

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: компьютерное моделирование и графика; тур по математике и инженерной графике

Вариант: 2

Класс: 11

**Задача 1** (10 баллов). Найдите миллионную цифру после запятой в десятичной записи дроби  $1/41$ .

**Задача 2** (10 баллов). Даны вершины правильного 120-угольника  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{120}$ . Сколькими способами из них можно выбрать три вершины, образующие тупоугольный треугольник? Ответ обосновать.

**Задача 3** (12 баллов). Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$\frac{4a \cos^2 t + 4a(2\sqrt{2} - 1) \cos t + 4(a - 1) \sin t + a + 2}{\sin t + 2\sqrt{2} \cos t} = 4a$$

имеет ровно два различных решения в интервале  $(-\pi/2; 0)$ .

**Задача 4а** (10 баллов). См. на обороте листа.

**Задача 4б** (8 баллов). Найдите угол между плоскостями  $BCE$  и  $ADE$  (см. условие задачи 4а).

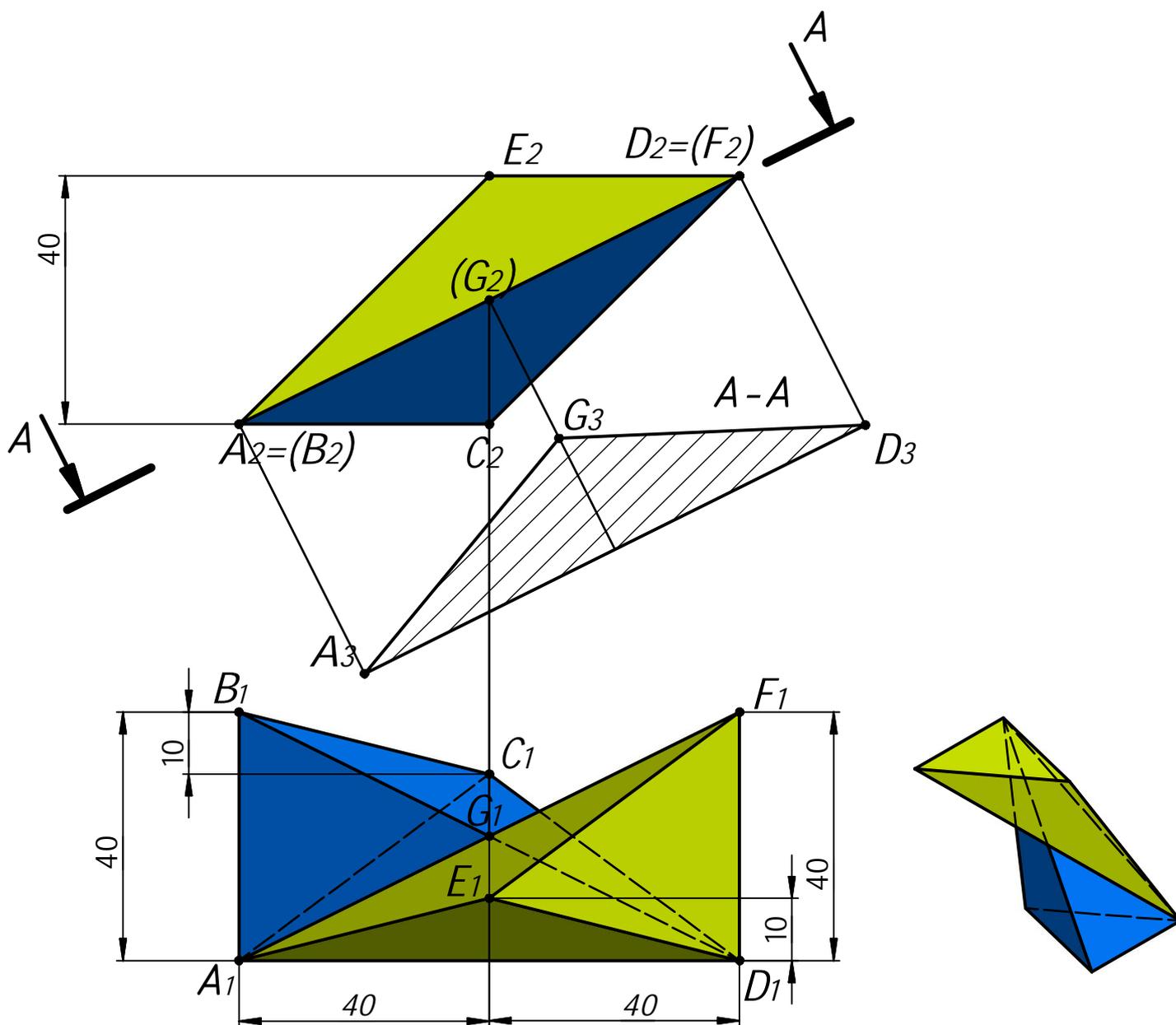
**Задача 5** (20 баллов). См. лист 2.

