не представлялось возможным из-за завала) и площадь части строительной площадки CADB при условии, что расстояния CD и BD вдвое больше расстояния CB.

2) Из земли торчал негнущийся кусок арматуры - штырь, высота которого над землей 0,5 м. Попытки выдернуть его из земли не привели к успеху. Тогда рабочие сдвинули его бульдозером так, что конец штыря сравнялся с поверхностью земли и оказался на расстоянии 1,5 м от первоначальной точки входа штыря в землю. Найдите длину части штыря, скрытую в земле, предполагая, что его нижний конец не сместился. (20 баллов)

Решение.

1) Используем подобие треугольников ACB и RCV :

$$\frac{AC}{CR} = \frac{AB}{VR} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{AC}{CR} \cdot VR = \frac{4}{1} \cdot 3 = 12.$$

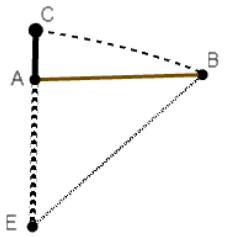
Площадь четырехугольника CADB найдем как сумму площадей треугольников CAB и ABD: площадь первого треугольника найдем как половину произведения длин сторон на синус угла между ними, угол найдем по теореме косинусов.

$$\cos\beta = \frac{AB^2 + CB^2 - AC^2}{2AB \cdot CB} = \frac{144 + 100 - 16}{2 \cdot 12 \cdot 10} = \frac{36 + 25 - 4}{2 \cdot 3 \cdot 10} = \frac{57}{6 \cdot 10} = \frac{19}{20} \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sqrt{39}}{20},$$

$S_{CAB} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot AB \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{39}}{20} = 3\sqrt{39},$ т.к. треугольник CDB равнобедренный,

значит косинус угла при основании равен $\cos\alpha = \frac{CB}{2CD} = \frac{CB}{2 \cdot 2 \cdot CB} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot AB \cdot \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 12\left(\frac{19}{20} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{39}}{20}\right) = \frac{57\sqrt{15}}{2} - \frac{3\sqrt{39}}{2},$$



$$S_{CADB} = \frac{57\sqrt{15}}{2} + \frac{3\sqrt{39}}{2} = \frac{57\sqrt{15} + 3\sqrt{39}}{2} \approx 119{,}74$$

б) $(AE + AC)^2 = EB^2 = AE^2 + AB^2 \quad \Rightarrow \quad AE = \frac{AB^2 - AC^2}{2AC} = \frac{1{,}5^2 - 0{,}5^2}{2 \cdot 0{,}5} = 2$

Ответ: а) 12, $\frac{57\sqrt{15}+3\sqrt{39}}{2} \approx 119,74$, б) 2.