

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: компьютерное моделирование и графика; тур по математике и инженерной графике

Вариант: 2

Класс: 10

**Задача 1** (10 баллов). Найдите миллионную цифру после запятой в десятичной записи дроби  $1/41$ .

**Задача 2** (10 баллов). Даны вершины правильного 120-угольника  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{120}$ . Сколькими способами из них можно выбрать три вершины, образующие тупоугольный треугольник? Ответ обосновать.

**Задача 3** (12 баллов). Укажите все значения  $a$ , при которых система уравнений 
$$\begin{cases} x - 1 = a(y^3 - 1), \\ \frac{2x}{|y^3| + y^3} = \sqrt{x} \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом  $a$ .

**Задача 4а** (10 баллов). См. на обороте листа.

**Задача 4б** (8 баллов). Найдите периметр фигуры общей для обеих пирамид  $ABCE$  и  $DEFA$  (см. условие задачи 4а).

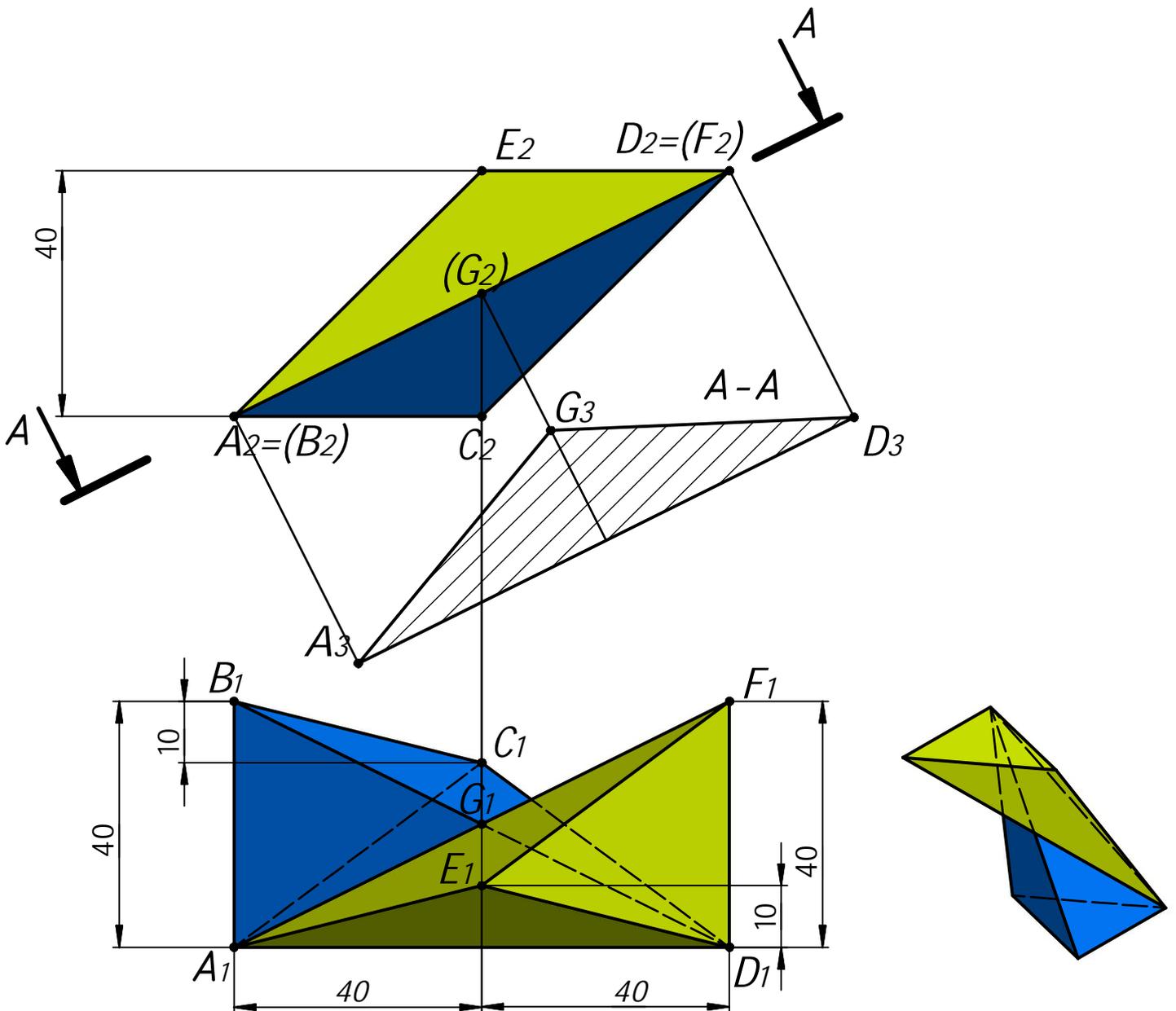
**Задача 5** (20 баллов). См. лист 2.