### Задача 4а.

Даны две проекции треугольника  $ABC$  и горизонтальная проекция треугольника  $DEF$ . Плоскость треугольника  $DEF$  параллельна плоскости треугольника  $ABC$  и выше ее на  $40$  мм.

Требуется:

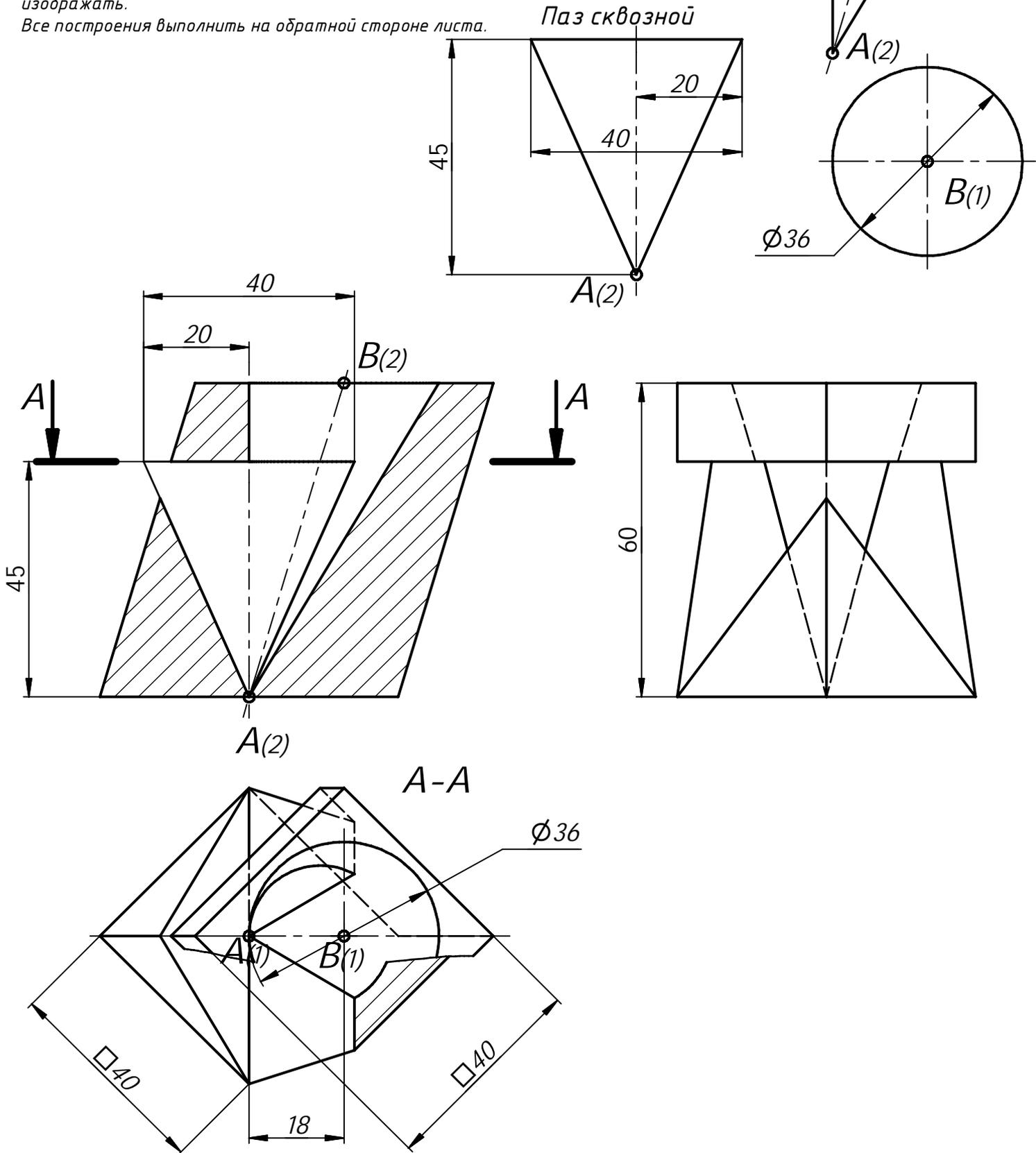
- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух пирамид  $ABCD$  и  $DEFA$  с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции фигуры, общей для обеих пирамид;
- 3) определить натуральную величину искомой фигуры с помощью графических построений;
- 4) обозначить видимость ребер пирамид;
- 5) оформить все изображения по ГОСТ 2.303-306;
- 6) обозначить и сохранить на чертеже линии построения натуральной величины фигуры, общей для обеих пирамид.