### Задача 4а.

Даны две проекции треугольника  $ABC$  и горизонтальная проекция треугольника  $DEF$ . Плоскость треугольника  $DEF$  параллельна плоскости треугольника  $ABC$  и выше ее на  $40$  мм.

Требуется:

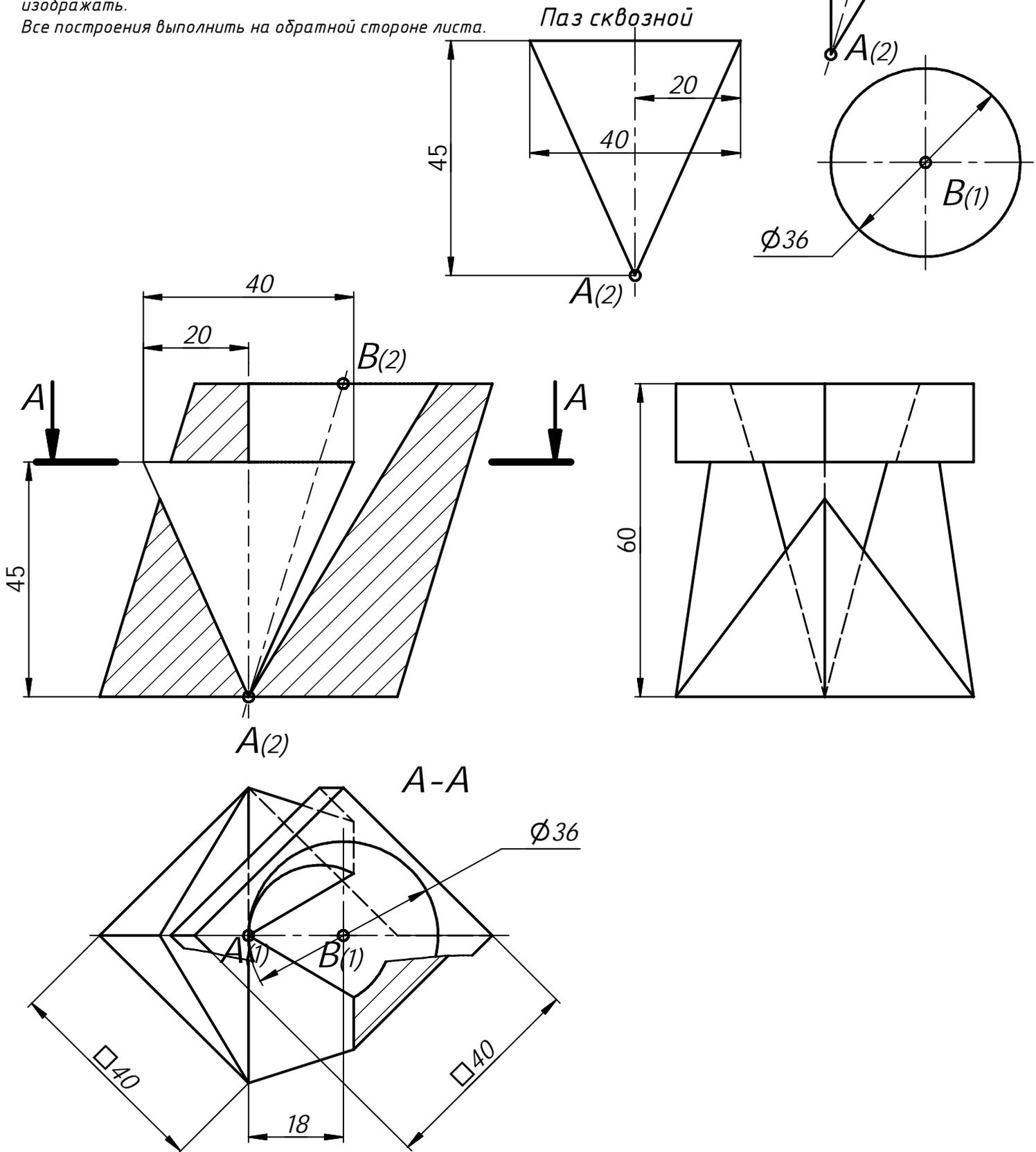
- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух пирамид  $ABCD$  и  $DEFA$  с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции фигуры, общей для обеих пирамид;
- 3) определить натуральную величину искомой фигуры с помощью графических построений;
- 4) обозначить видимость ребер пирамид;
- 5) оформить все изображения по ГОСТ 2.303-306;
- 6) обозначить и сохранить на чертеже линии построения натуральной величины фигуры, общей для обеих пирамид.



**Задача 5 (15 баллов).** Даны две проекции призмы. Требуется:

- 1) дополнить заданную деталь вставками по привязкам в точках А и В, в соответствии с ориентацией по координатным осям;
- 2) выполнить для полученной детали три вида в проекционной связи;
- 3) на месте соответствующего основного вида оформить изображение как соединение половины вида и половина разреза А-А
- 4) главный вид оформить фронтальным разрезом;
- 5) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
- 6) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
- 7) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
- 8) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.

Все построения выполнить на обратной стороне листа.



**Решение варианта №2 (Математика - 10 класс)**

1. Найдите миллионную цифру после запятой в десятичной записи дроби  $1/41$ .

(10 баллов)

**Решение.** Наименьшее целое число из девяток в десятичной форме записи, делящееся на 41, это 99999,  $99999 = 41 \cdot 2439$ . Тогда

$$\frac{1}{41} = \frac{2439}{99999} = \frac{2439}{10^5-1} = \frac{2439}{10^5} \cdot \frac{1}{1-10^{-5}} = 2439 \cdot 10^{-5}(1 + 10^{-5} + 10^{-10} + 10^{-15} + \dots) = 0,024390249302439 \dots$$

Искомая цифра последняя в 200000-м периоде. Это цифра 9.

**Ответ: 9.**

2. Даны вершины правильного 120-угольника  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{120}$ . Сколькими способами из них можно выбрать три вершины, образующие тупоугольный треугольник? (10 баллов)

**Решение.** Пусть вершины занумерованы по часовой стрелке.

Обозначим выбранные вершины по часовой стрелке  $K, L, M$ ,

причем угол  $KLM$  тупой. Если  $K = A_k, L = A_l, M = A_m$ , то

$$\alpha = \angle KLM = \frac{180^\circ}{120} (120 - (m - k)) > 90^\circ, \quad 0 < m - k < 60.$$

Разность  $m - k$  считается по модулю 120

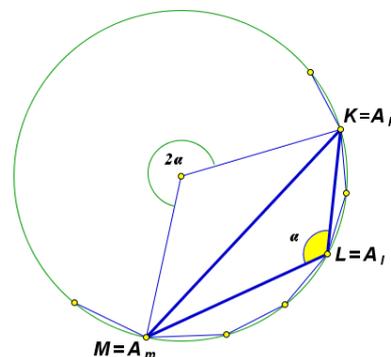
(например,  $15 - 90 \pmod{120} = 45$ ).