**Задача 5 (15 баллов).** Даны две проекции призмы. Требуется:

- 1) дополнить заданную деталь вставками по привязкам в точках А и В, в соответствии с ориентацией по координатным осям;
- 2) выполнить для полученной детали три вида в проекционной связи;
- 3) на месте соответствующего основного вида оформить изображение как соединение половины вида и половина разреза А-А
- 4) главный вид оформить фронтальным разрезом;
- 5) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
- 6) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
- 7) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
- 8) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.

Все построения выполнить на обратной стороне листа.



**Решение варианта №2 (Математика - 11 класс)**

1. Найдите миллионную цифру после запятой в десятичной записи дроби  $1/41$ .

(10 баллов)

**Решение.** Наименьшее целое число из девяток в десятичной форме записи, делящееся на 41, это 99999,  $99999 = 41 \cdot 2439$ . Тогда

$$\frac{1}{41} = \frac{2439}{99999} = \frac{2439}{10^5-1} = \frac{2439}{10^5} \cdot \frac{1}{1-10^{-5}} = 2439 \cdot 10^{-5}(1 + 10^{-5} + 10^{-10} + 10^{-15} + \dots) = 0,024390249302439 \dots$$

Искомая цифра последняя в 200000-м периоде. Это цифра 9.

**Ответ: 9.**

2. Даны вершины правильного 120-угольника  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{120}$ . Сколькими способами из них можно выбрать три вершины, образующие тупоугольный треугольник? (10 баллов)

**Решение.** Пусть вершины занумерованы по часовой стрелке.

Обозначим выбранные вершины по часовой стрелке  $K, L, M$ ,

причем угол  $KLM$  тупой. Если  $K = A_k, L = A_l, M = A_m$ , то

$$\alpha = \angle KLM = \frac{180^\circ}{120} (120 - (m - k)) > 90^\circ, \quad 0 < m - k < 60.$$

Разность  $m - k$  считается по модулю 120

(например,  $15 - 90 \pmod{120} = 45$ ).

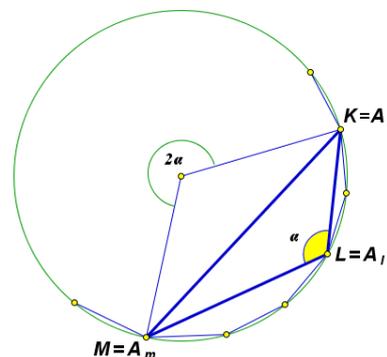
Посчитаем число способов выбрать вершины  $K, L, M$ .

Сначала одним из 120 способов выберем вершину  $K$ . Затем выберем любые две из вершин

$A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{k+59}$  (номера точек считаются по модулю 120). Из этих вершин ближняя к  $K$

будет  $L$ , дальняя –  $M$ . Итак, имеем  $120 \cdot C_{59}^2 = 120 \cdot 59 \cdot 29 = 205320$ .

**Ответ: 205320.**



3. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$\frac{4a \cos^2 t + 4a(2\sqrt{2} - 1) \cos t + 4(a - 1) \sin t + a + 2}{\sin t + 2\sqrt{2} \cos t} = 4a$$

имеет ровно два различных решения в интервале  $(-\pi/2; 0)$ . (12 баллов)

**Решение.** Пусть  $x = \cos t, y = \sin t, x^2 + y^2 = 1, x \in (0; 1), y \in (-1; 0)$ . Тогда уравнение будет иметь вид

$$\frac{4ax^2 + 4a(2\sqrt{2} - 1)x + 4(a - 1)y + a + 2}{2\sqrt{2}x + y} = 4a,$$

$$4ax^2 + 4a(2\sqrt{2} - 1)x + 4(a - 1)y + a + 2 = 4a2\sqrt{2}x + 4ay,$$

$$4ax^2 - 4ax - 4y + a + 2 = 0, \quad 2\sqrt{2}x + y \neq 0.$$

В итоге имеем систему:

$$\begin{cases} 4ax^2 - 4ax - 4y + a + 2 = 0, \\ 2\sqrt{2}x + y \neq 0, \\ x^2 + y^2 = 1, x \in (0; 1), y \in (-1; 0). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 4ax^2 - 4ax + a + 2, \\ y \neq -2\sqrt{2}x, \\ x^2 + y^2 = 1, x \in (0; 1), y \in (-1; 0). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}, \\ y \neq -2\sqrt{2}x, \\ x^2 + y^2 = 1, x \in (0; 1), y \in (-1; 0). \end{cases}$$

Найдем значение параметра  $a$ , при котором парабола

$y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$  проходит через точку  $(0; -1)$ .

Имеем  $-1 = \frac{a}{4} + \frac{1}{2}$ ,  $a = -6$ . Поскольку парабола симметрична относительно прямой  $x = \frac{1}{2}$ , то два различных решения система будет иметь при  $a < -6$ , кроме случая, когда парабола пройдет через точку пересечения окружности и прямой  $y = -2\sqrt{2}x$ .

Найдем решение

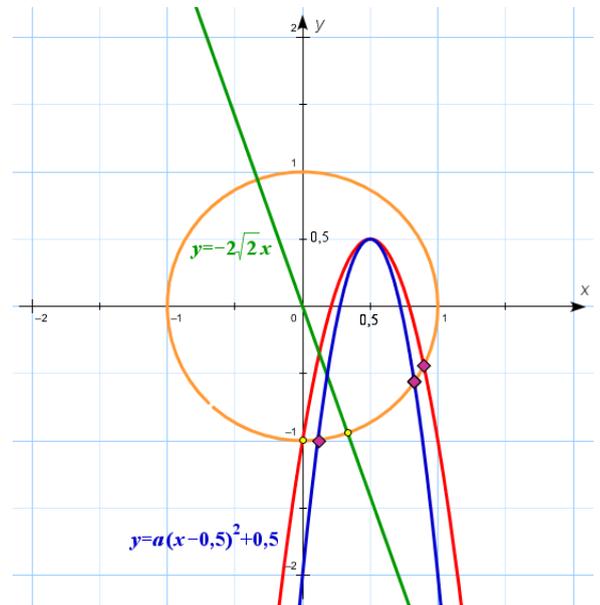
системы  $\begin{cases} y = -2\sqrt{2}x, \\ x^2 + y^2 = 1, x \in (0; 1), y \in (-1; 0). \end{cases}$  Имеем

$x = \frac{1}{3}, y = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ . Найдем значение параметра  $a$ , при

котором парабола  $y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$  проходит через