Посчитаем число способов выбрать вершины  $K, L, M$ .

Сначала одним из 120 способов выберем вершину  $K$ . Затем выберем любые две из вершин

$A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{k+59}$  (номера точек считаются по модулю 120). Из этих вершин ближняя к  $K$

будет  $L$ , дальняя –  $M$ . Итак, имеем  $120 \cdot C_{59}^2 = 120 \cdot 59 \cdot 29 = 205320$ .



**Ответ: 205320.**

3. Укажите все значения  $a$ , при которых система уравнений  $\begin{cases} x - 1 = a(y^3 - 1), \\ \frac{2x}{|y^3| + y^3} = \sqrt{x} \end{cases}$  имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом  $a$ .

**Решение.**

ОДЗ:  $y > 0, x \geq 0$ .

В ОДЗ второе уравнение системы принимает вид:  $x = y^3 \sqrt{x}$ .

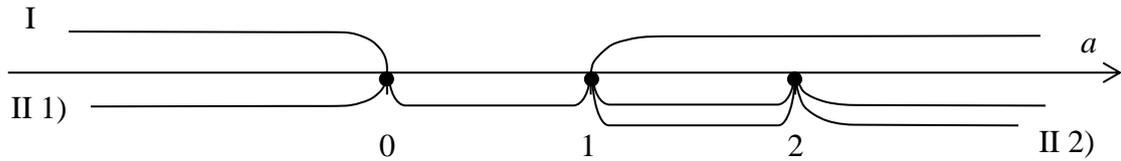
I.  $x = 0, y = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{a}} = \sqrt[3]{\frac{a-1}{a}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ a > 1. \end{cases}$

II.  $x > 0, y = \sqrt{x}; (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) = a(\sqrt{x} - 1)$ .

1)  $\sqrt{x} = 1, x = 1, y = 1, a \in R$ .

2)  $\sqrt{x} + 1 = a, \sqrt{x} = a - 1 > 0, a > 1$ . Найденное решение  $x = (a - 1)^2, y = \sqrt[3]{a - 1}$

совпадает с предыдущим, если  $1 = a - 1, a = 2$ . Итак, при  $a \in (1; 2) \cup (2; +\infty) x = (a - 1)^2, y = \sqrt[3]{a - 1}$ .



**Ответ:**

$$a \in (-\infty; 0) \cup \{2\}, x_1 = 0, y_1 = 1 - \frac{1}{a}; x_2 = 1, y_2 = 1;$$

$$a \in [0; 1], x = 1, y = 1;$$

$$a \in (1; 2) \cup (2; +\infty), x_1 = 0, y_1 = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{a}}; x_2 = 1, y_2 = 1; x_3 = (a - 1)^2, y_3 = \sqrt[3]{a - 1}.$$

46. Найдите периметр фигуры общей для обеих пирамид (см. условие задачи 4а).

(8 баллов)

**Решение.**

Прямые  $AC$  и  $EF$  параллельны,  $ACFE$  – параллелограмм, фигура общая для обеих пирамид – треугольник  $AGE$ , точка  $G$  – точка пересечения диагоналей параллелограмма  $ACFE$ . Фигурой, общей для обеих пирамид, является треугольник  $AGE$ .

$$GE = CE/2. CE = \sqrt{CK^2 + KE^2} = \sqrt{20^2 + 20^2} = 20\sqrt{2}, GE = 10\sqrt{2}.$$

$$AF = \sqrt{40^2 + 40^2 + 20^2} = 60, AG = AF/2 = 30.$$

$$AE = \sqrt{20^2 + 10^2 + 20^2} = 30.$$

$$P_{AGE} = 10\sqrt{2} + 60$$

**Ответ:**  $10\sqrt{2} + 60$ .