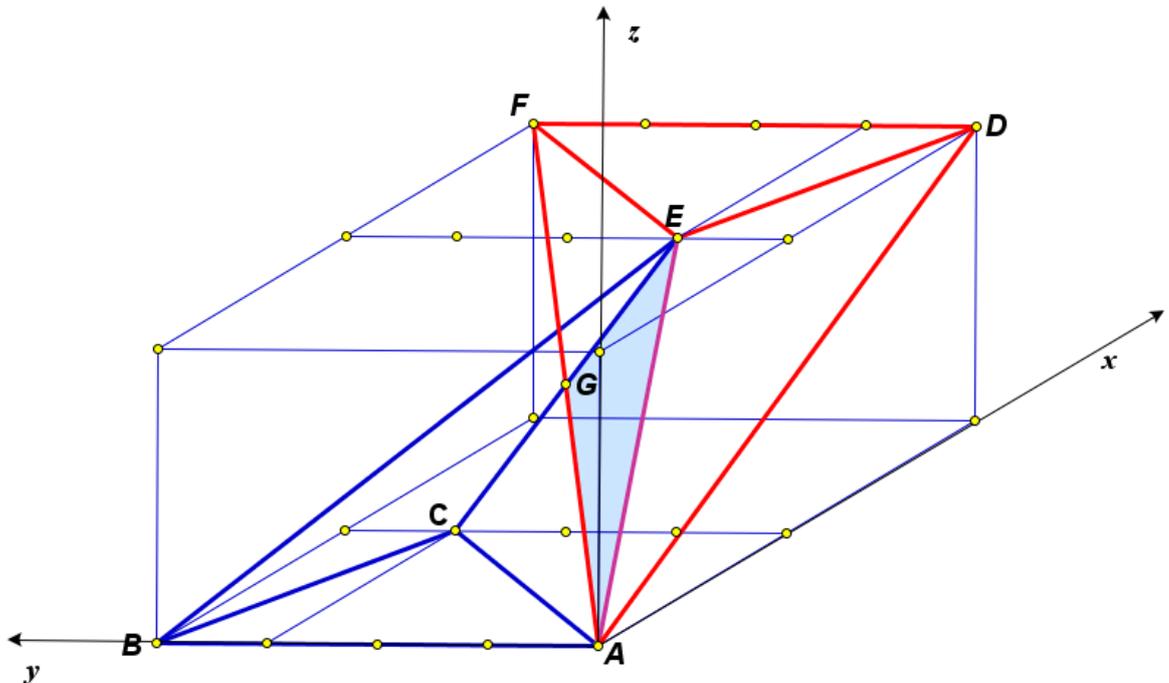
точку  $(\frac{1}{3}; -\frac{2\sqrt{2}}{3})$ . Решаем уравнение  $-\frac{2\sqrt{2}}{3} = a\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ ,  $a = -18 - 24\sqrt{2}$ .

**Ответ:**  $a \in (-\infty; -18 - 24\sqrt{2}) \cup (-18 - 24\sqrt{2}; -6)$



46. Найдите угол между плоскостями  $BCE$  и  $AFE$  (см. условие задачи 4а). (8 баллов)

**Решение.**



Введем систему координат, как показано на рисунке. Тогда  $A = (0; 0; 0), B = (0; 40; 0), E = (20; 10; 20), F = (40; 40; 20), C = (20; 30; 0)$ . Имеем  $\vec{BC} = \{20; -10; 0\}, \vec{BE} = \{20; -30; 20\}$ ,

$\vec{AE} = \{20; 10; 20\}$ ,  $\vec{AF} = \{40; 40; 20\}$ . Пусть  $\vec{n} \perp \vec{BC}$ ,  $\vec{n} \perp \vec{BE}$ ,  $\vec{m} \perp \vec{AE}$ ,  $\vec{m} \perp \vec{AF}$ ,  $\vec{n} = \{a; b; c\}$ ,  $\vec{m} = \{d; e; f\}$ . Тогда имеем две системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 20a - 10b = 0, \\ 20a - 30b + 20c = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 20d + 10e + 20f = 0, \\ 40d + 40e + 20f = 0. \end{cases} \quad \text{Для первой системы имеем } \begin{cases} b = 2a, \\ c = 2a, \end{cases} \text{ и в}$$

качестве вектора нормали к плоскости  $BCE$  можно выбрать вектор  $\vec{n} = \{1; 2; 2\}$ . Для

второй системы имеем  $\begin{cases} e = f, \\ d = -3f/2, \end{cases}$  и в качестве вектора нормали к плоскости  $AFE$

можно выбрать вектор  $\vec{m} = \{-3; 2; 2\}$ . Угол между плоскостями равен углу между нормальными к этим плоскостям. Следовательно, косинус искомого угла  $\alpha$  можно найти по формуле

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{5}{3\sqrt{17}} = \frac{5\sqrt{17}}{51}.$$

**Ответ:**  $\arccos \frac{5\sqrt{17}}{51}$ .